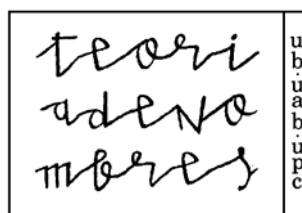


**NOTES DEL SEMINARI**



**REPRESENTACIONS AUTOMORFES DE  
GL(2)**

**Parts I, II i III**

**Barcelona 1997**

2

Notes del Seminari de Teoria de Nombres  
(UB-UAB-UPC)

*Comitè editorial*

P. Bayer E. Nart J. Quer

# REPRESENTACIONS AUTOMORFES DE GL(2)

**Parts I, II i III**

Edició a cura de

P. Bayer      A. Travesa

Amb contribucions de

M. Alsina  
J. Dexeus  
M. Vela

F. Bars  
B. Plans  
N. Vila

P. Bayer  
J.-J. Ramon  
\*

J. Coll  
A. Travesa  
\*

P. Bayer, A. Travesa  
Facultat de Matemàtiques, UB  
Gran Via de les Corts Catalanes, 585  
08007 Barcelona. Espanya

*Comitè editorial*

P. Bayer  
Fac. de Matemàtiques  
Univ. de Barcelona  
Gran Via de les Corts  
Catalanes, 585  
08007 Barcelona  
Espanya

E. Nart  
Fac.de Ciències  
Univ. Autònoma de  
Barcelona  
Dep. de Matemàtiques  
08193 Bellaterra  
Espanya

J. Quer  
Fac. de Matemàtiques  
i Informàtica  
Univ. Politècnica de  
Catalunya  
Pau Gargallo, 5  
08228 Barcelona  
Espanya

Classificació AMS  
*Primària:* 11F, 11R, 11S  
*Secundària:* 20G

Barcelona, 1997  
Amb suport parcial de DGICYT: PB93-0034, PB93-0815  
ISBN: 84-923250-2-X (de l'obra sencera)  
ISBN: 84-923250-0-3 (d'aquest volum)

# Contingut

|                                                                   | Pàg. |
|-------------------------------------------------------------------|------|
| INTRODUCCIÓ .....                                                 | 1    |
| PART I: Representacions de grups de Lie compactes .....           | 3    |
| CAPÍTOL 1, per JOSEP J. RAMON                                     |      |
| REPRESENTACIONS DE GRUPS COMPACTES .....                          | 5    |
| §1: Mesures de Haar per a grups localment compactes .....         | 5    |
| §2: Representacions de grups localment compactes .....            | 7    |
| §3: El cas dels grups de Lie .....                                | 8    |
| §4: Grups compactes .....                                         | 10   |
| §5: Lema de Schur i relacions d'ortogonalitat .....               | 11   |
| §6: Caràcters .....                                               | 14   |
| §7: El teorema de Peter-Weyl .....                                | 17   |
| §8: Enunciat final i prova del teorema de Peter-Weyl .....        | 19   |
| §9: La representació regular .....                                | 21   |
| §10: Representacions induïdes. Reciprocitat de Frobenius .....    | 24   |
| §11: L'àlgebra de grup i els seus idempotents. Funcions de classe | 26   |
| §12: Teoremes de descomposició de representacions                 |      |
| de grups compactes .....                                          | 28   |
| Bibliografia .....                                                | 31   |
| CAPÍTOL 2, per JORDI QUER                                         |      |
| ÀLGEBRES I GRUPS DE LIE .....                                     | 33   |
| CAPÍTOL 3, per MARIA FONT                                         |      |
| SISTEMES D'ARRELS I DIAGRAMES DE DYNKIN                           |      |
| .....                                                             | 35   |

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| CAPÍTOL 4, per GABRIEL CARDONA                                      |     |
| CLASSIFICACIÓ DE LES ÀLGEBRES DE LIE                                |     |
| COMPLEXES SIMPLES .....                                             | 37  |
| CAPÍTOL 5, per ARTUR TRAVESA                                        |     |
| REPRESENTACIONS DE $\mathbf{SO}(3)$ .....                           | 39  |
| §1: Representacions dels grups compactes .....                      | 40  |
| §2: Tors maximals .....                                             | 44  |
| §3: Representacions de $\mathfrak{so}(3)$ .....                     | 48  |
| §4: Representacions de $\mathbf{SU}(2)$ i de $\mathbf{SO}(3)$ ..... | 56  |
| §5: Els harmònics esfèrics .....                                    | 62  |
| §6: L'equació de Schrödinger .....                                  | 68  |
| Bibliografia .....                                                  | 77  |
| CAPÍTOL 6, per PILAR BAYER                                          |     |
| $\mathbf{SU}(2)$ .....                                              | 79  |
| §1: Principis generals de la mecànica quàntica .....                | 79  |
| §2: L'espai-temps de Minkowski .....                                | 85  |
| §3: Principis de la mecànica quàntico-relativista .....             | 90  |
| §4: Invariància relativista de l'equació de Dirac .....             | 95  |
| §5: Una classificació relativista de sistemes mecànic-quàntics ..   | 96  |
| §6: El grup petit .....                                             | 99  |
| §7: L'àtom d'hidrogen relativista i amb espín .....                 | 101 |
| Bibliografia .....                                                  | 103 |
| CAPÍTOL 7, per JOSEFINA DEXEUS                                      |     |
| REPRESENTACIONS DE GRUPS DE LIE                                     |     |
| SEMISIMPLES I COMPACTES .....                                       | 105 |
| §1: Formes reals compactes .....                                    | 106 |
| §2: Tors maximals dels grups de Lie compactes .....                 | 109 |
| §3: Representacions de les àlgebres de Lie semisimples complexes    | 112 |
| §4: La fórmula de Weyl dels caràcters .....                         | 116 |
| §5: Representacions dels grups clàssics .....                       | 119 |
| Bibliografia .....                                                  | 127 |

|                                                          |            |
|----------------------------------------------------------|------------|
| Contingut                                                | vii        |
| <b>PART II: Representacions de grups reductius .....</b> | <b>129</b> |
| CAPÍTOL 8, per MONTSERRAT ALSINA                         |            |
| GRUPS REDUCTIUS .....                                    | 131        |
| §1: Sistemes d'arrels i dades d'arrels .....             | 131        |
| §2: Grups algebraics reductius. Cas absolut .....        | 134        |
| §3: Grups reductius amb cos base $k$ . Cas relatiu ..... | 138        |
| §4: Descomposicions d'una classe de grups de Lie .....   | 142        |
| Bibliografia .....                                       | 145        |
| CAPÍTOL 9, per SALVADOR COMALADA                         |            |
| GRUPS REDUCTIUS SOBRE COSSOS LOCALS                      |            |
| .....                                                    | 147        |
| CAPÍTOL 10, per JORDI QUER                               |            |
| REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS REALS                 |            |
| .....                                                    | 149        |
| CAPÍTOL 11, per SALVADOR COMALADA                        |            |
| REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS                       |            |
| SOBRE COSSOS LOCALS NO ARQUIMEDIANS                      |            |
| .....                                                    | 151        |
| CAPÍTOL 12, per PILAR BAYER                              |            |
| REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS                       |            |
| ASSOCIATS A ÀLGEBRES CENTRALS I SIMPLES                  |            |
| SOBRE COSSOS LOCALS .....                                | 153        |
| §1: Grups algebraics reductius .....                     | 153        |
| §2: Representacions absolutament cuspidals .....         | 156        |
| §3: Factors locals ultramètrics .....                    | 157        |
| §4: La representació especial .....                      | 162        |
| §5: Factors locals en el cas arquimedià .....            | 162        |
| §6: El cas unitari .....                                 | 164        |
| Bibliografia .....                                       | 165        |

|                                                                  |            |
|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>PART III: Formes automorfes .....</b>                         | <b>167</b> |
| CAPÍTOL 13, per NÚRIA VILA                                       |            |
| <b>FORMES AUTOMORFES SOBRE GRUPS REDUCTIUS</b>                   |            |
| <b>REALS .....</b>                                               | <b>169</b> |
| §1: Definició de forma automorfa sobre grups reductius reals ... | 169        |
| §2: Formes modulars clàssiques “versus” formes automorfes ....   | 174        |
| Bibliografia .....                                               | 181        |
| CAPÍTOL 14, per PILAR BAYER                                      |            |
| <b>TEORIA ANALÍTICA DE FORMES AUTOMORFES</b>                     |            |
| <b>SOBRE GRUPS D’IDELES LINEALS .....</b>                        | <b>183</b> |
| §1: Grups d’ideles: el cas <b>GL</b> (2) .....                   | 183        |
| §2: Formes automorfes en dimensió 1 .....                        | 186        |
| §3: Formes automorfes en dimensió 2 .....                        | 187        |
| §4: Sèries de Poincaré .....                                     | 191        |
| §5: Sèries d’Eisenstein .....                                    | 192        |
| §6: Sèries d’Eisenstein i representacions .....                  | 197        |
| Bibliografia .....                                               | 199        |
| CAPÍTOL 15, per PILAR BAYER                                      |            |
| <b>TEORIA ANALÍTICA DE FORMES AUTOMORFES</b>                     |            |
| <b>SOBRE GRUPS D’IDELES QUATERNIÒNICS .....</b>                  | <b>201</b> |
| §1: Aritmètica d’àlgebres de quaternions .....                   | 201        |
| §2: Grups idèlics associats a àlgebres de quaternions .....      | 204        |
| §3: Teoria analítica global de les formes automorfes             |            |
| associades a àlgebres de quaternions .....                       | 210        |
| Bibliografia .....                                               | 213        |



## Contingut del segon volum

|                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>PART IV: Representacions de grups adèlics .....</b>             | <b>1</b>  |
| <br>                                                               |           |
| <b>CAPÍTOL 16, per JOSEP J. RAMON</b>                              |           |
| <b>REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS</b>                          |           |
| <b>SOBRE LES ADELES (I) .....</b>                                  | <b>3</b>  |
| §1: Repàs dels conceptes generals .....                            | 3         |
| §2: Productes tensorials restringits i àlgebra de Hecke global ... | 5         |
| §3: Producte tensorial restringit d'espais vectorials .....        | 6         |
| §4: El cas de grups reductius adèlics: àlgebra de Hecke global ..  | 8         |
| §5: El teorema de Gelfand, Graev i Piatetski-Shapiro .....         | 10        |
| §6: Prova d'un teorema sobre productes tensorials .....            | 14        |
| §7: Prova dels lemes tècnics .....                                 | 19        |
| Bibliografia .....                                                 | 23        |
| <br>                                                               |           |
| <b>CAPÍTOL 17, per BERNAT PLANS</b>                                |           |
| <b>REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS</b>                          |           |
| <b>SOBRE LES ADELES (II) .....</b>                                 | <b>25</b> |
| §1: Formes automorfes i representacions automorfes .....           | 26        |
| §2: Representacions automorfes i formes modulars .....             | 33        |
| Bibliografia .....                                                 | 37        |
| <br>                                                               |           |
| <b>CAPÍTOL 18, per MONTSERRAT VELA</b>                             |           |
| <b>TEOREMES DE MULTIPLICITAT 1 .....</b>                           | <b>39</b> |
| §1: Models de Whittaker .....                                      | 40        |
| §2: Teorema de multiplicitat 1 .....                               | 44        |
| §3: Teorema fort de multiplicitat 1 .....                          | 47        |
| Bibliografia .....                                                 | 51        |

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| PART V: <b>Funcions L</b> .....                                | 53 |
| CAPÍTOL 19, per FRANCESC BARS                                  |    |
| FUNCIONS L AUTOMORFES (I) .....                                | 55 |
| §1: Introducció i notació .....                                | 55 |
| §2: Motivacions per a la definició de la funció $L$ .....      | 56 |
| §3: Representacions irreductibles admissibles .....            | 59 |
| §4: Teoria de Jacquet-Langlands .....                          | 63 |
| §5: Funció $L$ i un petit càlcul .....                         | 67 |
| §6: El resultat $L(s, \pi_f) = L(s', f)$ .....                 | 70 |
| Bibliografia .....                                             | 73 |
| CAPÍTOL 20, per JAUME COLL                                     |    |
| FUNCIONS L AUTOMORFES (II) .....                               | 75 |
| §1: $L$ -grups .....                                           | 75 |
| §2: Subgrups parabòlics de ${}^L G$ .....                      | 76 |
| §3: Subgrups de Levi .....                                     | 77 |
| §4: Representacions i grups de Weil. Factors locals .....      | 78 |
| §5: Definició de $\Phi(G)$ .....                               | 78 |
| §6: Condicions dels conjunts $\Pi_\phi$ .....                  | 80 |
| §7: Factors locals .....                                       | 80 |
| §8: Problemes d'aixecament .....                               | 80 |
| Bibliografia .....                                             | 83 |
| CAPÍTOL 21, per PILAR BAYER                                    |    |
| LA CORRESPONDÈNCIA LOCAL DE                                    |    |
| JACQUET-LANGLANDS .....                                        | 85 |
| §1: La sèrie discreta per a $\mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$ ..... | 86 |
| §2: La sèrie discreta per a $\mathbf{GL}(2, F)$ .....          | 88 |
| §3: La representació de Weil .....                             | 88 |
| §4: La corresponència local de Jacquet-Langlands .....         | 93 |
| Bibliografia .....                                             | 95 |

## CAPÍTOL 22, per PILAR BAYER

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| LA CORRESPONDÈNCIA GLOBAL DE<br>JACQUET-LANGLANDS .....                                | 97  |
| §1: Representacions automorfes de $H^*(A_F)$ .....                                     | 97  |
| §2: Funció $L$ associada a una representació automorfa<br>en el cas quaterniònic ..... | 99  |
| §3: La correspondència global de Jacquet-Langlands .....                               | 100 |
| §4: Imatge de la correspondència global de Jacquet-Langlands .                         | 103 |
| Bibliografia .....                                                                     | 105 |

## CAPÍTOL 23, per ARTUR TRAVESA

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| GRUPS DE WEIL .....                               | 107 |
| §1: El transferidor .....                         | 107 |
| §2: Repàs de la teoria de cossos de classes ..... | 114 |
| §3: Definició del grup de Weil .....              | 117 |
| §4: Construcció de grups de Weil .....            | 124 |
| §5: Unicitat dels grups de Weil .....             | 127 |
| §6: Casos especials .....                         | 128 |
| Bibliografia .....                                | 135 |

## CAPÍTOL 24, per PILAR BAYER

|                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| LA FÓRMULA DE LES TRACES .....                                                            | 137 |
| §1: Una mica d'anàlisi .....                                                              | 138 |
| §2: La fórmula de les traces en dimensió 1 .....                                          | 140 |
| §3: El cas de quocient compacte .....                                                     | 141 |
| §4: El cas del grup lineal adèlic .....                                                   | 143 |
| §5: Càlcul de nuclis integrals .....                                                      | 145 |
| §6: Obtenció de la segona forma de la fórmula de les traces:<br>cas del grup lineal ..... | 147 |
| §7: El cas quaterniònic adèlic .....                                                      | 149 |
| §8: Aplicacions .....                                                                     | 150 |
| Bibliografia .....                                                                        | 153 |

## CAPÍTOL 25, per ARTUR TRAVESA

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| CANVIS DE BASE .....                                             | 155 |
| §1: Canvi de base per a $\mathbf{GL}(1)$ .....                   | 155 |
| §2: Quasicaràcters, funcions $L$ i factors $\varepsilon$ .....   | 159 |
| §3: Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en els $L$ -grups ..... | 167 |
| §4: Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas local .....   | 170 |
| §5: Canvi de base per a $\mathbf{GL}(2)$ en el cas global .....  | 173 |
| Bibliografia .....                                               | 175 |

## CAPÍTOL 26, per JOAN-CARLES LARIO

|                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| FILOSOFIA D'ARTIN. REPRESENTACIONS DE WEIL.<br>CONJECTURA DE LANGLANDS LOCAL PER A $\mathbf{GL}(2)$<br>..... | 177 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

## CAPÍTOL 27, per PILAR BAYER

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| CONJECTURES GLOBALS DE LANGLANDS .....         | 179 |
| §1: La llei de reciprocitat de Langlands ..... | 179 |
| §2: Funcions $L$ de motius .....               | 182 |
| §3: Conjectures globals de Langlands .....     | 184 |
| §4: Varietats de Shimura .....                 | 185 |
| Bibliografia .....                             | 189 |

## PART VI: Aplicacions ..... 191

## CAPÍTOL 28, per JORDI GUÀRDIA

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| TEOREMES DE CARAYOL (I) ..... | 193 |
|-------------------------------|-----|

## CAPÍTOL 29, per JOSEP GONZÀLEZ

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| TEOREMES DE CARAYOL (II) ..... | 195 |
|--------------------------------|-----|

## CAPÍTOL 30, per PILAR BAYER

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| EL TEOREMA DE DIAMOND-TAYLOR .....     | 197 |
| §1: El teorema de Diamond-Taylor ..... | 197 |
| §2: Consideracions preliminars .....   | 200 |
| §3: El cas $\mathbf{GL}(2)$ .....      | 203 |

|                                                         |      |
|---------------------------------------------------------|------|
| Contingut                                               | xiii |
| §4: El cas quaterniònic definit .....                   | 205  |
| §5: El cas quaterniònic indefinit .....                 | 207  |
| §6: La prova del teorema .....                          | 210  |
| Bibliografia .....                                      | 213  |
| CAPÍTOL 31, per PILAR BAYER                             |      |
| EL TEOREMA DE LANGLANDS .....                           | 215  |
| §1: Representacions de Galois de tipus tetraèdric ..... | 215  |
| Bibliografia .....                                      | 221  |
| CAPÍTOL 32, per TERESA CRESPO                           |      |
| EL TEOREMA DE TUNNELL .....                             | 223  |

# Introducció

Aquestes notes corresponen als apunts del seminari de Teoria de Nombres 1996-97. Amb el títol

## **Representacions automorfes de $GL(2)$ ,**

el curs es dedicà a l'estudi dels temes següents, distribuïts en sis parts:

I: REPRESENTACIONS DE GRUPS DE LIE COMPACTES

II: REPRESENTACIONS DE GRUPS REDUCTIUS

III: FORMES AUTOMORFES

IV: REPRESENTACIONS DE GRUPS ADÈLICS

V: FUNCIONS L

VI: APLICACIONS

El seminari fou programat per P. Bayer i les exposicions foren dutes a terme per diferents membres del Seminari de Teoria de Nombres (UB–UAB–UPC). Alguns capítols no han estat redactats; en aquest cas, s'inclouen el programa i la bibliografia recomanada.

# Representacions de grups compactes

JOSEP J. RAMON

SESSIÓ 1A. DEL DIA 16 D'OCTUBRE DE 1996

## §1. Mesures de Haar per a grups localment compactes.

**1.1. Definició.** Sigui  $G$  un grup localment compacte; existeix una mesura boreliana, regular (i.e., la mesura d'un subconjunt mesurable és aproximable per la dels seus subconjunts compactes) i invariant per translacions a l'esquerra. Aquesta mesura és única llevat de constants i s'anomena mesura de Haar (esquerra). (Naturalment, quan parlem de mesures de Haar, descartem el cas trivial.)

Descrivim, a continuació, les propietats bàsiques de les mesures de Haar.

**1.2.** També existeixen mesures de Haar dretes, ja que aquestes són mesures invariants a l'esquerra del grup oposat  $G^{op}$ . Més concretament, si  $d\mu(x)$  és mesura de Haar a l'esquerra, aleshores  $d\mu(x^{-1})$  ho és a la dreta; per  $d\mu(x^{-1})$  entenem la mesura  $d\nu$  tal que a tota funció integrable  $f$  li assigna

$$\int_G f d\nu = \int_G f(x^{-1}) d\mu(x).$$

**1.3.** Donat un obert  $U$  de  $G$ , és fàcil veure que la seva mesura de Haar és estrictament positiva: sabem, per regularitat interior, que hi ha un compacte

$K$  amb  $\mu(K) > 0$ . Aleshores,

$$K \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq r} g_i U,$$

amb la qual cosa

$$\mu(K) \geq \sum_{i \leq r} \mu(g_i U).$$

Naturalment, de la invariància s'obté que

$$0 < \mu(K) \leq r \mu(U),$$

amb la qual cosa el resultat cercat queda provat.

**1.4.** La mesura de Haar de tot el grup  $G$  és finita si, i només si, el grup és compacte. Quan parlem de grups compactes, entendrem per mesura de Haar una mesura de Haar normalitzada; és a dir, tal que la mesura del total és 1.

**1.5.** La prova de von Neumann d'existència de mesura de Haar per a grups compactes, tot i ser menys general que la del propi Haar, posa de relleu que en aquest cas les dues coincideixen (cf. [Po 46]). En altres hipòtesis, com en el cas d'un grup reductiu real, també tenim aquesta simetria. Naturalment, aquest fenomen també succeeix en tots els grups localment compactes i abelians, i els grups reductius són també exemples interessants de grups no abelians amb mesura de Haar biinvariant.

**1.6.** Donem alguns exemples interessants de mesures de Haar.

- Si  $G$  és un grup discret, aleshores tot punt és un obert i, per tant, ha de tenir mesura positiva, per l'apartat **1.3**. En ser invariant per translacions, tot punt ha de tenir la mateixa mesura  $\lambda$ . En el cas dels grups finits, fixarem  $\lambda = \frac{1}{\text{card}(G)}$ . Si prenem tots els resultats d'aquesta exposició on es fa servir la integral de Haar en el cas particular dels grups finits, tindrem tots els resultats del llibre de Serre sobre representacions lineals de grups finits.

- Si  $G = \mathbb{R}^n$ , aleshores la mesura de Haar és donada pel diferencial invariant  $dx_1 \dots dx_n$ . Per pas al quocient, el diferencial invariant ens dona la mesura de Haar de  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ .



• Si  $G = U(n)$  denota el grup unitari, la mesura de Haar va ésser estudiada per Hurwitz, qui es plantejà per primera vegada en la història aquest tipus de qüestions (molt abans que Haar).

## §2. Representacions de grups localment compactes

Sigui  $G$  un grup de Lie. Aleshores,  $G$  admet una única estructura de varietat analítica real tal que l'aplicació exponencial és una funció analítica real (i per tant, biholomorfisme en un entorn de 1).

**2.1. Definició.** Sigui  $G$  un grup localment compacte i  $H$  un espai de Hilbert sobre el cos  $\mathbb{C}$ . Una representació de  $G$  en  $H$  és un morfisme continu de grups  $G \rightarrow \mathbf{GL}(H)$ . També direm que  $H$  és un  $G$ -mòdul. Per submòdul entendrem  $G$ -submòdul tancat.

**2.2. Definició.** Una representació de  $G$  en  $H$  és (topològicament) irreductible si, i només si,  $H$  no té subespais tancats propis  $G$ -estables (és a dir, si no conté  $G$ -submòduls propis).

**2.3. Suma directa (hilbertiana) d'espais de Hilbert.** Sigui  $(H_i)$  una família d'espais de Hilbert. Definim la suma directa hilbertiana  $H$  dels  $H_i$  com el subespai vectorial de  $\prod H_i$  en què els elements s'expressen en la forma  $\sum v_i$  i són tals que

$$\sum \|v_i\|^2 < \infty$$

amb la mètrica natural. De manera anàloga definim suma directa (hilbertiana) de representacions  $\rho_i$ .

**2.4. Observació.**  $\mathbf{GL}(H)$  és un obert de  $L(H, H)$ , i tal és la topologia que considerem en ell (De fet, és un “grup de Lie hilbertià” en el sentit de [La 95]).

La mesura de Haar en  $G$  indueix una “integració invariant vectorial” en  $H$ ; per a més informació sobre integració vectorial, vegeu [La 93].

### §3. El cas dels grups de Lie

Sigui  $G$  un grup de Lie. Anem a il·lustrar en aquest cas propietats generals de la integral de Haar i de les representacions de grups de Lie.

**3.1. Diferencials invariants i mesura de Haar.** En [We 46], figura aquesta secció amb tots els detalls.

Sigui  $G$  un grup de Lie connex, de dimensió  $n$ ; aleshores, tenim un isomorfisme entre l'àlgebra exterior de l'espai tangent a  $G$  en  $1$  i la subàlgebra graduada dels diferencials invariants a l'esquerra. A més, sempre existeix una forma diferencial  $\omega \in \Omega^n(G)$  no degenerada i invariant per translacions a l'esquerra, i, per tant, un element de volum invariant a l'esquerra, que ens dona la mesura de Haar corresponent.

Si el grup és compacte, en conseqüència amb el teorema de von Neumann ja donat aquí, existeix una forma diferencial  $\omega \in \Omega^n(G)$  no degenerada i invariant (tant a esquerra com a dreta), la qual es pot obtenir directament mitjançant el “truc del promig” o bé prenent l'element de volum associat a una mètrica  $G$ -invariant (per a més informació, en el cas dels grups de Lie, vegeu [Pr 77]). En aquest cas, també podem explicitar l'anell de cohomologia  $H^\bullet(G, \mathbb{R})$  en termes de diferencials invariants per translació.

**3.2. Teorema.** (Cartan) *Sigui  $G$  un grup de Lie compacte i connex. Es té un isomorfisme entre l'anell de cohomologia de  $G$  amb coeficients a  $\mathbb{R}$  i la subàlgebra (via l'isomorfisme de De Rham, és clar) de diferencials invariants per translacions (a esquerra i a dreta alhora).*

**DEMOSTRACIÓ.** Es deixa com a exercici al lector. Figura amb tots els detalls a [We 46], a l'últim capítol del llibre.  $\square$

**3.3. Nota.** Aquest teorema ens permet obtenir fites superiors per als nombres de Betti d'un grup de Lie compacte  $G$ , i també una redemostració de la igualtat de les mesures de Haar esquerra i dreta sota aquestes hipòtesis.

**3.4. Nota.** El teorema de Cartan citat aquí també permet interpretar l'anell de cohomologia de De Rham de  $G$  com l'àlgebra de formes diferencials invariants per translacions, en el cas en què  $G$  sigui un grup de Lie compacte.

**3.5. Sobre la definició de representació (en grups de Lie).** En el cas diferenciable, ens podem preguntar si una representació (contínua) de grups de Lie és necessàriament  $C^\infty$ . L'anàlisi del cas d'una representació  $\mathbb{R} \rightarrow H$  ens convenç d'aquesta possibilitat, i de fet tenim el resultat següent.

**3.6. Teorema.**

- a) *Siguin  $G$  i  $G'$  dos grups de Lie. Aleshores, tot morfisme de grups continu de  $G$  en  $G'$  és  $C^\infty$ .*
- b) *Si  $H$  és un espai de Hilbert i  $G$  actua sobre  $H$  de manera contínua, aleshores la representació és  $C^\infty$ .*

DEMOSTRACIÓ. a) La prova d'aquest apartat es redueix al cas en que el morfisme és  $\mathbb{R} \rightarrow H$ . En aquest cas, és un exercici senzill d'Anàlisi. La reducció al cas esmentat es pot trobar en [We 46].

b) Definim la funció següent:

$$(*) \quad S_U(h) = \int_{Uh} \rho(g) dg.$$

És fàcil veure, usant que  $\mathbf{GL}(H)$  és un obert en  $L(H, H)$ , que existeix un entorn obert  $U$  de 1 tal que  $S(1) \in \mathbf{GL}(H)$ . Podem suposar, a més, que  $\mu(U) < \infty$ , simplement considerant  $U$  com un obert d'adherència compacta. Fixem un tal  $U$ ; la funció  $S(h)$  satisfà la igualtat

$$S(h_1 h_2) = S(h_1) \rho(h_2).$$

És fàcil veure que  $S$  és funció contínua de  $h$ . La fórmula anterior ens dona que  $S$  és invertible. El fet que  $\rho$  és contínua implica que  $S \in C^1$ ; això es dedueix en aïllar de la igualtat i aplicar el teorema fonamental del càlcul a la integral iterada corresponent (previ canvi de variable amb el cub unitat  $I^n$ ). En aplicant recursivament aquesta estratègia, obtenim que  $\rho \in C^\infty$ .  $\square$

**3.7. Nota.** (Cf. [Po 46]) Si  $G$  és un grup topològic i alhora una varietat topològica, aleshores existeix una estructura diferenciable en  $G$  que fa que  $G$  sigui un grup de Lie. De fet, existeix una única estructura analítica real tal que  $G$  és un grup de Lie analític; l'aplicació exponencial és analítica

respecte d'aquesta, i els morfismes continus de grups de Lie són morfismes analítics (reals).

Per tant, en el teorema anterior, podem afegir que els morfismes en qüestió són necessàriament analítics, amb les estructures analítiques corresponents (en el cas b), la representació també és analítica).

## §4. Grups compactes

**4.1. Observació.** Un dels problemes principals en la teoria de representacions és el problema de descompondre representacions d'un grup  $G$  en components al més senzilles possible. Moltes àrees clàssiques de l'Anàlisi, la teoria de funcions i la física matemàtica són casos especials de la teoria general de descomposició de representacions. Podem citar com a exemples:

- La teoria espectral d'operadors unitaris (descomposició de representacions unitàries del grup  $\mathbb{Z}$ ).
- La teoria de reducció de matrius a forma normal (descomposició de representacions de dimensió finita del grup  $\mathbb{Z}$ ).
- La teoria de sèries de Fourier (descomposició de la representació regular del grup  $\mathbb{T}$ ).
- Les transformades de Fourier (descomposició de la representació regular del grup  $\mathbb{R}$ ).
- La llei d'addició de moments en mecànica quàntica (descomposició del producte tensorial de dues representacions irreductibles del grup  $\mathbf{SO}(3)$ ).

En aquesta secció ens proposem estudiar a fons les representacions de grups topològics compactes i la seva descomposició en peces irreductibles (que són “al més senzilles possible”).

Siguin  $G$  un grup compacte i  $\rho$  una representació lineal de  $G$  en un espai de Hilbert  $H$ . En tots els teoremes que vindran, ens serà de gran utilitat el conegut “*truc del promig*”, del qual aquí n'oferim un exemple ben significatiu.

Sigui  $T$  un operador lineal (continu) de  $H$ . Aleshores, l'operador lineal

$$T_G(v) = \int_G T(g)v \, dg$$

és continu i  $G$ -invariant; és a dir,  $T\rho(g) = T$ .

El mateix truc ens mostra que (fixada una representació de  $G$  en  $H$ ) existeix un producte escalar  $G$ -invariant en  $H$  i que indueix una mètrica equivalent. En altres paraules:

**4.2. Corol·lari.** *Si  $G$  és compacte, tota representació és equivalent a una representació unitària.*

**4.3. Observació.** Si  $H$  és un espai de Hilbert i  $\mathbf{U}(E)$  és compacte, no és difícil deduir-ne que  $H$  ha de ser localment compacte i, per un resultat conegut de l'anàlisi funcional, de dimensió finita.

**4.4. Nota.** (Sobre la representació contragredient) Sigui  $\rho$  una representació d'un grup topològic  $G$  en un espai de Hilbert, o bé en un espai vectorial de dimensió finita,  $H$ . Aleshores, es pot obtenir de forma natural una representació de  $G$  en l'espai dual  $H^*$  de la manera següent:

$$\hat{\rho}(g) = \rho(g^{-1})^*.$$

És fàcil veure que si  $(\cdot|\cdot)$  denota l'aplicació avaluació

$$H^* \times H \rightarrow \mathbb{C},$$

aleshores

$$(\omega|\rho(g)x) = (\hat{\rho}(g)\omega|x).$$

A aquesta representació en  $H^*$  se la coneix amb el nom de representació dual o contragredient.

## §5. Lema de Schur i relacions d'ortogonalitat

**5.1. Teorema.** *Siguin  $G$  compacte i  $W$  un  $G$ -submòdul (tancat) de  $H$ . Aleshores, existeix un  $G$ -mòdul (tancat) complementari a  $W$ .*

DEMOSTRACIÓ. Gràcies al llenguatge ja introduït, la prova és ben ràpida: prenem  $W_0$  com l'ortogonal a  $W$  per a la mètrica  $\langle, \rangle_G$  definida abans. La resta funciona pel teorema de la projecció en espais de Hilbert.  $\square$

**5.2. Observació.** L'enunciat del teorema (i la mateixa prova) valen per a tota representació unitària d'un grup topològic  $G$ .

**5.3. Teorema.** *Siguin  $G$  un grup compacte i  $\rho$  una representació irreductible de  $G$  en un espai de Hilbert  $H$ . Aleshores,  $H$  és un espai vectorial de dimensió finita.*

DEMOSTRACIÓ. Ho veurem de dues maneres; una fa anar només anàlisi funcional elemental, i l'altra usa el teorema de Peter-Weyl. De fet, inclourem una secció en què es demostrarà amb altres tècniques un resultat més general.

*Mètode 1:* (Prova que fa servir el teorema de Peter-Weyl)

**5.4. Proposició.** *Sigui  $G$  un grup topològic compacte i considerem l'acció de  $G$  en  $C^0(G; \mathbb{C})$  donada per  $(g^* f)(x) = f(g^{-1}x)$ . Aleshores, el subespai  $R(G; \mathbb{C}) = \{f \in C^0(G; \mathbb{C}) : \dim \langle (g^* f)_{g \in G} \rangle < \infty\}$  és dens en  $C^0(G; \mathbb{C})$ .*

DEMOSTRACIÓ. És conseqüència directa del teorema de Peter-Weyl, que serà demostrat en una secció posterior.  $\square$

**5.5. Definició.** Siguin  $G$  un grup compacte i  $A$  un  $G$ -mòdul. Definim el producte de convolució

$$C^0(G; \mathbb{C}) \times A \rightarrow A$$

per  $f * a := \int_G f(g)(g.a)$ .

Sigui  $a \in H$  un vector no nul, i considerem  $f \in R(G; \mathbb{R})$ . Aleshores,  $G(f*a)$  engendra un subespai de dimensió finita, doncs  $g \cdot (f*a) = (g^* f) \cdot a$ . Només cal veure que  $f*a$  és no nul per a una certa  $f \in R(G; \mathbb{R})$ ; això és equivalent a veure que existeix  $f \in C^0(G; \mathbb{R})$  tal que  $f*a \neq 0$ . Aquesta última afirmació és certa, ja que existeixen  $f_n \in C^0(G; \mathbb{R})$  tals que  $f_n*a \rightarrow a$ . Aquestes funcions són construïdes a la prova del teorema de Peter-Weyl.

*Mètode 2:* Demostrem una proposició més forta fent servir, no obstant, menys eines que a la prova anterior. Només ens seran necessaris els teoremes clàssics de representació de formes lineals i bilineals en espais de Hilbert.

**5.6. Proposició.** *Siguin  $G$  un grup compacte i  $(H, T)$  un  $G$ -mòdul irreductible i unitari. Notem  $t_{\xi, \eta}(g) = \langle \xi, T(g)\eta \rangle$  (aquestes funcions es coneixen amb el nom d'elements matricials de la representació  $T$ ). Aleshores,  $H$  és un espai vectorial de dimensió finita i els seus elements matricials satisfan les condicions*

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g) \overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)} dg = (\dim H)^{-1} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \overline{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle}.$$

*A més, si  $(H, T)$ ,  $(H', T')$  són dues representacions unitàries i irreductibles de  $G$ , es satisfan les relacions d'ortogonalitat següents per als elements matricials respectius de les representacions  $T$ ,  $T'$ ,  $t$  i  $t'$ :*

$$\int_G t'_{\xi_1, \eta_1}(g) \overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)} dg = 0.$$

**DEMOSTRACIÓ.** El membre esquerre de la igualtat de l'enunciat és lineal i continu en  $\xi_1$ . Pel teorema de representació de Riesz, és, doncs, de la forma  $\langle \xi_1, \zeta \rangle$ , on  $\zeta$  és un cert vector en  $H$  que depèn contínuament de  $\xi_2$ ,  $\eta_1$  i  $\eta_2$ ; el vector  $\zeta$  depèn linealment de  $\xi_2$  i, per tant, podem escriure  $\zeta = A\xi_2$ , on  $A$  és un cert operador en  $H$  que depèn de  $\eta_1$  i  $\eta_2$ . La igualtat

$$t_{T(g)\xi, \eta}(g_1) = t_{\xi, \eta}(g_1 g)$$

mostra que l'operador  $A$  satisfà la propietat

$$\langle T(g)\xi_1, AT(g)\xi_2 \rangle = \langle \xi_1, A\xi_2 \rangle$$

per a tot  $g \in G$ . Tenim, doncs, que  $A$  és un operador (hermític)  $G$ -equivariant. Per tant, és una homotècia  $A = \lambda 1$ ; per demostrar aquesta afirmació, cf. [Ki76, p.113, Th.1].

Per un raonament anàleg, veiem que l'escalar  $\lambda$  depèn de  $\eta_1$  i  $\eta_2$  de la manera següent:  $\lambda = c \overline{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle}$ . Hem demostrat, doncs, la igualtat

$$\int_G t_{\xi_1, \eta_1}(g) \overline{t_{\xi_2, \eta_2}(g)} dg = c \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \overline{\langle \eta_1, \eta_2 \rangle},$$

on la constant  $c$  només depèn de la representació  $T$ . Ara, sigui  $e_1, \dots, e_n$  una col·lecció ortonormal arbitrària finita de vectors de  $H$ . Com a conseqüència directa del teorema de Pitàgores, s'obté

$$(**) \quad \sum_{i=1}^n | \langle T(g)\xi, e_i \rangle |^2 \leq \|T(g)\xi\|^2 = \|\xi\|^2.$$

D'aquí, deduím que, per a tot  $g \in G$ ,

$$\sum_{i=1}^n |t_{\xi, e_i}(g)|^2 \leq \|\xi\|^2.$$

En integrar aquesta desigualtat sobre el grup  $G$  i usar (\*), obtenim la desigualtat  $c n \|\xi\|^2 \leq \|\xi\|^2$ , és a dir,  $c \leq \frac{1}{n}$ . D'aquí es dedueix que  $H$  és de dimensió finita. Si  $n$  és la dimensió de  $H$  i  $e_1, \dots, e_n$  és una base ortonormal de  $H$ , la desigualtat (\*\*) és en aquest cas una igualtat, i raonant igual que abans obtenim finalment que  $c = \frac{1}{n}$ .

La segona afirmació de la proposició és molt semblant a la que acabem de veure, i es deixa com a exercici al lector.  $\square$

**5.7. Teorema.** (Lema de Schur) *Siguin  $H_1, H_2$   $G$ -mòduls irreductibles. Aleshores:*

- a) *Tot operador  $T : H_1 \rightarrow H_2$  que sigui  $G$ -equivariant és o bé 0 o bé isomorfisme.*
- b) *Tot operador  $T : H \rightarrow H$  que sigui  $G$ -equivariant és una homotècia.*
- c)  *$\dim \text{Hom}_G(H_1, H_2) = 1$  si són  $G$ -isomorfs, i 0 en cas contrari.*

DEMOSTRACIÓ. Donat que  $G$  és compacte i  $H_i$  són irreductibles, són de dimensió finita. La resta és un simple exercici d'àlgebra lineal.  $\square$

## §6. Caràcters

**6.1. Definició.** Siguí  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  una representació en un espai vectorial de dimensió finita. Definim el caràcter de la representació  $\rho$  com la funció  $\chi_\rho(s) = \text{Tr } \rho(s)$ .



Les propietats bàsiques dels caràcters són resumides en la següent

**6.2. Proposició.** *Siguin  $V, W$   $G$ -mòduls de dimensió finita.*

- i) Si  $G$  és un grup de Lie (compacte), aleshores  $\chi_V$  és una funció  $C^\infty$ .*
- ii) Si  $V$  i  $W$  són isomorfs, aleshores  $\chi_V = \chi_W$ .*
- iii)  $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \chi_W$ .*

**6.3. Relacions d'ortogonalitat.** Siguin ara  $(V, \rho), (W, \sigma)$   $G$ -mòduls irreductibles i unitaris i  $A$  un operador lineal, no necessàriament  $G$ -equivariant. Aleshores,  $A$  és equivariant si, i només si,  $A = \rho(x)^{-1} A \sigma(x)$  per a tot  $x \in G$ . D'altra banda,  $A_G = \int_G \sigma(x)^{-1} A \rho(x) dx$  sí que és  $G$ -equivariant (una altra versió del truc del promig), i en tenir en compte aquesta observació i el lema de Schur podem resoldre el següent resultat.

**6.4. Teorema.** (Relacions d'ortogonalitat) *Siguin  $\rho$  i  $\sigma$  dues representacions en  $V$  i  $W$  no equivalents, irreductibles i unitàries d'un grup  $G$ ,  $\rho(g) = (\rho_{ij}(g))$  i  $\sigma(g) = (\sigma_{kl}(g))$ , de dimensions  $n$  i  $m$  respectivament. Siguin  $\chi$  i  $\chi'$  els caràcters de les representacions de  $\rho$  i  $\sigma$  respectivament. Aleshores, per a tots els índexs  $i, j, k, l$ , es té que*

$$\int \rho_{ij}(x) \bar{\sigma}_{kl}(x) = 0, \quad \int \chi(x) \bar{\chi}'(x) = 0.$$

**DEMOSTRACIÓ (Esbós).** Considerem la matriu  $A = \int \sigma(x^{-1}) E_{pq} \rho(x)$  de  $\text{Hom}(V, W)$ , on  $E_{pq}$  és una matriu  $m \times n$  amb un 1 a l'entrada  $(p, q)$  i zero a les altres.

Sigui  $\rho$  una representació irreductible unitària de dimensió  $n$  d'un grup  $G$ ,  $\rho(g) = (\rho_{ij}(g))$ , i sigui  $\chi$  el seu caràcter. Llavors:

$$\int \rho_{ij}(x) \bar{\rho}_{ij}(x) = \frac{1}{n},$$

i quan  $i \neq k$  o  $j \neq l$  es té:

$$\int \rho_{ij}(x) \bar{\rho}_{kl}(x) = 0.$$

Finalment,

$$\int \chi(x) \bar{\chi}(x) = 1.$$

Aquesta última afirmació és conseqüència directa de la proposició anterior.  
□

**6.5. Observació.** Les relacions d'ortogonalitat ens donen la caracterització següent per a les representacions irreductibles de grups compactes.

Una representació  $\rho$  és irreductible si, i només si, el seu caràcter  $\chi$  satisfà  $\int_G \chi(x) \bar{\chi}(x) = 1$  (per què?).

**6.6. Observació.** Una conclusió remarcable de les relacions d'ortogonalitat és que si  $\rho, \sigma$  són dues representacions irreductibles de  $G$  (grup compacte) amb el mateix caràcter, aleshores  $\rho$  i  $\sigma$  són isomorfes.

**6.7. Observació.** Es pot veure que si  $V$  és un  $G$ -mòdul de dimensió finita i  $\chi_V$  és el seu caràcter, aleshores

$$\int \chi_V(g) dg = \dim V^G.$$

**6.8. Observació.** En usar el conegut isomorfisme canònic  $\text{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ , es veu fàcilment que si  $V$  i  $W$  són dos  $G$ -mòduls de dimensió finita, aleshores

$$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \int_G \bar{\chi}_V(g) \chi_W(g) dg = \dim \text{Hom}_G(V, W).$$

(Aquesta afirmació demostraria automàticament el lema de Schur.)

**6.9. Observació.** Es deixa com a (bonic) exercici per al lector que si  $G_1$  i  $G_2$  són dos grups compactes, aleshores l'aplicació següent entre conjunts és una bijecció:

$$\{G_1\text{-mòduls irred.}\} \times \{G_2\text{-mòduls irred.}\} \rightarrow \{G_1 \times G_2\text{-mòduls irred.}\}$$

donada per

$$(W_1, \rho_1), (W_2, \rho_2) \mapsto (W_1 \otimes W_2, \rho_1 \otimes \rho_2),$$

on cal entendre el  $G_1 \times G_2$ -mòdul  $W_1 \otimes W_2$  amb l'acció natural

$$(\rho_1 \otimes \rho_2)(s, t)(u_1 \otimes u_2) = \rho_1(s)u_1 \otimes \rho_2(t)u_2.$$

## §7. El teorema de Peter-Weyl

Sigui  $G$  un grup compacte. Podem considerar l'espai de funcions  $L^2(G)$  i cercar un anàleg a les sèries de Fourier en el sentit d'un sistema ortonormal complet de  $L^2(G)$  que provingui de l'estructura de grup de  $G$ . Les relacions d'ortogonalitat ja ens donen que la família  $\Delta$  dels elements matricials de les representacions irreductibles (de dimensió finita) de  $G$  formen, convenientment normalitzades, un sistema ortonormal. Ens podríem preguntar si aquest sistema ortonormal és de fet un sistema ortonormal complet en  $L^2(G)$ . Això és una part del teorema de Peter-Weyl.

Primer haurem de parlar sobre equacions integrals en  $G$ . Si  $G$  és un grup de Lie, la teoria de Hodge i els raonaments de pas als espais de Sobolev ens proporcionen un marc adequat on aplicar els teoremes bàsics de l'Anàlisi Funcional, però aquí hauríem de demostrar cadascuna de les afirmacions que fem. Ens limitarem a enunciar la majoria d'elles en la secció següent. Per a una visió autocontinguda sobre les equacions integrals en un grup, vegeu [Po46], que és la referència que seguirem més i de la qual donarem un esboç de la prova. De tota manera, en [Pi73] l'esmentat teorema es demostra primer en una versió més feble (tal com l'acabem d'enunciar) i després s'estableix un pont per demostrar la versió més forta.

**7.1. Equacions integrals en un grup compacte.** Sigui  $k$  una funció contínua real de dues variables definida a  $G$  i que satisfà la condició de simetria  $k(x, y) = k(y, x)$ . Considerem l'equació integral

$$\phi(x) = \lambda \int k(x, y) \phi(y) dy.$$

La funció  $k(x, y)$  s'anomena el nucli d'aquesta equació. Si  $\lambda$  i  $\phi$  satisfan l'equació anterior i  $\phi \neq 0$ , llavors es diu que  $\phi$  és un vector propi del nucli  $k(x, y)$  de valor propi  $\lambda$ . D'una manera semblant a què succeeix amb les matrius simètriques tenim aquest

**7.2. Teorema.** *Sigui el nucli  $k(x, y)$  tal que la forma quadràtica*

$$K(f, f) = \int \int k(x, y) f(x) f(y) dx dy$$

*pren un valor positiu per a alguna funció real  $f$  definida en  $G$ . Llavors el funcional  $K$  assoleix el seu valor màxim  $\rho > 0$  entre les funcions  $f$  que*

satisfan  $(f, f) = 1$  en alguna funció  $\phi$  que és un vector propi del nucli  $k$  de valor propi  $1/\rho$

**7.3. Teorema.** *Segui  $k(x, y)$  un nucli simètric definit a  $G$ . Si la forma quadràtica  $K(f, f)$  pren un valor positiu per a alguna funció real  $f$  definida en  $G$ , sigui  $\phi_1$  una funció pròpia extremal del nucli  $k(x, y)$  (en el sentit del teorema anterior) amb valor propi  $\lambda_1$ . Si el nucli simètric*

$$k_1(x, y) = k(x, y) - \frac{\phi_1(x)\phi_1(y)}{\lambda_1}$$

és tal que la forma quadràtica  $K_1(f, f)$  encara pren valors positius (per a alguna funció  $f$ ), agafem alguna funció extremal  $\phi_2$  de valor propi  $\lambda_2$  i definim el nucli

$$k_2(x, y) = k_1(x, y) - \frac{\phi_2(x)\phi_2(y)}{\lambda_2}.$$

Continuem aquest procés mentre sigui possible, de manera que obtenim una successió finita o infinita de funcions  $\phi_1, \phi_2, \dots$  i una successió de nombres positius  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ . En aplicar el mateix procés al nucli  $-k(x, y)$  obtenim unes altres successions finites o infinites  $\phi_{-1}, \phi_{-2}, \dots$  i  $\lambda_{-1}, \lambda_{-2}, \dots$ . Aleshores les successions  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  i  $-\lambda_{-1}, -\lambda_{-2}, \dots$  no són decreixents, i si alguna d'elles és infinita, llavors els seus membres tendeixen a  $\infty$ . Finalment, si posem

$$k_{mn}(x, y) = k(x, y) - \sum_{i=1}^m \frac{\phi_{-i}(x)\phi_{-i}(y)}{\lambda_{-i}} - \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i(x)\phi_i(y)}{\lambda_i}$$

i

$$K_{mn}(g, h) = \int \int k_{mn}(x, y)g(x)h(y) dx dy,$$

aleshores  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} K_{mn}(g, h) = 0$ .

**7.4. Corol·lari.** *Seguin  $k(x, y)$  un nucli simètric i  $g$  una funció definida a  $G$ . Llavors la funció  $f(x) = \int k(x, y)g(y)dy$  es desenvolupa en sèrie uniformement i absolutament convergent*

$$f(x) = \sum_i \psi_i(x),$$

on  $\psi_1, \psi_2, \dots$  són funcions pròpies del nucli  $k(x, y)$ .

## §8. Enunciat final i prova del teorema de Peter-Weyl

Un conjunt  $\Delta$  de funcions definides a  $G$  s'anomena uniformement complet si tota funció  $f$  definida a  $G$  es pot aproximar arbitràriament per combinacions lineals d'elements de  $\Delta$ . Ara que tenim les eines d'equacions integrals, ja podem resoldre aquest

**8.1. Teorema.** (Peter-Weyl) *Donat un grup compacte  $G$ , prenem una representació unitària en cada classe de representacions irreductibles de  $G$ , i indiquem per  $\Omega$  el conjunt de les representacions així obtingudes. Indiquem per  $\Delta$  el conjunt de totes les funcions  $\rho_{ij}$  que s'obtenen de les representacions  $\rho \in \Omega$ ,  $\rho(x) = (\rho_{ij}(x))$ . Llavors el conjunt  $\Delta$  és uniformement complet.*

**DEMOSTRACIÓ (Esbós).** Sigui  $f$  una funció real contínua definida a  $G$ . Com que  $G$  és compacte,  $f$  és uniformement contínua; és a dir, per a tot  $\epsilon$  existeix un entorn  $U$  de la identitat  $e$  tal que si  $xy^{-1} \in U$ , llavors  $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ . Ara, fixem un  $\epsilon$  i prenem un  $U$  com el d'abans, però tal que  $U = U^{-1}$  (per exemple, canviant  $U$  per  $U \cap U^{-1}$ ). Sigui  $q$  una funció de  $G$  tal que  $q|_V = 1$ , on  $V \subset U$  és un entorn de la identitat, i tal que el suport  $\text{supp}(q) \subset U$ . Definim  $k'(z) = \alpha(q(z) + q(z^{-1}))$ , on  $\alpha$  és un nombre positiu tal que  $\int k'(z) dz = 1$ . Ara, el nucli  $k(x, y) = k'(x^{-1}y)$  és simètric i li podem aplicar el corol·lari anterior. Finalment, observem que  $f'(x) = \int k'(x^{-1}y) f(y) dy$  s'assembla molt a  $f$ .

Un cop fet això, es pot comprovar que per a qualsevol  $\lambda$  valor propi del nucli  $k(x, y)$ , el seu espai propi és invariant per translació i a més és de dimensió finita (per què?). Per tant, ens dóna una representació finita del grup  $G$ : si  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$  són una base de l'espai propi de valor propi  $\lambda$ , llavors  $\phi_i(gx) = \sum_j \rho_{ij}(g) \phi_j(x)$  per a tot  $x$  i  $g$  de  $G$ , essent les  $\rho_{ij}$  contínues. En particular,

$$\phi_i(g) = \sum_j \rho_{ij}(g) \phi_j(e),$$

on  $e$  és l'element identitat de  $G$ , i aleshores  $\phi_j(e)$  són constants. Ara, podem descompondre la representació  $\rho$  en representacions irreductibles (que es poden prendre unitàries), i amb això el teorema queda demostrat.  $\square$

**8.2. Nota.** En Anàlisi de Fourier és habitual fabricar famílies de funcions que “s’aproximen a la identitat tant com vulguem”. Aquestes es coneixen amb el nom de “successions de Dirac” o “aproximacions a la identitat”. Aquesta successió de funcions es pot construir fàcilment fent servir el conegut lema d’Urysohn.

Observem que els resultats de la secció anterior ja proven que els elements de  $\Delta$  són ortogonals entre si.

**8.3. Corol·lari.** *El subconjunt de  $L^2(G)$  format per  $(\sqrt{n_\rho}\rho_{ij})_{\rho \in \Delta}$  és un sistema ortonormal complet.*

En usar el teorema de Peter-Weyl és fàcil demostrar aquest

**8.4. Teorema.** *Siguin  $G$  un grup topològic compacte i  $g \in G$  un element diferent de 1. Aleshores, existeix una representació irreductible  $\rho$  de  $G$  tal que  $\rho(g) \neq 1$ .*

D’aquest teorema es dedueix (novament fent servir la compacitat) que tot grup de Lie compacte admet una representació fidel (és a dir, és un grup de matrius). Vegem-ho amb tot detall.

**8.5. Proposició.** *Sigui  $G$  un grup de Lie compacte. Aleshores,  $G$  és un grup de matrius.*

**DEMOSTRACIÓ.** Sigui  $\rho : G \hookrightarrow \mathbf{GL}(n)$  una representació fidel de  $G$ . Comprovem que  $\rho$  és una immersió (*embedding*) diferenciable.

El fet que  $\rho$  és un morfisme de grups ens dóna que el rang de  $d\rho_g$  és constant per a tot  $g \in G$ . Aleshores, l’aplicació diferencial és injectiva per a tot  $g \in G$ , ja que, si no ho fos, homeomorfisme. D’altra banda, és un fet conegut en geometria diferencial que, si tenim una aplicació diferenciable  $f : M \rightarrow N$  entre dues varietats diferenciables, que satisfà

- a)  $f$  és injectiva;
- b)  $df_p$  és injectiva per a tot  $p \in M$ ;
- c)  $M$  és compacta;

aleshores,  $f$  és automàticament una immersió diferenciable.  $\square$

Una altra conseqüència directa del teorema de Peter-Weyl (o, millor dit, del corol·lari) és la següent.

Sigui  $f \in L^2(G)$ ; aleshores, la norma  $L^2$  de  $f$  es pot calcular mitjançant la identitat

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \sum_{\rho} \left( \sum_{i,j} |c_{ij}^{\rho}|^2 \right),$$

on  $c_{ij}^{\rho} = \langle f, \sqrt{n_{\rho}} \rho_{ij} \rangle$ .

Per acabar, recordem que la darrera afirmació del teorema de Peter-Weyl és falsa per a grups no compactes (per exemple, per als grups recoberts pel grup de Heisenberg  $H_n$ ).

Donem l'anàleg (en cert sentit) del teorema de Peter-Weyl per a grups localment compactes en general.

**8.6. Teorema.** (Gelfand-Raikov) *Sigui  $G$  un grup localment compacte. Per a tot  $x$  en  $G$ ,  $x \neq 1$ , existeix una representació contínua  $\gamma$  en un espai de Hilbert  $H$  tal que  $\gamma(x) \neq 1$ .*

**8.7. Nota.** Per a una prova d'aquest resultat i generalitzacions conceptualment més sofisticades sobre grups localment compactes, vegeu [Ki 76, p. 146].

## §9. La representació regular

Sigui  $G$  un grup finit. Aleshores, es té associada a  $G$  l'àlgebra de grup  $\mathbb{C}[G]$ , la qual ens permet utilitzar el llenguatge de  $R$ -mòduls per a les representacions de  $G$ ; és a dir, és senzill establir un diccionari entre representacions de dimensió finita de  $G$  i  $\mathbb{C}[G]$ -mòduls (a l'esquerra) finitament generats. Podem mirar els elements de  $\mathbb{C}[G]$ ,  $\sum_{g \in G} a_g g$  com a funcions  $a : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Mirem d'interpretar el producte de dos elements de  $\mathbb{C}[G]$  en termes de les funcions associades:

$$\sum j(g_1) g_1 \sum k(g_2) g_2 = \sum l(g) g,$$

on  $l(g) = \sum_{h \in G} j(gh^{-1})k(h)$ , que és el que es coneix amb el nom de convolució de les funcions  $j$  i  $k$ . (Val a dir que Wiener, en el seu llibre “The Fourier Integral and its applications” de Cambridge University Press, 1948, comenta que, donat que no se li ocorria una traducció millor al vocable alemany *Faltung*, el traduiria amb la paraula anglesa *convolution*). Des d’aquest punt de vista, l’àlgebra de grup de  $G$  és una àlgebra de convolució, i la idea és generalitzar aquest concepte a grups topològics compactes en general. Val a dir que la generalització que nosaltres veurem en aquesta secció no és l’única que es fa servir, i que hi ha varies generalitzacions inequivalents entre elles; per exemple, l’espai de mesures de Borel sobre  $G$  també és una àlgebra de convolució, ja que podem definir la convolució de dues mesures de Borel. Més endavant en aquestes notes, quan es parli de grups reductius reals, es veurà la importància d’aquesta generalització.

Si  $G$  és un grup finit, tenim de manera natural dues accions de  $G$  en  $\mathbb{C}[G]$ ; una d’elles és donada per

$$g \rightarrow (\alpha \rightarrow g.\alpha).$$

Mirem com actua si identifiquem, com abans,  $\mathbb{C}[G]$  amb l’espai de funcions de  $G$  en  $\mathbb{C}$ ; si  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  és una funció, la funció  $g.f$  és la següent:  $(g.f)(x) = f(g^{-1}x)$ . Aquesta representació de  $G$  es coneix amb el nom de representació regular a l’esquerra,  $L$ . Anàlogament, la multiplicació a la dreta per elements de  $G$  ens defineix una representació regular a la dreta,  $(R(g)f)(x) = f(xg^{-1})$ . És fàcil veure que totes dues representacions regulars són isomorfes; l’isomorfisme  $T$  entre ambdues s’expressa en funcions com  $(Tf)(x) = f(x^{-1})$ . La propietat més remarcable de la representació regular és, sens dubte, que conté cadascuna de les representacions irreductibles de  $G$  amb multiplicitat igual a la seva dimensió (que solem anomenar grau).

Nosaltres triarem com a “àlgebra de grup” l’espai de Hilbert  $L^2(G)$ , que ve dotat de manera natural amb un producte de convolució

$$(\phi, \psi) \rightarrow (\phi * \psi)(g) = \int_G \phi(x) \psi(x^{-1}g) dx.$$

Definim en  $L^2(G)$  les representacions regulars a l’esquerra i a la dreta,  $L$  i  $R$ , com abans. Veurem que l’àlgebra de grup que hem pres en el cas general



de grups compactes gaudeix de propietats molt semblants al cas dels grups finits.

**9.1. Teorema.** *Sigui  $(L^2(G), L)$  la representació regular d'un grup topològic compacte  $G$ . Aleshores, el  $G$ -mòdul  $L^2(G)$  és la suma directa hilbertiana de totes les representacions irreductibles (que podem considerar unitàries) de  $G$ . Cada representació irreductible apareix amb multiplicitat igual al seu grau.*

**DEMOSTRACIÓ.** Considerem un sistema de representants unitaris de classes d'isomorfia de representacions irreductibles de  $G$ ,  $\{\rho\}$ , i per a cadascuna d'aquestes  $\rho$  el  $G$ -mòdul de dimensió finita

$$V_\rho = \oplus_{ij} \mathbb{C} \rho_{ij}$$

generat pels coeficients de  $\rho$  (les relacions d'ortogonalitat ens donen que les funcions  $\rho_{ij}$  són ortogonals dos a dos, i no idènticament nul·les, amb la qual cosa formen una base de  $V_\rho$ ). Aleshores, novament per les relacions d'ortogonalitat, els  $G$ -submòduls  $V_\rho$  són ortogonals dos a dos, i el teorema de Peter-Weyl ens diu que  $L^2(G)$  és suma directa hilbertiana dels  $V_\rho$ . N'hi ha prou amb demostrar, doncs, que  $V_\rho$  conté la representació  $\bar{\rho}$  amb multiplicitat  $n = n_\rho = n_{\bar{\rho}}$  (així és com s'indica el grau d'una representació).

Farem el càlcul explícit de com actua  $G$  mitjançant la representació regular a l'esquerra en l'espai de funcions  $V_\rho$ :

$$(L(g)\rho_{ij})(x) = \rho_{ij}(g^{-1}x).$$

A més, es té que  $\rho(g^{-1})\rho(x)e_k = \rho(g^{-1}x)e_k$ , amb la qual cosa tenim que, per a tot  $k$ , el subespai  $W_k = \oplus_{l=1}^n \rho_{lk}$  és un  $G$ -submòdul de  $V_\rho$ . Aquest mateix còmput ens dóna que

$$L(g)\rho_{lk} = \sum_{s=1}^n \overline{\rho_{sl}(g)} \rho_{rk}(x),$$

amb la qual cosa la matriu de la representació  $L$  restringida al subespai  $W_k$  en la base ortogonal  $(\rho_{lk})_l$  (base que, per cert, multiplicada per  $(n_\rho)^{\frac{1}{2}}$  esdevé ortonormal) serà:

$$\begin{bmatrix} \overline{\rho_{11}(g)} & \overline{\rho_{12}(g)} & \dots & \overline{\rho_{1n}(g)} \\ \overline{\rho_{21}(g)} & \overline{\rho_{22}(g)} & \dots & \overline{\rho_{2n}(g)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\rho_{n1}(g)} & \overline{\rho_{n2}(g)} & \dots & \overline{\rho_{nn}(g)} \end{bmatrix}.$$

Acabem de veure que  $V_\rho$  és un  $G$ -mòdul que conté la representació  $\bar{\rho}$  amb multiplicitat  $n_\rho = n_{\bar{\rho}}$ .

Hem vist, doncs, que cada representació irreductible de  $G$  apareix amb multiplicitat igual al seu grau, amb la qual cosa la prova conclou.  $\square$

## §10. Representacions induïdes. Reciprocitat de Frobenius

En aquesta secció donarem el concepte de representació induïda en grups compactes, i demostrarem la seva propietat principal, la reciprocitat de Frobenius. Per introduir el tema, ens situarem en un principi en el cas d'un grup finit  $G$ . Siguin, doncs,  $G$  un grup finit i  $H$  un subgrup de  $G$ . Volem trobar el functor adjunt a l'esquerra del functor restricció

$$\text{res}_H^G : \underline{G\text{-Mod}} \longrightarrow \underline{H\text{-Mod}}.$$

El functor adjunt a l'esquerra cercat, que anomenarem  $F$ , s'obté de la manera següent en el cas de grups finits: si  $W$  és un  $H$ -mòdul, aleshores

$$F(W) = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W.$$

Aquesta definició es pot estendre al cas en què  $(G : H) < \infty$ . A més, de les propietats estàndard del producte tensorial es dedueix que el functor  $F$  satisfà la propietat d'adjunció demanada. El problema és que aquesta construcció no és viable en el context de grups compactes  $G$  en general, i representacions en espais de Hilbert de dimensió finita. De fet, donarem una altra definició en el cas més general que, no obstant, es relacionarà amb el functor  $F$  ja definit en grups finits i  $G$ -mòduls de dimensió finita de la manera següent:

$$(i_H^G E)^* = F(E^*).$$

Recordem que donada una tal representació  $V$ , l'espai dual està naturalment dotat d'estructura de  $G$ -mòdul amb la representació contragredient.

**10.1. Definició estesa de representació induïda.** Siguin  $G$  un grup compacte i  $H$  un subgrup tancat de  $G$ ; considerem un  $H$ -mòdul continu

$E$  (aquí, de fet, n'hi ha prou amb suposar que  $E$  és un  $\mathbb{C}$ -espai vectorial topològic) i considerem l'espai vectorial  $C(G; E)$  amb la topologia compacta-oberta ([Br-Di 85, p. 142]; aquesta és la topologia amb què se sol dotar als espais d'aplicacions contínues entre espais Hausdorff). Considerem el sub-espai vectorial topològic

$$i_H^G E = \{f \in C(G; E) : f(gh) = h^{-1}f(g), g \in G, h \in H\}.$$

Aleshores,  $i_H^G E$  es coneix amb el nom de representació induïda associada al  $H$ -mòdul  $E$ .

**10.2. Definició alternativa.** Aquesta definició és més conceptual, i no obstant s'assembla (en certa manera) a la de grups finits; en la construcció del functor  $F$  usàvem el producte tensorial, i aquí usarem el producte fibrat. Sigui  $G \times_H E$  l'espai quocient de  $G \times E$  per la relació d'equivalència

$$(g, v) \sim (gh, h^{-1}v), h \in H.$$

L'aplicació  $G \times E \rightarrow G/H$  induïx una projecció

$$p : G \times_H E \rightarrow G/H$$

contínua de  $G$ -espais (és a dir, espais topològics dotats d'una  $G$ -acció). De fet,  $p$  és un fibrat vectorial de fibra  $p^{-1}\{x\} \cong E$ . I, de fet, donada una funció contínua  $f : G \rightarrow E$  tal que  $f(gh) = h^{-1}f(g)$  (com a la definició 1) n'obtenim una secció  $s_f : G/H \rightarrow G \times_H E$  de  $p$  (és a dir,  $ps_f = Id_{G/H}$ ) definida per  $s_f(gH) = (g, f(g))$  que és clarament contínua.

**10.3. Lema.** *L'aplicació  $f \mapsto s_f$  és un isomorfisme entre  $i_H^G E$  i l'espai de seccions contínues de  $p$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Construïm-ne una inversa. El fet clau és que el diagrama següent

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & G \times_H E \\ pr_1 \downarrow & & \downarrow p \\ G & \longrightarrow & G/H \end{array}$$

és un diagrama “pullback” (exercici per al lector), i per tant tota secció  $s$  de  $p$  s'aixeca a una secció  $s$  de  $pr_1$ . Definim, doncs,  $f_s = pr_1 \circ s$ . És fàcil comprovar que  $f_s \in i_H^G E$ . L'aplicació  $s \mapsto f_s$  és la inversa buscada.  $\square$

**10.4. Proposició.** *Siguin  $E$  un  $H$ -mòdul i  $V$  un  $G$ -mòdul. Existeix un isomorfisme canònic*

$$\mathrm{Hom}_G(V, i_H^G E) \cong \mathrm{Hom}_H(\mathrm{res}_H^G V, E).$$

DEMOSTRACIÓ. Construïm els (iso)morfismes canònics inversos l'un de l'altre. Sigui  $A : V \rightarrow iE$  un  $G$ -morfisme donat. L'aplicació “avaluació”  $\eta : iE \rightarrow E$  donada per  $f \mapsto f(1)$  és un  $H$ -morfisme (continu, és clar); prenem doncs el morfisme  $\Phi = \eta \circ A$ , que és un  $H$ -morfisme per construcció.

Sigui ara  $\beta : \mathrm{res}_H^G V \rightarrow E$  un  $H$ -morfisme donat. Definim una aplicació  $F : V \rightarrow C(G; E)$  prenent  $F(v)(g) = \beta(g^{-1}v)$  per a  $g \in G$ ,  $v \in V$ . Tenim que  $F(v)(gh) = \beta(h^{-1}g^{-1}v) = h^{-1}\beta(g^{-1}v) = h^{-1}F(v)(g)$ . Aleshores,  $F$  és un  $G$ -morfisme, per ser  $\beta$  un  $H$ -morfisme. La continuïtat de  $F$  és clara. Prenem, doncs,  $\Psi(\beta) = F$ . És fàcil comprovar que les dues aplicacions lineals construïdes són inverses una de l'altra.  $\square$

## §11. L'àlgebra de grup i els seus idempotents. Funcions de classe

Sigui  $G$  un grup compacte. Hem vist que l'àlgebra de convolució  $L^2(G)$  té un sistema ortonormal complet format a partir de les representacions irreductibles de  $G$  (i, per tant, de dimensió finita). Anem a estudiar, recolzant-nos en resultats ja vistos, l'estructura d'àlgebra de convolució de  $L^2(G)$  i de la seva subàlgebra  $C^0(G)$ .

**11.1. Proposició.** *Siguin  $\rho, \sigma$  dos representacions unitàries i irreductibles no equivalents de  $G$  i  $\chi, \psi$  els seus caràcters respectius. Aleshores:*

a)

$$\rho_{ij} * \rho_{kl} = \frac{1}{\dim \rho} \delta_{jk} \rho_{il} \quad i \quad \rho_{ij} * \sigma_{kl} = 0.$$

b)

$$\chi * \rho_{ij} = \rho_{ij} * \chi = \frac{1}{\dim \rho} \sigma_{ij} \quad i \quad \chi * \sigma_{kl} = \sigma_{kl} * \chi = 0.$$

c)

$$\chi * \chi i = \frac{1}{\dim \rho} \chi \quad i \quad \chi * \psi = 0.$$

DEMOSTRACIÓ. Demostrarem només a). Per la definició de convolució,

$$(\rho_{ij} * \rho_{kl})(g) = \int_G \rho_{ij}(gh^{-1}) \rho_{kl}(h) dh,$$

i substituïm les relacions

$$\rho_{ij}(gh^{-1}) = \sum_t \rho_{it}(g) \rho_{tj}(h^{-1}) \quad i \quad \rho_{ij}(h^{-1}) = \bar{\rho}_{ji}(h).$$

El resultat és:

$$\sum_t \rho_{it}(g) \int_G \bar{\rho}_{jt}(h) \rho_{kl}(h) dh.$$

Els apartats b), c) són conseqüència directa de a); només cal aplicar la definició de caràcter d'una representació.  $\square$

**11.2. Observació.** L'apartat b) ens diu, gràcies al teorema de Peter-Weyl, que tot caràcter irreductible  $\chi$  (i, per tant, tot caràcter) pertany al centre de les àlgebres de convolució  $L^2(G)$  i  $C^0(G)$ .

**11.3. Observació.** En llenguatge algebraic, hem vist que els caràcters irreductibles formen una família d'idempotents centrals ortogonals dos a dos. Això ens dóna descomposicions en subanells, que són alhora submòduls de l'anell en qüestió.

**11.4. Definició.** Sigui  $f$  una funció  $G \rightarrow \mathbb{C}$ . Direm que  $f$  és una funció de classe si, i només si,  $f(gxg^{-1}) = f(x)$  per a tot  $g \in G$ . És també usual la terminologia de “funció central”, i usarem l'una o l'altra indistintament.

**11.5. Lema.** *Sigui  $V$  un  $G$ -mòdul irreductible. Per a  $f \in \text{Hom}(V, V)$ ,  $\omega \in V^*$ ,  $v \in V$ , es té*

$$\int_G \omega(g f(g^{-1}v)) dg = \frac{1}{\dim V} \text{Tr}(f) \omega(v).$$

**11.6. Teorema.** *Sigui  $Cl(G)$  la subàlgebra de les funcions de classe de  $L^2(G)$ . Aleshores, una funció  $f \in L^2(G)$  és a  $Cl(G)$  si, i només si,*

$$f = \sum_{\chi} \lambda_{\chi} \chi,$$

on  $\chi$  recorre tots els caràcters irreductibles de  $G$ .

DEMOSTRACIÓ. És clar que  $f$  és una funció de classe si, i només si, se satisfà que  $\int_G f(gxg^{-1})dg = f(x)$ . Pel teorema de Peter-Weyl, n'hi ha prou amb fer el càlcul per a  $f = \rho_{ij}$ , on  $\rho$  és una representació unitària irreductible de  $G$ . Pel lema anterior, tenim que

$$\int_G \rho_{ij}(gxg^{-1})dg = (\dim \rho)^{-1} \chi(x) \delta_{ij}.$$

D'aquí es dedueix immediatament el teorema.  $\square$

## §12. Teoremes de descomposició de representacions de grups compactes

Anem a generalitzar el teorema de descomposició vist sobre la representació regular; de moment, donem la definició de  $G$ -mòdul isotípic.

**12.1. Definició.** Sigui  $E$  un  $G$ -mòdul i  $\rho$  una representació irreductible de  $G$ . Direm que  $E$  és  $\rho$ -isotípic si, i només si, els únics  $G$ -submòduls irreductibles de  $E$  són isomorfs a  $\rho$ .

**12.2. Teorema.** *Sigui  $G \rightarrow \mathbf{GL}(H)$  una representació unitària d'un grup compacte en un espai de Hilbert  $H$ . Aleshores,  $H$  descompon en una suma directa hilbertiana de  $G$ -mòduls isotípics.*

**12.3. Observació.** Noteu que aquest resultat també generalitza el teorema 5.3 i la proposició 5.6 sobre finitud de la dimensió de tots els  $G$ -mòduls irreductibles.

DEMOSTRACIÓ. Construïrem una família de projectors  $G$ -equivariants, ortogonals dos a dos,  $(P_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ , les imatges dels quals seran els  $G$ -mòduls

cercats. Sigui  $\Lambda$  el conjunt de classes d'isomorfia de representacions irreductibles de  $G$ , i  $\chi_\lambda$  el caràcter associat a  $\lambda \in \Lambda$ . Aleshores, definim  $P_\lambda$  com l'únic operador lineal tal que

$$\langle P_\lambda u, v \rangle = n_\lambda \int_G \langle \rho(g)u, v \rangle \chi_\lambda(g) dg.$$

Comprovem tot d'una que  $P_\lambda$  són projectors i que les imatges respectives pels  $P_\lambda$  són ortogonals dos a dos:

$$\begin{aligned} \langle P_\lambda P_\mu u, v \rangle &= n_\lambda n_\mu \int_G \int_G \langle \rho(xy)u, v \rangle \bar{\chi}_\lambda(x) \bar{\chi}_\mu(y) dx dy \\ &= n_\lambda n_\mu \int_G \int_G \langle \rho(z)u, v \rangle \bar{\chi}_\lambda(x) \bar{\chi}_\mu(x^{-1}z) dx dz \\ &= n_\lambda n_\mu \int_G \int_G \langle \rho(g)u, v \rangle (\bar{\chi}_\lambda \bar{\chi}_\mu)(z) dz. \end{aligned}$$

L'apèndix anterior ens dona que

$$\langle P_\lambda P_\mu u, v \rangle = 0, \lambda \neq \mu; \langle P_\lambda P_\mu u, v \rangle = \langle P_\lambda P_\mu u, v \rangle, \lambda = \mu.$$

Verifiquem que la suma de les projeccions és la identitat; per a això, considerarem, fixat  $u \in H$ , la funció

$$h(x) = \langle u, \rho(x)u \rangle.$$

Es té que

$$(h * \bar{\chi})(x) = \int_G \langle u, \rho(xy^{-1})u \rangle dy = \frac{1}{n_\lambda} \langle u, \rho(x)P_\lambda u \rangle.$$

Per tant, si anomenem  $\tilde{h}(x) = \overline{h(x^{-1})}$ , tenim que  $\tilde{h} * h * \chi_\lambda = 0$  per a tot  $\lambda$ , i, en particular,

$$0 = \tilde{h} * h * \chi_\lambda(1).$$

Definim l'operador  $T_\lambda(v) = \int_G (\tilde{h} * h)(x) \lambda(x)(v) dx$ . Es té, gràcies al corol·lari del teorema de Peter-Weyl, que

$$\int_G |h(x)|^2 dx = \sum_{\lambda \in \Lambda} n_\lambda \text{Tr}(T_\lambda)$$

i, per tant,  $h(x) = 0$  per a tot  $x \in G$ , per ser  $h$  contínua. Aleshores,

$$0 = h(e) = \langle u, u \rangle.$$

El fet que  $\chi_\lambda$  és una funció central ens dóna que  $P_\lambda$  és  $G$ -equivariant. També és clar que  $\text{Im } P_\lambda$  són  $\lambda$ -isotípics. Per tant, el teorema està ja demostrat.  $\square$

**12.4. Observació.** El teorema demostrat aquí es pot generalitzar a espais vectorials topològics  $A$  dotats d'una estructura de  $G$ -mòduls continus localment convexos (aquesta última condició s'imposa perquè tingui sentit la convolució per elements de  $C^0(G; \mathbb{C})$ ). Tot i que ho podríem incloure aquí, les idees bàsiques ja han estat exposades. La prova d'aquest resultat figura amb tots els detalls a [Br-Di 85]. El que sí farem és formular aquest resultat en el llenguatge algebraic de la convolució.

Tot espai de Hilbert dotat d'una representació d'un grup compacte  $G$  és de manera automàtica un  $C^0(G, \mathbb{C})$ -mòdul mitjançant la convolució ja definida. Considerem la família dels idempotents associats a caràcters irreductibles,  $e_\lambda$ . Aleshores, la representació  $H$  descompon en una suma directa Hilbertiana de

$$H_\lambda = e_\lambda * H$$

que són  $\lambda$ -isotípics per les relacions d'ortogonalitat ja provades; aquests  $C^0(G, \mathbb{C})$ -submòduls són clarament ortogonals dos a dos, ja que els idempotents centrals  $e_\lambda$  ho són.



# Bibliografia

- [Br-Di85] Bröcker, T.; tom Dieck, T.: *Representations of Compact Lie groups*, GTM, n. 98, Springer, 1985.
- [Fu-Ha91] Fulton, W.; Harris, J.: *Representation theory: a first course*, GTM, n. 129, Springer, 1991.
- [He66] Hermann, R.: *Lie groups for Physicists*, Benjamin, 1966.
- [Ki76] Kirillov, A. A.: *Elements of the Theory of Representations*, GMW, n. 220, Springer, 1976.
- [La93] Lang, S.: *Real and Functional Analysis*, GTM, n. 142, Springer, 1993.
- [La95] Lang, S.: *Differential and Riemannian Manifolds*, GTM, n. 160, Springer, 1995.
- [Na-St82] Naimark, N. A.; Stern, A. I.: *Theory of group representations*, GMW, n. 483, Springer, 1982.
- [Pi73] Pichon, G.: *Groupes de Lie*, Hermann, Paris, 1973.
- [Po46] Pontryagin, L.S.: *Topological groups*, Princeton Univ. Press, 1946.
- [Pos82] Postnikov, M.: *Lie groups and Lie algebras*, Nauka, 1982.
- [Pr77] Price, J. F.: *Lie groups and compact groups*, LNS, n. 25, London Mathematical Society, 1977.
- [Se77] Serre, J-P.: *Linear representations of finite groups*, GTM, n. 42, Springer, 1977.
- [We46] Weyl, H.: *The classical groups*, Princeton, 1946.

# Àlgebres i grups de Lie

Aquest capítol no ha estat redactat. El programa i la bibliografia recomanada per a aquesta exposició (i les dues següents) són els següents:

## Grups de Lie complexos

Grups i àlgebres de Lie. La forma de Killing. Tors maximal. Sistemes d'arrels. Diagrames de Dynkin. El grup de Weyl. Cambres de Weyl. Classificació de Cartan de les àlgebres de Lie complexes i simples. Grups de Lie simples, compactes i simplement connexos:  $\mathbf{SU}(n)$ ,  $n \geq 2$ ;  $\mathbf{Sp}(n)$ ,  $n \geq 2$ ,  $\mathbf{Spin}(2n+1)$ ,  $n \geq 3$ ,  $\mathbf{Spin}(2n)$ ,  $n \geq 4$ ; i els cinc grups excepcionals. Grups de Lie semisimples i compactes.

### Referències:

- [At et al.79] Atiyah et al.: *Representation Theory of Lie Groups*, LNS, n. 34, Cambridge University Press, 1979.
- [Fu-Ha 91] Fulton, W.; Harris, J.: *Representation Theory*, GTM, n. 129, 1991.
- [On-Vi90] Onishchik, A. L.; Vinberg, E. B.: *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer, 1990.
- [Pi73] Pichon, G.: *Groupes de Lie. Représentations linéaires et applications*, Méthodes, Hermann, 1973.
- [Pr77] Price, J. F.: *Lie Groups and Compact Groups*, London Mathematical Society, LNS, n. 34, Cambridge University Press, 1977.
- [Si96] Simon, B.: *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics, n. 10, AMS, 1996.

CAPÍTOL 3

# Sistemes d'arrels i diagrames de Dynkin

MARIA FONT

SESSIÓ 1A. DEL DIA 23 D'OCTUBRE DE 1996

Aquest capítol no ha estat redactat. El programa i la bibliografia recomanada per a aquesta exposició són els mateixos que els del capítol 2.

CAPÍTOL 4

# Classificació de les àlgebres de Lie complexes simples

GABRIEL CARDONA

SESSIÓ 2A. DEL DIA 23 D'OCTUBRE DE 1996

Aquest capítol no ha estat redactat. El programa i la bibliografia recomanada per a aquesta exposició són els mateixos que els del capítol 2.

# Representacions de $\mathrm{SO}(3)$

ARTUR TRAVESA

SESSIÓ 1A. DEL DIA 30 D'OCTUBRE DE 1996

Aquest capítol correspon a una de les dues sessions del dia 30 d'octubre de 1996 del seminari de Teoria de Nombres (UB–UAB–UPC). Tal com vaig afirmar llavors, i, sobretot, pensant en els membres més joves del seminari, la versió escrita conté molts detalls sobre els quals no es va poder aprofundir en l'exposició oral.

El contingut d'aquesta exposició comença amb la introducció d'algunes definicions i notacions de caràcter general, algunes de les quals han estat objecte de capítols anteriors. A continuació s'estudien les representacions dels tors, que fan una funció anàloga a la funció que fan els caràcters de les representacions dels grups finits. Després es fa un estudi de les representacions de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$ , a fi d'obtenir les representacions irreductibles dels grups  $\mathbf{SO}(3)$  i  $\mathbf{SU}(2)$ . Finalment s'apliquen els mètodes estudiats a donar una explicació de la resolució de l'equació de Schrödinger.

Vull agrair a la Dra. P. Bayer l'oportunitat que m'ha donat d'aprendre aquests temes i d'haver-me convidat a participar en el seminari que dirigeix, prepara i duu a terme. En particular, cal agrair-li l'interès que ha mostrat a fer-nos conèixer, a mi i als altres membres del seminari, tots aquests temes, que obren les portes a aplicacions no trivials a la matèria del nostre interès.

## §1. Representacions dels grups compactes

En general, convé estudiar dos tipus de representacions lineals (complexes) dels grups topològics compactes: les representacions finites i les representacions en espais de Hilbert.

**1.1. Definició.** Una representació lineal (complexa) d'un grup topològic  $G$  és un morfisme continu  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ , on  $V$  és un espai vectorial topològic complex que s'anomena l'espai de la representació. Si l'espai  $V$  és de dimensió finita, la representació s'anomena finita i la dimensió de  $V$  s'anomena el grau de la representació. En aquest cas, l'aplicació  $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$  definida per  $\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g))$ , per a tot  $g \in G$ , s'anomena el caràcter de la representació. Si  $V$  és un espai de Hilbert, la representació s'anomena unitària si, i només si, la forma hermitiana de  $V$  és invariant per a  $\rho$ ; és a dir, si per a tot  $g \in G$  i tots els elements  $u, v \in V$  és  $\langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ .

**1.2. Definició.** Dues representacions del mateix grup  $G$ ,  $\rho_1 : G \rightarrow \mathbf{GL}(V_1)$ ,  $\rho_2 : G \rightarrow \mathbf{GL}(V_2)$  s'anomenen equivalents si, i només si, existeix un isomorfisme  $\gamma : V_1 \rightarrow V_2$  tal que per a tot  $g \in G$  és  $\gamma \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \gamma$ .

**1.3. Observació.** Els grups finits es poden considerar grups compactes amb la topologia discreta; per tant, la teoria de les representacions dels grups compactes inclou, en particular, la teoria de les representacions dels grups finits.

Com en el cas de les representacions dels grups finits, la representació regular d'un grup compacte ens proporcionarà molta informació.

**1.4. Definició.** Sigui  $G$  un grup topològic compacte i considerem la mesura de Haar normalitzada de  $G$ ,  $dg$ . L'espai de la representació regular de  $G$  és l'espai  $L^2(G)$  de les (classes de) funcions  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  de quadrat integrable; és a dir, de les funcions tals que la integral  $\int_G |f(g)|^2 dg = \int_G f(g) \overline{f(g)} dg$  és convergent.

**1.5. Observació.** Recordem que les funcions contínues  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  formen un subespai dens de  $L^2(G)$ .

**1.6. Proposició.** (Cf. [Pi73, p. 100]) *Per a tot  $g \in G$ , tota  $f \in L^2(G)$  i tot  $x \in G$ , posem  $R_g f(x) := f(xg)$ ,  $L_g f(x) := f(g^{-1}x)$ . Llavors, les aplicacions  $R : G \rightarrow \mathbf{GL}(L^2(G))$ ,  $L : G \rightarrow \mathbf{GL}(L^2(G))$ , definides per les assignacions  $g \mapsto R_g$ ,  $g \mapsto L_g$ , són representacions lineals complexes, contínues i unitàries de  $G$ . S'anomenen, respectivament, la representació regular per la dreta i la representació regular per l'esquerra de  $G$ .  $\Lambda$*

**1.7. Proposició.** (Cf. [Pi73, p. 101]) *L'aplicació  $\gamma : L^2(G) \rightarrow L^2(G)$  donada per  $\gamma f(x) := f(x^{-1})$ , per a tota  $f \in L^2(G)$  i tot element  $x \in G$ , és un automorfisme involutiu de  $L^2(G)$  tal que per a tot  $g \in G$  és  $R_g = \gamma L_g \gamma^{-1}$ . Per tant, les representacions regulars per la dreta i per l'esquerra són equivalents.  $\Lambda$*

**1.8. Proposició.** (Cf. [Pi73, p. 90]) *Tota representació finita d'un grup compacte és equivalent a una representació unitària. Amb més precisió, si  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  és una representació finita d'un grup compacte  $G$ , existeix una forma hermitiana definida positiva en  $V$  invariant per a  $\rho$ ; és a dir, tal que per a tot  $g \in G$ , i tot  $u, v \in V$ , és  $\langle \rho_g(u), \rho_g(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ .  $\Lambda$*

**1.9. Observació.** A més a més, si l'espai  $V$  ja disposa d'un producte hermitià  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ , existeix un automorfisme lineal de  $V$ ,  $\gamma$ , tal que  $\langle u, v \rangle = \langle \gamma(u), \gamma(v) \rangle_1$ . Aleshores, la representació conjugada  $\gamma \rho \gamma^{-1}$  és equivalent a la donada,  $\rho$ , i és unitària per al producte hermitià  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ , donat en  $V$  (Cf. [Pi73, p. 91]).

**1.10. Definició.** Una representació finita  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ , d'un grup compacte  $G$ , s'anomena irreductible si, i només si,  $V$  no admet subespais invariants no trivials per a  $\rho$ ; és a dir, si, i només si, per a tot element  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , el subespai vectorial de  $V$  generat per la família de vectors  $\{\rho(g)(v)\}_{g \in G}$  és tot  $V$ .

**1.11. Proposició.** (Cf. [Pi73, p. 90]) *Tota representació finita d'un grup compacte és equivalent a una suma directa de representacions irreductibles, de manera essencialment única.  $\Lambda$*

**1.12. Observació.** Siguin  $\rho_i : G \rightarrow \mathbf{GL}(W_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , representacions d'un grup  $G$ . Posem  $W := W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$  i sigui  $\rho := \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$  la representació  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(W)$  definida per l'assignació  $\rho_g(w_1 + \cdots + w_n) := \rho_g(w_1) + \cdots + \rho_g(w_n)$ . S'anomena la representació suma directa de les  $\rho_i$ .

En la proposició anterior, “essencialment única” vol dir que si la representació  $\rho$  és suma directa de representacions irreductibles  $\rho_i$ ,  $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$ , i també de representacions irreductibles  $\rho'_j$ ,  $\rho = \rho'_1 \oplus \cdots \oplus \rho'_m$ , llavors  $n = m$  i existeix una permutació  $\sigma \in S_n$  tal que  $\rho_i$  i  $\rho'_{\sigma(i)}$  són equivalents.

El resultat següent, conegut amb el nom de Lema de Schur, és bàsic.

**1.13. Lema de Schur.** (Cf. [Pi73, p. 90]) *Siguin  $\rho_i : G \rightarrow \mathbf{GL}(V_i)$ ,  $i = 1, 2$ , dues representacions finites irreductibles d'un grup compacte  $G$  i  $\gamma : V_1 \rightarrow V_2$  una aplicació lineal tal que per a tot  $g \in G$  és  $\rho_2(g) \circ \gamma = \gamma \circ \rho_1(g)$ . Llavors,  $\gamma = 0$  o bé  $\gamma$  és un isomorfisme.*  $\Lambda$

La demostració del resultat següent es proposa com a exercici.

**1.14. Corol·lari.** *Sigui  $G$  un grup abelià compacte. Totes les representacions irreductibles de  $G$  són de dimensió 1.*  $\Lambda$

Donat un grup compacte  $G$ , sigui  $\Lambda := \Lambda_G$  un conjunt de representants unitaris de les classes d'equivalència de representacions lineals finites irreductibles de  $G$ . Per a cada representació irreductible  $\lambda \in \Lambda$ , denotem per  $V_\lambda$  l'espai de la representació i per  $n_\lambda$  la seva dimensió. Elegim bases en cadascun dels espais  $V_\lambda$  i, per a tot  $x \in G$ , sigui  $[a_{i,j}^\lambda(x)]_{1 \leq i,j \leq n_\lambda}$  la matriu associada a  $\lambda(x)$  en aquesta base. En particular,  $a_{i,j}^\lambda : G \rightarrow \mathbb{C}$  és una aplicació contínua; per tant, de quadrat integrable. Amb aquestes notacions, el teorema de Peter-Weyl s'enuncia de la manera següent:

**1.15. Teorema.** (Cf. [Pi73, p. 103]) *Si  $G$  és un grup compacte, la família de funcions  $\{\sqrt{n_\lambda} \cdot a_{i,j}^\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , és a dir, la família dels coeficients de les representacions finites irreductibles de  $G$ , és un sistema ortonormal complet per a  $L^2(G)$ .*  $\Lambda$



**1.16. Corol·lari.** (Cf. [Pi73, p. 104]) *Tota funció complexa contínua d'un grup compacte  $G$  és límit uniforme de combinacions lineals dels coeficients de les representacions finites irreductibles de  $G$ .  $\Lambda$*

El resultat següent permet alliberar-nos de les hipòtesis de finitud de les representacions i estudiar representacions en espais de Hilbert de dimensió no necessàriament finita.

**1.17. Teorema.** (Cf. [Pi73, p. 106]) *Sigui  $G$  un grup topològic compacte. Tota representació unitària (contínua)  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$ , de  $G$  en un espai de Hilbert complex  $V$ , és suma directa hilbertiana de representacions lineals irreductibles de dimensió finita; és a dir,  $V$  és l'adherència d'una suma directa de subrepresentacions irreductibles de dimensió finita.  $\Lambda$*

**1.18. Observació.** Associada a la representació  $\rho$  donada, es considera la família de projectors ortogonals de  $V$ ,  $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ , definits de manera que se satisfacin les igualtats

$$\langle P_\lambda(u), v \rangle = n_\lambda \int_G \langle \rho_g(u), v \rangle \overline{\chi}_\lambda(g) dg,$$

per a  $u, v \in V$ , i  $\lambda$  qualsevol representació irreductible de dimensió finita de  $G$ , on  $\chi_\lambda$  és el caràcter de  $\lambda$ . Si, per a cada  $\lambda \in \Lambda$ , posem  $V_\lambda := P_\lambda(V)$ , la imatge de  $V$  pel projector  $P_\lambda$ , llavors,  $V = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$  i els espais  $V_\lambda$  són invariants per a  $\rho$ , ortogonals dos a dos, i cadascun és l'adherència d'una suma directa de subespais invariants de dimensió finita. (Observem que no diem que els espais  $V_\lambda$  siguin de dimensió finita.)

**1.19. Definició.** El subespai  $V_\lambda$  s'anomena el component isotípic de la representació  $\rho$  associada a  $\lambda$ .

## §2. Tors maximals

Per a les qüestions generals que fan referència als grups de Lie i a les àlgebres de Lie, remetem el lector a les exposicions anteriors d'aquest mateix seminari i a l'àmplia bibliografia que hi ha sobre aquests temes.

**2.1. Definició.** Considerem, en  $T := \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \{e^{2\pi i\theta} : 0 \leq \theta < 1\}$ , l'estructura natural de grup de Lie (real). Anomenarem tor de dimensió  $k \geq 0$  tot grup de Lie isomorf a  $T^k$ ; és un grup de Lie real, abelià, connex i compacte de dimensió  $k$ .

La proposició i el teorema de classificació següents s'obtenen en fer ús de l'aplicació exponencial.

**2.2. Proposició.** *Tot tor admet un generador; és a dir, si  $T$  és un tor, existeix un element  $x \in T$  tal que  $T$  és l'adherència de  $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ .*

DEMOSTRACIÓ (Cf. [Si96, VIII.1.4]).  $\Lambda$

**2.3. Teorema.** *Sigui  $G$  un grup de Lie real, abelià, i connex de dimensió  $n$ . Llavors, existeix  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , tal que  $G \simeq T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ .*

DEMOSTRACIÓ (Cf. [Si96, VII.2.3]).  $\Lambda$

**2.4. Corol·lari.** *Tot grup de Lie real, abelià, connex i compacte és un tor.*  $\Lambda$

**2.5. Definició.** Sigui  $G$  un grup de Lie. Un tor de  $G$  és un subgrup de Lie (tancat) de  $G$  isomorf a  $T^k$ , per a algun nombre enter  $k \geq 1$ . Un tor  $T \subseteq G$  s'anomena un tor maximal de  $G$  si, i només si, per a tot tor  $H \subseteq G$  tal que  $T \subseteq H$  és  $T = H$ .

El teorema que segueix és semblant, en la seva estructura, als teoremes de Sylow per als grups finits; fa referència a l'existència de tors maximals, i a la relació entre ells, en els grups de Lie semisimples i compactes.

**2.6. Observació.** Un grup de Lie semisimple i compacte és, automàticament, ■  
connex i el seu centre és finit (cf. [Si96, VII.2.5]).

**2.7. Teorema.** *Sigui  $G$  un grup de Lie semisimple i compacte. Llavors:*

- a) Existeix algun tor maximal  $T \subseteq G$ .*
- b) Per a tot element  $g \in G$  existeix un tor maximal  $T \subseteq G$  tal que  $g \in T$ .*
- c) Tots els tors maximals de  $G$  són conjugats.*
- d) El centre de  $G$  és la intersecció de tots els tors maximals de  $G$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Sigui  $\mathfrak{g}$  l'àlgebra de Lie de  $G$ , i  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $X \neq 0$ . L'adherència de  $\{e^{tX}\}_t$  és un subgrup de Lie abelià, connex i compacte de  $G$ ; per tant, és un tor de  $G$ . En particular, en  $G$  existeixen tors. Ara bé, si  $T_1 \subseteq T_2 \subseteq G$  són tors, llavors se satisfà la relació  $\dim T_1 \leq \dim T_2 \leq \dim G$ , amb igualtat  $\dim T_1 = \dim T_2$  si, i només si,  $T_1 = T_2$ ; com que  $G$  és de dimensió finita, no pot existir una cadena infinita estrictament creixent de tors  $T_n$  ( $T_{n+1}$ ; això demostra l'existència de tors maximals en  $G$ ).

Les proves de les afirmacions de b), c) i d) es basen en el resultat següent.

**2.8. Lema.** (Cf. [Si96, VIII.1.1']) *Sigui  $G$  un grup de Lie connex i compacte i  $T \subseteq G$  un tor maximal de  $G$ . Llavors, l'aplicació  $G \times T \rightarrow G$  donada per  $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$  és exhaustiva.  $\Lambda$*

Aquest lema ens diu que tot element de  $G$  és conjugat d'un element de qualsevol tor maximal; com que un conjugat d'un tor maximal és un tor maximal, tot element de  $G$  pertany a un tor maximal. Això demostra b).

Sigui  $T, H \subseteq G$  dos tors maximals de  $G$ . Prenem un generador  $x$  de  $H$  i sigui  $g \in G$  un element tal que  $x \in gTg^{-1}$ ; l'existència d'un tal element  $g$  és garantida pel lema anterior. Com que per a tot  $n \in \mathbb{Z}$  és  $x^n \in gTg^{-1}$ , i com que  $gTg^{-1}$  és tancat, el fet que  $x$  sigui un generador de  $H$  ens permet assegurar que  $H \subseteq gTg^{-1}$ ; com que  $H$  i  $gTg^{-1}$  són tors maximals, obtenim la igualtat  $H = gTg^{-1}$ ; i això demostra c).

Finalment, considerem un tor maximal  $T \subseteq G$  i sigui  $x \in Z(G)$  un element qualsevol. En repetir l'argument anterior, observem que existeix un element  $g \in G$  tal que  $x \in gTg^{-1}$ ; però ara, com que  $x \in Z(G)$ , és  $x = g^{-1}xg \in T$ ; això prova que  $Z(G) \subseteq \bigcap \{T : T \text{ és un tor maximal de } G\}$ .

Recíprocament, si  $x \in \bigcap \{T : T \text{ és un tor maximal de } G\}$ , tenim que  $g$  commuta amb tots els elements de  $\bigcup \{T : T \text{ és un tor maximal de } G\}$ ; però aquesta reunió és tot  $G$ , en virtut del lema. Això demostra  $d$ ).  $\Lambda$

**2.9. Observació.** En el teorema anterior no es pot suprimir la hipòtesi que el grup sigui compacte. Per a veure-ho, només cal observar que el grup de Lie  $G := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, c > 0, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  no conté cap tor. En efecte, tot tor conté elements d'ordre finit diferents del neutre; en canvi, en  $G$  no hi ha elements no trivials d'ordre finit.

**2.10. Exemples.** Anem a determinar com són els tors maximals dels grups  $\mathbf{SU}(n)$ . En primer lloc, és immediat observar que el subconjunt  $T_{n-1} := \{\mathrm{diag}(e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_n}) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}, e^{i(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)} = 1\} \subseteq \mathbf{SU}(n)$  és un tor de dimensió  $n - 1$ . En efecte, l'aplicació  $T^{n-1} \rightarrow T_{n-1}$  donada per  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \mathrm{diag}(e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_{n-1}}, e^{-2\pi i(x_1 + \dots + x_{n-1})})$ , per a  $0 \leq x_i < 1, 1 \leq i \leq n - 1$ , és un isomorfisme de grups de Lie. Per tant,  $\mathbf{SU}(n)$  conté tors de dimensió  $n - 1$ . Finalment, es prova que si  $A \in \mathbf{SU}(n)$  és una matriu que commuta amb tota matriu  $X \in T_{n-1}$ , llavors  $A \in T_{n-1}$ ; per tant, no hi ha cap subgrup abelià que contingui estrictament  $T_{n-1}$ ; en conseqüència,  $T_{n-1}$  és un tor maximal.  $\Lambda$

El teorema anterior admet un corol·lari bàsic per a la teoria de les representacions del grup  $\mathbf{SU}(2)$  i, més generalment, per a les dels grups de Lie semisimples i compactes.

**2.11. Corol·lari.** *Tot tor maximal d'un grup de Lie semisimple i compacte  $G$  conté un conjunt de representants de les classes de conjugació de  $G$ .*  $\Lambda$

En particular, aquest resultat ens permet assegurar que els caràcters de les representacions irreductibles de tot grup de Lie semisimple i compacte són determinats per llurs restriccions a un tor maximal, que són representacions irreductibles del tor. Per tant, no serà inútil començar per estudiar les representacions dels tors.

**2.12. Teorema.** (Representacions de  $T$ ) *Els caràcters complexos irre-*

ductibles del tor  $T$  són exactament els donats per les aplicacions

$$\begin{aligned}\chi_m : T &\rightarrow \mathbf{SU}(1) \\ z = e^{2\pi i \theta} &\mapsto z^m = e^{2\pi i \theta m},\end{aligned}$$

per a  $m \in \mathbb{Z}$ . En particular, si  $\Lambda_T$  designa el conjunt de les classes de representacions irreductibles del tor, és  $\Lambda_T \simeq \mathbb{Z}$ .

**DEMOSTRACIÓ.** Clarament, per a tot  $m \in \mathbb{Z}$ , l'aplicació  $\chi_m$  és una representació de dimensió 1 (i, per tant, irreductible) del tor  $T$ . Recíprocament, tota representació de  $T$  és conjugada d'una representació unitària; per tant, conjugada d'una representació de la forma  $\chi : T \rightarrow \mathbf{SU}(1)$ . D'altra banda, tota representació contínua és, automàticament, de classe  $C^\infty$  (cf. [Pi73, p. 70] i [Si96, VII.9.2]), de manera que  $\chi$  és un morfisme de grups de Lie. En conseqüència,  $\chi$  induïx un morfisme entre les àlgebres de Lie corresponents; és a dir,  $\chi$  determina un morfisme  $\lambda_\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , d'àlgebres de Lie. Com que els únics morfismes d'àlgebres de Lie  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  són les homotècies, existeix  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_\chi$  és l'homotècia de multiplicació per  $\lambda$ . En prendre exponencials, obtenim que  $\chi$  ha de ser l'exponencial de l'homotècia  $\lambda$ ; és a dir, existeix  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\chi(z) = z^\lambda$ , per a tot  $z \in T$ . Finalment, per la continuïtat de  $\chi$ , i com que  $\chi(1) = 1$ , ha de ser  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , com calia veure.  $\Lambda$

Les representacions de tots els tors s'obtenen a partir del resultat general següent.

**2.13. Proposició.** *Siguin  $\rho_i : G_i \rightarrow \mathbf{GL}(V_i)$ ,  $i = 1, 2$ , representacions complexes, contínues i irreductibles de grups compactes. L'aplicació  $\rho_1 \otimes \rho_2 : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbf{GL}(V_1 \otimes V_2)$ , definida per l'assignació  $(g_1, g_2) \mapsto (\rho_1 \otimes \rho_2)_{(g_1, g_2)}$ , on  $(\rho_1 \otimes \rho_2)_{(g_1, g_2)}(v_1 \otimes v_2) := \rho_1(g_1)(v_1) \otimes \rho_2(g_2)(v_2)$ , sobre els generadors  $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$ , és una representació complexa, contínua i irreductible de  $G_1 \times G_2$ .*

*Recíprocament, si  $\rho : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  és una representació complexa, contínua i irreductible, existeixen representacions complexes, contínues i irreductibles  $\rho_i : G_i \rightarrow \mathbf{GL}(V_i)$ ,  $i = 1, 2$ , tals que  $\rho$  és equivalent a la representació  $\rho_1 \otimes \rho_2$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Cf. [Se77, Thm. 10 i Chap. 4].  $\Lambda$

**2.14. Corol·lari.** *Les representacions dels tors  $T^n$ ,  $n \geq 1$ , són parametritzades per  $m := (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ , en la forma següent:*

$$\begin{aligned} \chi_m : T^n &\rightarrow SU(1) \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto \prod_{i=1}^n z_i^{m_i} \cdot \Lambda \end{aligned}$$

Com a conseqüència del teorema de Peter-Weyl i del coneixement de les representacions irreductibles dels tors, obtenim l'anàlisi de Fourier clàssic en  $\mathbb{R}^n$ .

**2.15. Corol·lari.** (Anàlisi de Fourier) *Sigui  $f \in L^2(T^n)$ . Llavors,  $f$  és la suma d'una sèrie de Fourier; és a dir, de la forma*

$$f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n},$$

amb  $a_m \in \mathbb{C}$  i  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ .  $\Lambda$

En altres termes, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  és una funció múltiplesment periòdica, de període 1 per a cada component, i suposem que  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , llavors  $f$  admet una expressió de la forma

$$f(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m_1 \theta_1} \dots e^{2\pi i m_n \theta_n},$$

on  $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ ,  $a_m \in \mathbb{C}$ , i  $0 \leq \theta_i < 1$ .

### §3. Representacions de $so(3)$

Les àlgebres de Lie associades als grups de Lie reals  $SU(2)$  i  $SO(3)$  són isomorfs (cf. el corol·lari 4.4); per tant, el coneixement de les representacions d'aquesta àlgebra de Lie ens donarà informació de les representacions dels dos grups.

El grup de les rotacions de l'espai vectorial euclidià  $\mathbb{R}^3$ ,  $SO(3)$ , és un grup de Lie real, connex i compacte de dimensió 3. Es pot descriure com el

grup de les matrius ortogonals de determinant 1; concretament, escriurem  $\mathbf{SO}(3) = \{A \in \mathbf{GL}_3(\mathbb{R}) : A^t = A^{-1}, \det A = 1\}$ . Llavors, l'àlgebra de Lie de  $\mathbf{SO}(3)$  és  $\mathfrak{so}(3) := \{X \in M_3(\mathbb{R}) : X^t = -X\}$ , i es disposa d'un isomorfisme d'espais vectorials reals

$$\mathfrak{so}(3) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^3;$$

en particular, les matrius

$$I_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad I_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad I_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

formen una base de  $\mathfrak{so}(3)$ , i les constants d'estructura de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  són determinades per  $[I_1, I_2] = I_3$ ,  $[I_2, I_3] = I_1$ ,  $[I_3, I_1] = I_2$  (per a una interpretació d'aquestes matrius, cf. la demostració de la proposició 5.2 més avall).

**3.1. Proposició.** (Tor maximal de  $\mathbf{SO}(3)$ ) *Sigui*

$$T := \left\{ \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbf{SO}(3).$$

*Llavors,  $T \simeq \mathbf{SO}(2) \simeq \mathbf{SU}(1) \simeq \mathbb{T}$ , i  $T$  és un tor maximal de  $\mathbf{SO}(3)$ . La matriu  $I_3$  és una base de l'àlgebra de Lie de  $T$ , considerada com a subàlgebra de  $\mathfrak{so}(3)$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Els isomorfismes  $T \simeq \mathbf{SO}(2) \simeq \mathbf{SU}(1) \simeq \mathbb{T}$  són ben coneguts o bé evidents; en particular,  $T$  és un subtor de  $\mathbf{SO}(3)$ , i és de dimensió 1; cal veure que és un tor maximal. Si  $\mathbf{SO}(3)$  contingués un tor de dimensió més gran que 1,  $\mathfrak{so}(3)$  contindria una subàlgebra commutativa de dimensió més gran que 1. Però si dos vectors de l'àlgebra de Lie commuten, és a dir, si  $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$  són tals que  $[X, Y] = 0$ , llavors existeix  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $Y = \lambda X$  (càlcul senzill). Per tant, les subàlgebres commutatives maximals de  $\mathfrak{so}(3)$  són de dimensió 1. Per a l'afirmació que fa referència a l'àlgebra de Lie de  $T$ , vegeu la demostració de la proposició 5.2 més avall.  $\Lambda$

**3.2. Observació.** Dels cursos de geometria lineal és ben conegut que tot element de  $\mathbf{SO}(3)$  és conjugat d'una matriu de la forma  $A := \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , amb  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . (En efecte, tota rotació de l'espai, després d'un canvi de base que faci coincidir l'eix de rotació amb l'eix  $0z$ , és de la forma  $A$ .) En aquest cas, doncs, ja és ben conegut el fet que tot element del grup pertany a un tor maximal (cf. el teorema 2.7).

**3.3. Exercici.** L'àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  és simple.

**3.4. Observació.** Si  $r : \mathfrak{so}(3) \rightarrow L$  és un morfisme no trivial d'àlgebres de Lie,  $r$  és un isomorfisme amb la imatge; doncs,  $\mathrm{im}(r)$  admet una base  $a_1, a_2, a_3$  tal que  $[a_1, a_2] = a_3$ ,  $[a_2, a_3] = a_1$ ,  $[a_3, a_1] = a_2$ .

**3.5. Proposició.** *Segui  $\rho : \mathbf{SO}(3) \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  una representació complexa, finita, contínua, i no trivial, no necessàriament irreductible. Existeixen operadors  $\mathbb{C}$ -lineals  $A_1, A_2, A_3$  en  $V$ , tals que  $[A_1, A_2] = A_3$ ,  $[A_2, A_3] = A_1$ ,  $[A_3, A_1] = A_2$ . Si, a més a més,  $\rho$  és unitària, els operadors  $A_1, A_2, A_3$  són antihermitians.*

**DEMOSTRACIÓ.** Una tal representació  $\rho$  és un morfisme de grups de Lie, de manera que, per pas a les àlgebres de Lie,  $\rho$  dóna lloc a un morfisme no trivial  $d\rho : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathrm{End}(V)$ , de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  en l'àlgebra de Lie (real)  $\mathrm{End}(V) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ , de  $\mathbf{GL}(V)$ . En conseqüència, la imatge de  $d\rho$  és un subespai vectorial (real) de dimensió 3 de  $\mathrm{End}(V)$ , que admet una base formada per operadors  $\mathbb{C}$ -lineals  $A_1, A_2, A_3 \in \mathrm{End}(V)$  tals que  $[A_1, A_2] = A_3$ ,  $[A_2, A_3] = A_1$ ,  $[A_3, A_1] = A_2$ .

A més a més, si  $\rho$  és unitària, dels fets que l'aplicació exponencial  $\exp : \mathbf{so}(3) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  és exhaustiva i que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SO}(3) & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{GL}(V) \\ \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathfrak{so}(3) & \xrightarrow{d\rho} & \mathrm{End}(V) \end{array}$$

és commutatiu s'obté que  $\overline{A}_k^t = -A_k$ , per a  $1 \leq k \leq 3$ ; és a dir, els operadors  $A_1, A_2, A_3$  són antihermitians.  $\Lambda$



Posem  $H_3 := iA_3$ ,  $H_+ := iA_1 - A_2$ ,  $H_- := iA_1 + A_2$ ; llavors,  $H_3$  és un operador hermitià i  $H_+$ ,  $H_-$  són operadors hermitianament conjugats de  $V$ ; és a dir, se satisfan les relacions  $\overline{H_3}^t = H_3$ ,  $\overline{H_+}^t = H_-$  i  $\overline{H_-}^t = H_+$ . D'altra banda, aquests operadors satisfan les regles de commutació

$$[H_+, H_-] = 2H_3, \quad [H_-, H_3] = H_-, \quad [H_3, H_+] = H_+.$$

**3.6. Observació.** Els operadors  $H_3$ ,  $H_+$ ,  $H_-$  no pertanyen, en general, a  $\text{im}(d\rho)$ , que és un espai vectorial real.

Com que  $H_3$  és un operador hermitià d'un espai vectorial complex de dimensió finita, és diagonalitzable en una base ortonormal de vectors propis, i els valors propis són reals. Sigui  $v \in V$  un vector propi no nul de  $H_3$ , i sigui  $\lambda \in \mathbb{R}$  el valor propi corresponent. Llavors,

$$\begin{aligned} H_3(H_+v) &= ([H_3, H_+] + H_+H_3)v = (H_+(1 + H_3))v = \\ &= H_+(1 + \lambda)v = (1 + \lambda)H_+v, \\ H_3(H_-v) &= ([H_3, H_-] + H_-H_3)v = (-H_- + H_-H_3)v = \\ &= H_-(H_3v - v) = (\lambda - 1)H_-v. \end{aligned}$$

Aquest càlcul demostra el resultat següent:

**3.7. Lema.** *Si  $v \in V$  és un vector propi no nul de  $H_3$ , de valor propi  $\lambda \in \mathbb{R}$ , llavors:*

- a)  $H_+v = 0$  o bé  $H_+v$  és vector propi de  $H_3$  de valor propi  $\lambda + 1$ .
- b)  $H_-v = 0$  o bé  $H_-v$  és vector propi de  $H_3$  de valor propi  $\lambda - 1$ .  $\Lambda$

**3.8. Lema.** *Existeix  $\psi_0 \in V$ , vector propi no nul de  $H_3$  tal que  $H_+\psi_0 = 0$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Siguin  $\lambda \in \mathbb{R}$  un valor propi de  $H_3$  i  $v \in V$  un vector propi no nul de valor propi  $\lambda$ . Com que  $V$  és de dimensió finita, l'operador  $H_3$  només té una quantitat finita de valors propis diferents; en virtut del lema anterior, existeix  $r \in \mathbb{N}$  tal que els vectors  $v$ ,  $H_+v$ ,  $H_+^2v = H_+H_+v$ ,  $H_+^3v$ ,  $\dots$ ,  $H_+^rv$  són vectors propis no nuls de  $H_3$  de valors propis  $\lambda$ ,  $\lambda + 1$ ,  $\lambda + 2$ ,  $\dots$ ,  $\lambda + r$ , i  $H_+^{r+1}v = 0$ ; només cal definir  $\psi_0 := H_+^rv$ .  $\Lambda$

Sigui  $\ell \in \mathbb{R}$  el valor propi associat al vector propi  $\psi_0$ , i considerem la successió de vectors de  $V$ :  $\psi_0, \psi_1 := H_- \psi_0, \psi_2 := H_- \psi_1, \dots, \psi_s := H_- \psi_{s-1}, \dots$ ; aquests vectors són vectors propis de  $H_3$  de valors propis diferents  $\ell, \ell-1, \ell-2, \dots, \ell-s, \dots$ . De nou, com que  $V$  és de dimensió finita, la successió s'acaba en 0; és a dir, existeix  $s \in \mathbb{N}$  tal que  $\psi_s \neq 0$  i  $H_- \psi_s = 0$ .

**3.9. Proposició.** *Sigui  $W := \langle \psi_0, \dots, \psi_s \rangle$  el subespai vectorial de  $V$  generat pels vectors  $\psi_0, \dots, \psi_s$ . Llavors:*

- a) *El subespai  $W$  és invariant per als operadors  $H_3, H_+$  i  $H_-$ .*
- b)  *$\dim W = 2\ell + 1$ ; en particular,  $\ell \in \mathbb{N}$  o bé  $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ .*
- c) *Els valors propis de  $H_3$  en  $W$  són  $-\ell, -\ell+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell-1, \ell$ .*
- d) *Tots els vectors  $\psi_0, \dots, \psi_s$  són vectors propis de l'operador  $A := A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$  associats al mateix valor propi,  $-\ell(\ell+1)$ .*
- e) *La restricció de la representació  $\rho$  al subespai  $W$  és irreductible.*

DEMOSTRACIÓ. La relació  $[H_+, H_-] = 2H_3$  ens permet calcular recursivament l'acció de  $H_+$  sobre els vectors  $\psi_0, \dots, \psi_s$ . En primer lloc, observem que, per definició de  $\psi_0$ , és  $H_+ \psi_0 = 0$ . A continuació, podem escriure

$$\begin{aligned} H_+ \psi_1 &= H_+ H_- \psi_0 = [H_+, H_-] \psi_0 + H_- H_+ \psi_0 \\ &= 2H_3 \psi_0 = 2\ell \psi_0. \end{aligned}$$

Anàlogament,

$$\begin{aligned} H_+ \psi_2 &= H_+ H_- \psi_1 = [H_+, H_-] \psi_1 + H_- H_+ \psi_1 \\ &= 2H_3 \psi_1 + H_- (2\ell \psi_0) = (2\ell - 1)2\psi_1. \\ H_+ \psi_3 &= H_+ H_- \psi_2 = [H_+, H_-] \psi_2 + H_- H_+ \psi_2 \\ &= 2H_3 \psi_2 + H_- ((2\ell - 2)2\psi_1) = (2\ell - 2)3\psi_2. \end{aligned}$$

Per recurrència, si posem  $H_+ \psi_t = (2\ell - t + 1)t\psi_{t-1}$ , obtenim les igualtats

$$\begin{aligned} H_+ \psi_{t+1} &= H_+ H_- \psi_t = [H_+, H_-] \psi_t + H_- H_+ \psi_t \\ &= 2H_3 \psi_t + H_- ((2\ell - t + 1)t\psi_{t-1}) = (2\ell - t)(t + 1)\psi_t; \end{aligned}$$

i, finalment, la relació  $H_+ \psi_s = (2\ell - s + 1)s\psi_{s-1}$ .

Així, hem provat que el subespai  $W$  és invariant per  $H_+$ . D'altra banda, com que els vectors  $\psi_0, \dots, \psi_s$  són vectors propis de  $H_3$ ,  $W$  és invariant per  $H_3$ ; i, per construcció dels vectors  $\psi_{t+1} := H_- \psi_t$ ,  $W$  és invariant per  $H_-$ . Per tant,  $W$  és invariant pels operadors  $H_3$ ,  $H_+$  i  $H_-$ ; de fet, l'acció dels operadors  $H_+$ ,  $H_-$  i  $H_3$  sobre els vectors  $\psi_t$  es pot resumir en la taula següent:

$$\begin{array}{lll}
H_3 \psi_0 = \ell \psi_0 & H_- \psi_0 = \psi_1 & H_+ \psi_0 = 0 \\
H_3 \psi_1 = (\ell - 1) \psi_1 & H_- \psi_1 = \psi_2 & H_+ \psi_1 = 2\ell \psi_0 \\
H_3 \psi_2 = (\ell - 2) \psi_2 & H_- \psi_2 = \psi_3 & H_+ \psi_2 = (2\ell - 1) 2\psi_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
H_3 \psi_t = (\ell - t) \psi_t & H_- \psi_t = \psi_{t+1} & H_+ \psi_t = (2\ell - t + 1) t \psi_{t-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
H_3 \psi_s = (\ell - s) \psi_s & H_- \psi_s = 0 & H_+ \psi_s = (2\ell - s + 1) s \psi_{s-1}
\end{array}$$

Això demostra *a*).

Si ara tenim en compte, de nou, la relació  $[H_+, H_-] = 2H_3$ , obtenim la igualtat

$$\begin{aligned}
2(\ell - s) \psi_s &= 2H_3 \psi_s = [H_+, H_-] \psi_s \\
&= H_+ H_- \psi_s - H_- H_+ \psi_s = -H_- (2\ell - s + 1) s \psi_{s-1} \\
&= -(2\ell - s + 1) s \psi_s;
\end{aligned}$$

com que  $\psi_s \neq 0$ , és  $0 = 2(\ell - s) + s(2\ell - s + 1) = (2\ell - s)(s + 1)$ , d'on deduïm que  $s = 2\ell$ , perquè  $s \geq 0$ ; en particular,  $\dim W = s + 1 = 2\ell + 1$ , fet que demostra *b*).

A més a més, com que els valors propis de  $H_3$  sobre els vectors  $\psi_0, \dots, \psi_{2\ell}$  són, respectivament,  $\ell, \ell - 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, -\ell$ , obtenim *c*).

Per a veure *d*), considerem les relacions  $H_- + H_+ = 2iA_1$ ,  $H_- - H_+ = 2A_2$ , i  $H_3 = iA_3$ . De la definició de  $A$ , obtenim les igualtats  $A = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = -H_3^2 - H_3 - H_- H_+$ . En conseqüència, un càlcul senzill demostra que  $A \psi_t = -\ell(\ell + 1) \psi_t$ .

Finalment, per a provar *e*), es tracta de veure, d'una banda, que l'acció de  $\rho$  es pot restringir a  $W$ ; i, de l'altra, que la restricció de  $\rho$  a  $W$  és

una representació irreductible. Per a veure la primera propietat, cal usar la commutativitat de les aplicacions exponencials amb les representacions  $\rho$  i  $d\rho$  (cf. [Pi73, p. 60]): en efecte, dir que  $W$  és un subespai invariant per als operadors  $H_+$ ,  $H_-$  i  $H_3$ , equival a dir que ho és per als operadors  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$ ; i, com que aquests són una base de la imatge de  $d\rho$ , això implica que el subespai  $W$  és invariant per a  $\rho$ . Per a la segona propietat, suposem que  $W' \subseteq W$ ,  $W' \neq 0$ , és un subespai invariant per a  $\rho$ ; llavors,  $W'$  és invariant per als operadors  $H_3$ ,  $H_+$  i  $H_-$ . Considerem un vector propi qualsevol no nul,  $v' \in W'$ , de la restricció de  $H_3$  a  $W'$ , i construïm, com abans, vectors  $\psi'_0, \dots, \psi'_{s'}$ , ara en  $W'$ . Afirmem que existeix  $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma_0 \neq 0$ , tal que  $\psi'_0 = \gamma_0 \psi_0$ ; com a conseqüència d'aquest fet, obtindrem que  $\psi_0 \in W'$  i, per la invariància de  $W'$  per a  $H_-$ , obtindrem la igualtat  $W' = W$ , que acaba la demostració.

Provem, doncs, l'afirmació. Com que  $\psi_0, \dots, \psi_{2\ell}$  és una base de  $W$ , existeixen nombres complexos  $\gamma_0, \dots, \gamma_{2s} \in \mathbb{C}$  tals que  $\psi'_0 = \sum_{t=0}^{2\ell} \gamma_t \psi_t$ ; volem veure que  $\gamma_t = 0$ , per a  $1 \leq t \leq 2\ell$ . Ara bé, d'aquesta relació obtenim que

$$0 = H_+ \psi'_0 = \sum_{t=0}^{2\ell} \gamma_t H_+ \psi_t = \sum_{t=0}^{2\ell} \gamma_t (2\ell - t + 1) t \psi_{t-1},$$

de manera que  $(2\ell - t + 1)t\gamma_t = 0$ , per a  $0 \leq t \leq 2\ell$ ; i aquestes relacions impliquen  $\gamma_t = 0$ , per a  $1 \leq t \leq 2\ell$ , com volíem veure.  $\Lambda$

**3.10. Observació.** Pel procediment que acabem de descriure, cada vector propi de  $H_3$  genera una subrepresentació irreductible de  $\rho$ ; com que  $H_3$  és diagonalitzable en una base de vectors propis, aquest procediment, aplicat de manera recursiva a l'ortogonal del subespai irreductible  $W$ , ens permet assegurar que  $\rho$  és la suma directa de representacions irreductibles, totes construïdes de la mateixa manera. El màxim,  $\ell$ , dels valors propis de  $H_3$ , s'anomena el pes de la representació  $\rho$ , i  $2\ell + 1$  és el màxim dels graus de les representacions irreductibles en què  $\rho$  descompon.

**3.11. Observació.** Sigui  $\lambda: T \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  la restricció de  $\rho$  al tor maximal  $T$  de  $\mathbf{SO}(3)$  (cf. la proposició 3.1). Llavors, cadascun dels vectors  $\psi_t$  genera un subespai (complex) de dimensió 1, invariant per a la representació  $\lambda$ .

En efecte, l'àlgebra de Lie de  $T$  és la subàlgebra de  $\mathfrak{so}(3)$  generada per  $I_3$ , de manera que  $d\lambda$  proporciona l'operador  $A_3$ , com a imatge de  $I_3$ , i, en conseqüència, l'operador  $H_3$ . A més a més, la commutativitat del diagrama

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{GL}(V) \\ \exp \uparrow & & \exp \uparrow \\ \mathbf{RI}_3 & \xrightarrow{d\lambda} & \text{End}(V) \end{array}$$

i el fet que l'aplicació exponencial  $\mathbf{RI}_3 \xrightarrow{\exp} T$  és exhaustiva ens diuen que la representació  $\lambda$  és donada per l'assignació  $\exp(\alpha_3 I_3) \mapsto \exp(\alpha_3 A_3)$ . Com a conseqüència, per a tot  $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ , és  $\lambda(\exp(\alpha_3 I_3))\psi_t = e^{-i(\ell-t)\alpha_3}\psi_t$ .

Això ens permet dir que la restricció de  $\lambda$  al subespai generat per  $\psi_t$  és el caràcter irreductible  $T \rightarrow T \rightarrow \mathbf{SU}(1)$  donat per l'assignació  $e^{i\alpha_3} \mapsto \exp(\alpha_3 I_3) \mapsto e^{-i(\ell-t)\alpha_3}$ ; és a dir, el caràcter irreductible que correspon al paràmetre  $-(\ell-t) \in \mathbb{Z}$  en la classificació del teorema 2.12. En particular, el pes de la representació  $\rho$  és determinat pel caràcter de la subrepresentació irreductible de  $\rho$  de dimensió màxima.

En resum, amb un canvi d'indexació dels vectors  $\psi_t$ , hem provat el resultat següent, que ens proporciona condicions necessàries que han de satisfer les representacions de  $\mathbf{SO}(3)$ . Aquestes condicions, encara que no són suficients, ens permetran determinar totes les representacions irreductibles tant de  $\mathbf{SO}(3)$  com de  $\mathbf{SU}(2)$ .

**3.12. Teorema.** *Sigui  $\rho : \mathbf{SO}(3) \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  una representació complexa, contínua, unitària, irreductible i no trivial. Llavors,  $\rho$  és determinada per la dimensió de  $V$ , que és de la forma  $\dim V = 2\ell + 1$ , amb  $\ell \in \mathbb{N}$ , o bé  $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ . A més a més, existeix una base ortogonal de  $V$ ,  $\psi_{-\ell}, \dots, \psi_\ell$ , i operadors de  $V$ ,  $H_+$ ,  $H_-$ ,  $H_3$ , associats a la representació, tals que  $H_- \psi_t = \psi_{t-1}$ ,  $H_3 \psi_t = t\psi_t$ ,  $H_+ \psi_t = (\ell - t)(\ell + t + 1)\psi_{t+1}$ , per a  $-\ell \leq t \leq \ell$ , on escrivim  $\psi_{-\ell-1} := 0$ . En particular, els valors propis de  $H_3$  són  $-\ell, -\ell + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell$ .  $\Lambda$*

## §4. Representacions de $\mathrm{SU}(2)$ i de $\mathrm{SO}(3)$

El teorema anterior ens diu, en particular, que si  $\rho$  és una representació irreductible de  $\mathrm{SO}(3)$ ,  $\rho$  és determinada per un nombre  $\ell \in \mathbb{N}$  o bé  $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , el pes. Però, és cert que donat  $\ell \in \mathbb{N}$  o bé  $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , existeix una representació unitària irreductible  $\rho^{(\ell)} : \mathrm{SO}(3) \rightarrow \mathrm{GL}(V)$  que tingui associat el pes  $\ell$ ? La resposta només és positiva si  $\ell \in \mathbb{N}$  i, per a demostrar-ho, és útil descriure les representacions irreductibles de  $\mathrm{SU}(2)$ .

**4.1. Proposició.**  *$\mathrm{SU}(2)$  és el recobriment simplement connex universal de  $\mathrm{SO}(3)$ . Més concretament, existeix una successió exacta de morfismes de grups,*

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \mathrm{SU}(2) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}(3) \rightarrow 1,$$

on  $\pi$  és un morfisme de grups de Lie.

**DEMOSTRACIÓ.** Comencem per parametritzar el grup de rotacions  $\mathrm{SO}(3)$  amb els angles d'Euler.

**4.2. Lema.** *Donada una rotació qualsevol  $g \in \mathrm{SO}(3)$ , existeixen nombres reals  $\varphi, \psi, \theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , tals que  $g = Z_\varphi X_\theta Z_\psi$ , on les matrius  $X_\theta$ ,  $Z_\varphi$  són de la forma*

$$X_\theta := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad Z_\varphi := \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**DEMOSTRACIÓ.** Suposem donada una rotació  $g$ ; per una rotació del tipus  $Z_{-\varphi}$ , portem el seu eix al pla  $Oyz$ ; a continuació, per una rotació del tipus  $X_{-\theta}$ , fem coincidir l'eix de rotació amb l'eix  $Oz$ , de manera que resulti una rotació del tipus  $Z_\psi$ ; és a dir, tenim una relació de la forma  $X_{-\theta} \circ Z_{-\varphi} \circ g = Z_\psi$ , d'on obtenim la relació que cerquem.  $\Lambda$

Procedim ara a la demostració de la proposició. Considerem l'espai vectorial subjacent a l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  de  $\mathrm{SU}(2)$ ; això és, l'espai vectorial real format per les matrius  $H \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$  que són hermitianes i de traça nul·la; és a dir, tals que  $\overline{H}^t = H$  i  $\mathrm{Tr}(H) = 0$ ; així,

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Evidentment,  $\mathfrak{su}(2)$  és un espai vectorial real de dimensió 3, que admet per base el conjunt format per les matrius de Pauli

$$h_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h_2 := \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \quad h_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

aquesta base permet identificar l'espai vectorial  $\mathfrak{su}(2)$  amb  $\mathbb{R}^3$  i, per tant, considerar, en  $\mathfrak{su}(2)$ , el producte escalar ordinari. La norma associada a aquest producte escalar és donada per  $N(H_x) := \langle H_x, H_x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -\det(H_x)$ , per a tota matriu  $H_x := \begin{bmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$ .

El grup  $\mathrm{SU}(2)$  actua per conjugació en  $\mathfrak{su}(2)$  de la manera següent: donades matrius  $A \in \mathrm{SU}(2)$  i  $H_x \in \mathfrak{su}(2)$ , la matriu  $AH_xA^{-1}$  pertany a  $\mathfrak{su}(2)$ . En efecte; per un canvi de base, la traça no canvia, de manera que la traça de  $AH_xA^{-1}$  és la mateixa que la de  $H_x$ ; és a dir, zero. D'altra banda, com que  $H_x$  és hermitiana i  $A$  és unitària ( $\bar{A}^t = A^{-1}$ ), se satisfà immediatament que  $AH_xA^{-1}$  també és hermitiana:  $(\overline{AH_xA^{-1}})^t = (\bar{A}^{-1})^t \bar{H}_x^t \bar{A}^t = AH_xA^{-1}$ .

Així, tenim una acció lineal de  $\mathrm{SU}(2)$  en  $\mathfrak{su}(2)$ ; és a dir, un morfisme de grups  $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{su}(2)) \simeq \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ . Aquest morfisme de grups té imatge inclosa en  $\mathbf{O}(3)$ ; és a dir, l'acció de  $\mathrm{SU}(2)$  es realitza per matrius ortogonals. En efecte, per a tota matriu  $A \in \mathrm{SU}(2)$  i tota matriu  $H_x \in \mathfrak{su}(2)$  és  $N(AH_xA^{-1}) = -\det(AH_xA^{-1}) = -\det(H_x) = N(H_x)$ , de manera que l'acció de  $\mathrm{SU}(2)$  respecta la norma i, en conseqüència, la matriu de la transformació  $H_x \mapsto AH_xA^{-1}$  és una matriu ortogonal per al producte escalar ordinari de  $\mathbb{R}^3$ .

Per tant, disposem d'un morfisme de grups (continu)  $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathbf{O}(3)$ . El nucli del morfisme és  $\{\pm 1\}$ ; en efecte, una matriu unitària  $A$  pertany al nucli si, i només si,  $A$  commuta amb les tres matrius  $h_1$ ,  $h_2$  i  $h_3$ ; i un càlcul directe demostra que ha de ser  $A = \pm 1$ .

Només resta veure que la imatge del morfisme  $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathbf{O}(3)$  és exactament  $\mathbf{SO}(3)$ . Comencem per veure que la imatge està inclosa en  $\mathbf{SO}(3)$ . Per a això, observem que tota matriu  $A \in \mathrm{SU}(2)$  és de la forma  $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ , amb  $\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$ ; a més a més, tota matriu  $A \in \mathrm{SU}(2)$  és conjugada d'una de la forma  $b_\varphi := \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ , per a un cert

$\varphi \in \mathbb{R}$ , i l'element que conjuga és una matriu unitària; és a dir, per a tota matriu  $A \in \mathbf{SU}(2)$ , existeixen  $\varphi \in \mathbb{R}$  i  $B \in \mathbf{SU}(2)$  tals que  $A = Bb_\varphi B^{-1}$ . En particular, per a tot  $\varphi \in \mathbb{R}$ , l'acció de  $b_\varphi$  sobre les matrius  $h_1$ ,  $h_2$  i  $h_3$  proporciona les matrius

$$\begin{aligned} b_\varphi h_1 b_\varphi^{-1} &= \cos \varphi h_1 + \sin \varphi h_2, \\ b_\varphi h_2 b_\varphi^{-1} &= -\sin \varphi h_1 + \cos \varphi h_2, \\ b_\varphi h_3 b_\varphi^{-1} &= h_3; \end{aligned}$$

per tant, la matriu associada a l'acció de  $b_\varphi$  és la matriu  $Z_\varphi \in \mathbf{SO}(3)$ , de la rotació d'angle  $\varphi$  al voltant de l'eix  $Oz$ ; en particular, el seu determinant és 1. Per causa de la conjugació  $A = Bb_\varphi B^{-1}$ , les matrius associades a les accions  $H_x \mapsto AH_x A^{-1}$  són totes de determinant 1 i, en conseqüència, la imatge de  $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{O}(3)$  està inclosa en  $\mathbf{SO}(3)$ . Observem que, a més a més, hem provat que la imatge conté totes les matrius  $Z_\varphi$ .

Finalment, resta veure que el morfisme  $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SO}(3)$  és exhaustiu; per causa del lema 4.2 i del fet que les matrius  $Z_\varphi$  pertanyen a la imatge, és suficient veure que les matrius  $X_\theta$  també pertanyen a la imatge. Ara bé, per a tot  $\theta \in \mathbb{R}$ , és  $c_\theta := \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \in \mathbf{SU}(2)$ , i l'acció de  $c_\theta$  en les matrius  $h_1$ ,  $h_2$  i  $h_3$  és donada per la matriu  $X_\theta$  (càlcul directe); per tant, les matrius  $X_\theta$  també pertanyen a la imatge, com volíem veure. Això acaba la demostració de la proposició.  $\Lambda$

**4.3. Observació.** Una rotació qualsevol  $Z_\varphi X_\theta Z_\psi$  és la imatge de, precisament, les dues matrius

$$\pm b_\varphi c_\theta b_\psi = \pm \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\varphi+\psi}{2}} & i \sin \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\varphi-\psi}{2}} \\ i \sin \frac{\theta}{2} e^{-i \frac{\varphi-\psi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i \frac{\varphi+\psi}{2}} \end{bmatrix}.$$

**4.4. Corol·lari.** *Es té un isomorfisme  $\mathbf{SO}(3) \simeq \mathbf{SU}(2)/\{\pm 1\}$ ; en conseqüència, els grups de Lie  $\mathbf{SO}(3)$  i  $\mathbf{SU}(2)$  tenen associades àlgebres de Lie isomorfes.*  $\Lambda$



En la secció anterior hem trobat condicions necessàries que han de satisfer les representacions de  $\mathfrak{so}(3)$ ; com que els grups de Lie  $\mathbf{SO}(3)$  i  $\mathbf{SU}(2)$  tenen associades àlgebres de Lie isomorfes,  $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$ , aquestes condicions no només s'apliquen a les representacions de  $\mathbf{SO}(3)$ , sinó també a les representacions de  $\mathbf{SU}(2)$ . Per tant, obtenim el resultat següent:

**4.5. Corol·lari.** *Sigui  $\rho : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  una representació complexa, contínua, unitària, irreductible i no trivial. Llavors,  $\rho$  és determinada per la dimensió de  $V$ , que és de la forma  $\dim V = 2\ell + 1$ , amb  $\ell \in \mathbb{N}$ , o bé  $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ . A més a més, existeix una base ortogonal de  $V$ ,  $\psi_{-\ell}, \dots, \psi_{\ell}$ , i operadors de  $V$ ,  $H_+$ ,  $H_-$ ,  $H_3$ , associats a la representació, tals que  $H_- \psi_t = \psi_{t-1}$ ,  $H_3 \psi_t = t \psi_t$ ,  $H_+ \psi_t = (\ell - t)(\ell + t + 1) \psi_{t+1}$ , per a  $-\ell \leq t \leq \ell$ , on escrivim  $\psi_{-\ell-1} := 0$ . En particular, els valors propis de  $H_3$  són  $-\ell, -\ell + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \ell - 1, \ell$ .  $\Lambda$*

A continuació, obtenim les representacions irreductibles de  $\mathbf{SU}(2)$ .

**4.6. Teorema.** *Per a tot nombre  $\ell \in \mathbb{N}$  o bé  $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , existeix una representació unitària irreductible  $\rho^{(\ell)} : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{GL}(2\ell + 1, \mathbb{C})$ , única llevat d'isomorfisme. El pes  $\ell$  de la representació és determinat unívocament com el màxim dels valors propis de l'operador  $H_3$  associat a la representació.*

**DEMOSTRACIÓ.** Sigui  $r^{(\ell)} : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbf{GL}(V_{\ell})$  la representació de  $\mathfrak{so}(3) \simeq \mathfrak{su}(2)$  de pes  $\ell$ , construïda a partir d'una base ortonormal  $\psi_{-\ell}, \dots, \psi_{\ell}$  d'un espai vectorial unitari  $V_{\ell}$ , de dimensió  $2\ell + 1$ , en definir els operadors  $H_3$ ,  $H_+$  i  $H_-$  com més amunt.

Com que  $\mathbf{SU}(2)$  és simplement connex, tota representació de la seva àlgebra de Lie dóna lloc, en prendre exponencials, a una representació del grup de Lie. En efecte, les imatges dels operadors  $A_1$ ,  $A_2$  i  $A_3$  que corresponen als  $H_+$ ,  $H_-$  i  $H_3$  generen un subgrup de Lie de  $\mathbf{GL}(2\ell + 1, \mathbb{C})$ , i  $r^{(\ell)}$  és un isomorfisme local de  $\mathbf{SU}(2)$  en aquest grup de Lie; com que  $\mathbf{SU}(2)$  és simplement connex, aquest isomorfisme local s'estén a un morfisme de grups de Lie de tot  $\mathbf{SU}(2)$  (cf. [Pi 73, p. 114]).  $\Lambda$

Abans d'obtenir les representacions irreductibles de  $\mathbf{SO}(3)$ , observem alguns exemples.

#### 4.7. Exemples.

- La representació trivial  $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbb{C}^*$  és equivalent a la representació  $\rho^{(0)}$ . En efecte, la representació trivial és de dimensió 1; per tant és irreductible i, com que, de les representacions irreductibles,  $\rho^{(0)}$  és l'única de dimensió 1, han de ser equivalents.

- La representació identitat  $\mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{SU}(2) \subseteq \mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$  és, evidentment, irreductible, i és de dimensió 2; per tant, és equivalent a la representació  $\rho^{(\ell)}$  que correspon a  $2\ell + 1 = 2$ ; és a dir, a  $\ell = \frac{1}{2}$ .

- En general, la representació  $\rho^{(1/2)} \otimes \dots \otimes \rho^{(1/2)}$ ,  $k$  vegades, és tal que  $H_3$  té valor propi màxim igual a  $\frac{k}{2}$ . Per tant,  $\rho^{(k/2)}$  és equivalent a una subrepresentació irreductible d'aquesta, i es pot obtenir de manera explícita a partir d'un vector propi de valor propi  $\frac{k}{2}$ .

**4.8. Exercici.** Comproveu aquest fet (cf. [Pi 73, p. 120]).

Hom pot donar una altra descripció de les representacions irreductibles de  $\mathbf{SU}(2)$ .

**4.9. Proposició.** *Sigui  $P_n(\mathbb{C})$  l'espai vectorial complex dels polinomis homogenis de grau  $n$  en dues indeterminades  $X, Y$ . El grup  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$  actua de manera natural en  $P_n(\mathbb{C})$  per la fórmula*

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} f(X, Y) := f(aX + bY, cX + dY).$$

*Per restricció a  $\mathbf{SU}(2)$ , s'obté una representació  $\rho_n : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{GL}(P_n(\mathbb{C}))$ , de dimensió  $n+1$ , que és irreductible. En particular, les  $\rho_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , són les representacions irreductibles de  $\mathbf{SU}(2)$ :  $\rho_n \sim \rho^{(2\ell+1)}$ , per a  $n+1 = 2\ell+1$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** Cal veure que la representació  $\rho_n : \mathbf{SU}(2) \rightarrow \mathbf{GL}(P_n(\mathbb{C}))$  és irreductible; és a dir, que no hi ha subespais invariants no trivials. Suposem, doncs, que  $W \subseteq P_n(\mathbb{C})$ ,  $W \neq 0$ , és un subespai invariant per a  $\rho_n$ ; cal veure que  $W = P_n(\mathbb{C})$ . Sigui  $f(X, Y) = \sum_{k=0}^n a_k X^k Y^{n-k} \in W$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq k \leq n$ ,  $f(X, Y) \neq 0$ , un element no nul qualsevol de  $W$ . En particular, existeix algun índex  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , tal que  $a_k \neq 0$ .

Per a tot  $\varphi \in \mathbb{R}$ , l'acció de  $b_\varphi$  sobre  $f(X, Y)$  proporciona un polinomi de  $W$ ; concretament, obtenim que

$$e^{-in\frac{\varphi}{2}} \sum_{k=0}^n e^{ik\varphi} a_k X^k Y^{n-k} = b_\varphi f(X, Y) \in W.$$

Si ens pensem els productes  $a_k X^k Y^{n-k}$  com  $n+1$  incògnites, i prenem  $n+1$  valors diferents de  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , el sistema lineal d'equacions

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\varphi} a_k X^k Y^{n-k} = e^{in\frac{\varphi}{2}} b_\varphi f(X, Y),$$

és de Cramer, amb matriu associada  $[e^{ik\varphi}]$ , de Vandermonde; per tant, en resoldre'l, obtenim que  $a_k X^k Y^{n-k} \in W$ , per a  $0 \leq k \leq n$ ; i d'aquí s'obté que  $X^k Y^{n-k} \in W$ , per a tot índex  $k$  tal que  $a_k \neq 0$ .

Considerem, ara, un element qualsevol  $A := \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in \mathbf{SU}(2)$  tal que  $\alpha\beta \neq 0$ ; en aplicar aquest element a qualsevol monomi  $X^k Y^{n-k} \in W$ , obtenim un polinomi de  $W$ :

$$(\alpha X - \beta Y)^k (\bar{\beta} X + \bar{\alpha} Y)^{n-k} = A(X^k Y^{n-k}) \in W;$$

com que el coeficient de  $X^n$  en aquest polinomi és  $\alpha^k \bar{\beta}^{n-k} \neq 0$ , en aplicar la primera part d'aquesta prova al polinomi  $X^k Y^{n-k} \in W$ , obtenim que  $X^n \in W$ . Finalment, en aplicar  $A$  al monomi  $X^n \in W$ , obtenim que  $(\alpha X - \beta Y)^n = A(X^n) \in W$ ; com que aquest polinomi és

$$(\alpha X - \beta Y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \alpha^k (-\beta)^{n-k} X^k Y^{n-k},$$

i tots els seus coeficients són no nuls, deduïm que  $X^k Y^{n-k} \in W$ , per a tot  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Així,  $W$  conté una base de  $P_n(\mathbb{C})$ , de manera que  $W = P_n(\mathbb{C})$ , com volíem veure.  $\Lambda$

Podem calcular, ara, les representacions irreductibles de  $\mathbf{SO}(3)$ .

**4.10. Teorema.** *Les representacions unitàries irreductibles de  $\mathbf{SO}(3)$  estan en correspondència bijectiva amb els nombres naturals  $\ell \in \mathbb{N}$ . Són de dimensió senar  $2\ell+1$ , i el pes  $\ell$  de la representació és determinat unívocament com el màxim dels valors propis de l'operador  $H_3$  associat a la representació.*

DEMOSTRACIÓ. Considerem la successió exacta  $1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \mathbf{SU}(2) \xrightarrow{\pi} \mathbf{SO}(3) \rightarrow 1$ ; per composició amb  $\pi$ , les representacions de  $\mathbf{SO}(3)$  són exactament les de  $\mathbf{SU}(2)$  que són trivials en  $\{\pm 1\}$ ; a més a més les representacions irreductibles de  $\mathbf{SO}(3)$  es corresponen amb les representacions irreductibles de  $\mathbf{SU}(2)$  trivials sobre  $\{\pm 1\}$ . Per tant, el càlcul de les representacions irreductibles de  $\mathbf{SO}(3)$  es redueix a observar quines de les representacions  $\rho^{(\ell)}$  de  $\mathbf{SU}(2)$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , o bé  $\ell \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ , són trivials en  $-1$ .

Considerem les representacions  $\rho_n$ ; és clar que la matriu  $-1$  actua sobre el polinomi  $X^k Y^{n-k}$  en la forma  $-1(X^k Y^{n-k}) = (-1)^n X^k Y^{n-k}$  i, per tant,  $\rho_n$  és trivial en  $X^k Y^{n-k}$  si, i només si,  $n$  és parell. Això acaba la prova, perquè  $n = 2\ell$ , de manera que  $n$  és parell si, i només si,  $\ell \in \mathbb{N}$ .  $\Lambda$

## §5. Els harmònics esfèrics

Una de les primeres aplicacions del coneixement de les representacions irreductibles de  $\mathbf{SO}(3)$  és l'obtenció de bases d'espais de funcions complexes infinitament derivables de l'esfera unitat,  $S^2$ . El procediment consisteix a considerar una representació de  $\mathbf{SO}(3)$  i fer el càlcul de les representacions irreductibles en què aquesta descompon.

Considerem l'esfera  $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ , descrita com a varietat diferenciable (analítica) mitjanant les coordenades polars; és a dir, posem

$$S^2 = \{(\theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

via el canvi de variables

$$x := \sin \theta \cos \varphi, \quad y := \sin \theta \sin \varphi, \quad z := \cos \theta.$$

L'espai  $D(S^2)$  de les funcions complexes infinitament derivables sobre l'esfera és un subespai dens de l'espai  $L^2(S^2)$ , de les (classes de) funcions complexes de quadrat integrable sobre  $S^2$ . En particular, indicarem una funció qualsevol de  $L^2(S^2)$  per  $f := f(\theta, \varphi)$ .

El primer pas consisteix a donar una representació explícita de  $\mathbf{SO}(3)$  en l'espai de Hilbert  $L^2(S^2)$ .

El grup  $\mathbf{SO}(3)$  actua de manera natural (per rotacions) en  $\mathbb{R}^3$ ; i l'esfera  $S^2$  és l'òrbita de qualsevol dels seus punts per aquesta acció; és a dir, l'esfera  $S^2$  és una de les òrbites de l'acció natural de  $\mathbf{SO}(3)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Doncs, obtenim una acció de  $\mathbf{SO}(3)$  en  $S^2$ .

Associada a aquesta acció, podem considerar l'acció de  $\mathbf{SO}(3)$  en  $L^2(S^2)$  donada per translacions a l'esquerra:

$$\begin{aligned}\rho: \mathbf{SO}(3) &\rightarrow \mathbf{GL}(L^2(S^2)) \\ g &\mapsto \rho_g: L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2) \\ f &\mapsto f \circ g^{-1} \\ f(\theta, \varphi) &\mapsto f(g^{-1}(\theta, \varphi)).\end{aligned}$$

**5.1. Proposició.** *La representació  $\rho$  que acabem de definir és unitària.*

DEMOSTRACIÓ. La mesura  $d\Omega := \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\varphi$  sobre l'esfera  $S^2$  és invariant per l'acció de  $\mathbf{SO}(3)$  (exercici). Com a conseqüència d'aquest fet, per a tota funció  $f(\theta, \varphi) \in L^2(S^2)$  és

$$\int_S |\rho_g f|^2 d\Omega = \int_S |f|^2 d\Omega;$$

és a dir, la forma hermitiana de  $L^2(S^2)$ ,

$$(f, g) \mapsto \int_S f \bar{g} d\Omega,$$

és invariant per a  $\rho$ , com calia demostrar.  $\Lambda$

A continuació, convé estudiar la descomposició de la representació  $\rho$  en suma directa (hilbertiana) de representacions irreductibles. Abans, però, és útil observar que el subespai  $D(S^2) \subseteq L^2(S^2)$  és invariant per a  $\rho$ , fet que és evident perquè les rotacions són infinitament derivables, de manera que podem pensar  $\rho$  com una representació

$$\rho: \mathbf{SO}(3) \rightarrow \mathbf{GL}(D(S^2)).$$

Ara, per la teoria general (cf. el teorema 1.17), sabem que l'espai  $D(S^2)$  descompon com a suma directa hilbertiana de subespais invariants irreductibles, i que aquests subespais són de dimensions senars  $2\ell + 1$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  (cf. el teorema 4.10).

Sigui  $W \subseteq D(S^2)$  un subespai invariant irreductible de dimensió  $2\ell + 1$ . Es tracta de calcular explícitament una base de  $W$  i, per a això, convé fer el càlcul explícit dels operadors  $A_1$ ,  $A_2$ , i  $A_3$  de  $D(S^2) \subseteq L^2(S^2)$ .

**5.2. Proposició.** *Els operadors  $A_1$ ,  $A_2$ , i  $A_3$  de  $D(S^2)$  associats a la representació  $\rho$  admeten les expressions*

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cotg \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ A_2 &= -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cotg \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ A_3 &= -\frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

**DEMOSTRACIÓ.** Convé considerar una parametrització adequada de la varietat analítica  $\mathbf{SO}(3)$ . Donada una rotació qualsevol,  $g \in \mathbf{SO}(3)$ , sigui  $g =: g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , on  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$  és el vector director de l'eix de la rotació  $g$  que té mòdul  $0 < \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \leq 2\pi$  igual a l'angle de la rotació. Amb aquesta parametrització de  $\mathbf{SO}(3)$ , una base de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  correspon als camps en l'origen

$$\left( \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \right)_0;$$

en efecte, les rotacions  $g(\alpha_1, 0, 0)$ ,  $g(0, \alpha_2, 0)$ ,  $g(0, 0, \alpha_3)$  són independents (corresponen a tres eixos independents de les cartes locals en l'origen) i tenen matrius

$$\begin{aligned} g(\alpha_1, 0, 0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix}, \\ g(0, \alpha_2, 0) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix}, \\ g(0, 0, \alpha_3) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de manera que els camps diferencials en l'origen són

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g(\alpha_1, 0, 0)}{\partial \alpha_1}\right)_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = I_1, \\ \left(\frac{\partial g(0, \alpha_2, 0)}{\partial \alpha_2}\right)_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I_2, \\ \left(\frac{\partial g(0, 0, \alpha_3)}{\partial \alpha_3}\right)_0 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I_3,\end{aligned}$$

que és la base que hem usat en la secció 3 per a la descripció de les representacions de  $\mathfrak{so}(3)$ . Així, una rotació qualsevol  $g = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  es pot escriure en la forma  $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \exp(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3)$ .

Per a  $1 \leq i \leq 3$ ,  $A_i$  és la imatge de  $I_i$  per la representació diferencial associada a  $\rho$ ; és a dir,  $A_i$  és la imatge de  $I_i$ , com a operador que pertany a l'àlgebra de Lie de  $\rho(\mathbf{SO}(3))$ . El càlcul general següent expressa  $A_i$  de manera adequada: en primer lloc, és immediat comprovar que  $A_i = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \exp(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\right)_0$ ; i, en conseqüència,

$$A_i = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \exp(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\right)_0 = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \rho(g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))\right)_0,$$

relació que s'obté de la igualtat  $\exp(\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3) = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , en aplicar  $\rho$  i derivar en l'origen. Finalment, per a calcular la derivada parcial respecte de  $\alpha_i$  en l'origen, podem prendre la rotació  $g(0, \dots, \alpha_i, \dots, 0)$ , en lloc de  $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  (fet que equival a fer la derivada direccional en la direcció de la corba  $\alpha_j = 0$ ,  $j \neq i$ ).

Per a la rotació  $g = g(0, \dots, \alpha_i, \dots, 0)$ , posem  $(\theta', \varphi') := g^{-1}(\theta, \varphi)$ . En particular, per a una funció  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , serà  $f(g^{-1}(\theta, \varphi)) = f(\theta', \varphi')$ , de manera que

$$\begin{aligned}A_i f(\theta, \varphi) &= \left(\frac{\partial f(\theta', \varphi')}{\partial \alpha_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \\ &= \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \frac{\partial f}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \frac{\partial f}{\partial \varphi};\end{aligned}$$

és a dir,

$$A_i = \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_i}\right)_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Ara, per a aplicar aquest càlcul a cada una de les rotacions  $g(\alpha_1, 0, 0)$ ,  $g(0, \alpha_2, 0)$ ,  $g(0, 0, \alpha_3)$ , cal calcular, en cada cas, les tres parelles de funcions  $(\theta', \varphi')$ . De fet, només cal calcular les tres parelles de coeficients  $\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_i}\right)_0$  i  $\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_i}\right)_0$ .

Per a la rotació  $g = g(0, 0, \alpha_3)$ , és, clarament,  $(\theta', \varphi') = (\theta, \varphi - \alpha_3)$ , de manera que s'obté immediatament que  $A_3 f(\theta, \varphi) = -\frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial \varphi}$ .

D'altra banda, per a la rotació  $g = g(\alpha_1, 0, 0)$ , les funcions  $(\theta', \varphi')$  són caracteritzades per la igualtat

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sin \theta' \cos \varphi' \\ \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \alpha_1 \sin \theta \sin \varphi + \sin \alpha_1 \cos \theta \\ -\sin \alpha_1 \sin \theta \sin \varphi + \cos \alpha_1 \cos \theta \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

per tant, en derivar parcialment respecte de  $\alpha_1$ , obtenim les relacions

$$\begin{aligned} \cos \theta' \cos \varphi' \frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_1} - \sin \theta' \sin \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_1} &= 0 \\ \cos \theta' \sin \varphi' \frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_1} + \sin \theta' \cos \varphi' \frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_1} &= -\sin \alpha_1 \sin \theta \sin \varphi + \cos \alpha_1 \cos \theta \\ -\sin \theta' \frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_1} &= -\cos \alpha_1 \sin \theta \sin \varphi - \sin \alpha_1 \cos \theta \end{aligned}$$

que, en l'origen ( $\alpha_1 = 0$ ), proporcionen les fórmules

$$\begin{aligned} \cos \theta \cos \varphi \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_1}\right)_0 - \sin \theta \sin \varphi \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_1}\right)_0 &= 0 \\ \cos \theta \sin \varphi \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_1}\right)_0 + \sin \theta \cos \varphi \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_1}\right)_0 &= \cos \theta \\ -\sin \theta \left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_1}\right)_0 &= -\sin \theta \sin \varphi, \end{aligned}$$

de manera que

$$\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_1}\right)_0 = \sin \varphi, \quad \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_1}\right)_0 = \cotg \theta \cos \varphi.$$



Finalment, en repetir el càlcul per a la rotació  $g = g(0, \alpha_2, 0)$ , obtenim que

$$\left(\frac{\partial \theta'}{\partial \alpha_2}\right)_0 = -\cos \varphi, \quad \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \alpha_2}\right)_0 = \cotg \theta \sin \varphi.$$

En conseqüència, obtenim les expressions que volíem per als operadors  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .  $\Lambda$

Sigui  $\psi_{-\ell}, \dots, \psi_\ell$ , com en la teoria general, una base de  $W$ ; els vectors  $\psi_m$  són vectors propis de  $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$  de valor propi  $-\ell(\ell+1)$ ; i, a més a més,  $H_3 \psi_m = m \psi_m$ , per a  $-\ell \leq m \leq \ell$ . Així, el vector  $\psi_m$ ,  $-\ell \leq m \leq \ell$ , és una solució  $f$  del sistema de dues equacions diferencials

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell+1)f &= 0 \\ -i \frac{\partial f}{\partial \varphi} &= mf, \end{aligned}$$

que s'obté immediatament de les expressions anteriors dels  $A_1$ ,  $A_2$ , i  $A_3$ .

En resoldre la segona equació, obtenim que la funció  $f$  és de la forma  $f(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} F(\theta)$ , per a una certa funció  $F(\theta)$ ; però, per la forma de la primera equació, podem prendre  $F(\theta) = P(\cos \theta)$ , per a una certa funció  $P(x)$ , que satisfà l'equació diferencial ordinària

$$(1-x^2)^2 \frac{d^2 P(x)}{dx^2} - 2x(1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} + (\ell(\ell+1)(1-x^2) - m^2)P(x) = 0.$$

En resoldre aquestes equacions, una per a cada valor de  $m$ ,  $-\ell \leq m \leq \ell$ , s'obté una base de  $W$  de la forma

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \theta), \quad -\ell \leq m \leq \ell,$$

i les funcions  $P_\ell^m(x)$ , per a  $m, \ell \in \mathbb{Z}$ , admeten les expressions

$$P_\ell^m(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2}} \frac{1}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{\ell+|m|}(x^2-1)^\ell}{dx^{\ell+|m|}}.$$

**5.3. Corol·lari.** Les funcions  $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos \theta)$ , per a  $\ell \geq 0$ ,  $-\ell \leq m \leq \ell$ , són un sistema complet de funcions de l'espai  $D(S^2)$ , de

les funcions complexes infinitament derivables de  $S^2$ . Per a cada valor de  $\ell$  fix, les funcions  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ , per a  $-\ell \leq m \leq \ell$ , són una base de la representació irreductible de  $\mathrm{SO}(3)$  de dimensió  $2\ell + 1$ . S'anomenen les funcions esfèriques.  $\Lambda$

## §6. L'equació de Schrödinger

En mecànica quàntica, una partícula sotmesa a un camp central definit per un potencial és caracteritzada per una funció  $\psi$  de la posició de la partícula, el quadrat del mòdul de la qual representa la probabilitat de presència (cf. l'exposició següent en aquest mateix seminari). La funció  $\psi$  s'anomena la funció d'ona.

Recordem que un camp definit per un potencial s'anomena central quan el potencial és donat per una funció de la forma  $V = V(r)$ , on  $r$  denota el vector posició respecte de l'origen del camp. En aquest cas, l'equació d'ona satisfà l'equació de Schrödinger

$$\left(-\frac{h^2}{2m_0}\Delta + V(r)\right)\psi = E\psi,$$

on  $h$  és la constant de Plank,  $m_0$  la massa de la partícula (que se suposa que és constant en mecànica quàntica clàssica, i que és la massa en repòs en mecànica quàntica relativista),  $E$  l'energia (constant) de la partícula, i  $\Delta$  l'operador de Laplace, que en coordenades cartesianes  $(x, y, z)$  admet l'expressió

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Posarem  $H := -\frac{h^2}{2m_0}\Delta + V(r)$ , l'operador de Hamilton associat al potencial  $V(r)$ . Evidentment, el domini de definició de l'operador  $H$  no és tot  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , sinó un cert subconjunt,  $\mathcal{D}(H) \subseteq L^2(\mathbb{R}^3)$ , que conté les funcions prou derivables (si el potencial  $V(r)$  és prou derivable). D'aquesta manera, l'equació de Schrödinger admet l'expressió compacta  $H\psi = E\psi$ . L'objectiu d'aquesta secció és resoldre l'equació de Schrödinger.

Convé començar per algunes consideracions generals. En primer lloc, com que les rotacions de  $\mathbf{SO}(3)$  actuen com a isometries de  $\mathbb{R}^3$ , la mesura de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$  és invariant per aquesta acció. Com a conseqüència, obtenim el resultat següent.

**6.1. Corol·lari.** *Sigui  $\rho$  l'aplicació*

$$\begin{aligned}\rho : \mathbf{SO}(3) &\rightarrow \mathbf{GL}(L^2(\mathbb{R}^3)) \\ g &\mapsto \rho_g : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \\ \psi &\mapsto \rho_g \psi := \psi \circ g^{-1};\end{aligned}$$

*és a dir,  $\rho_g \psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  és la funció definida per  $P \mapsto \psi(g^{-1}P)$ . Llavors,  $\rho$  és una representació unitària (contínua) de  $\mathbf{SO}(3)$ .  $\Lambda$*

**6.2. Proposició.** *Sigui  $\rho_1 : \mathbf{SO}(3) \rightarrow \mathbf{GL}(L^2(\mathbb{R}^+))$  la representació trivial, definida per  $\rho_{1,g}\Phi(r) := \Phi(r)$ , per a tota rotació  $g \in \mathbf{SO}(3)$ , tota funció  $\Phi \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , i tot element  $r \in \mathbb{R}^+$ . Sigui  $\rho_2 : \mathbf{SO}(3) \rightarrow \mathbf{GL}(L^2(S^2))$  la representació natural que hem anomenat  $\rho$  en la secció anterior. Llavors,  $\rho_1 \otimes \rho_2$  és una subrepresentació de  $\rho$ .*

**DEMOSTRACIÓ.** El producte d'una funció  $\Phi(r) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ , per una funció  $f(\theta, \varphi) \in L^2(S^2)$ , és una funció  $\psi(r, \theta, \varphi) := \Phi(r)f(\theta, \varphi) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ , on  $\mathbb{R}^3$  es descriu en coordenades polars. Considerem el canvi de coordenades cartesianes  $(x, y, z)$  a coordenades polars  $(r, \theta, \varphi)$ , donat per

$$\begin{aligned}x &:= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &:= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &:= r \cos \theta.\end{aligned}$$

El canvi de coordenades converteix la funció  $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$  en una altra funció  $\psi = \psi(x, y, z)$ ; per tant,  $L^2(\mathbb{R}^+) \otimes L^2(S^2)$  s'identifica amb un subespai de  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ; a més a més, la representació  $\rho_1 \otimes \rho_2$  coincideix amb la restricció de  $\rho$  al subespai  $L^2(\mathbb{R}^+) \otimes L^2(S^2)$ .  $\Lambda$

**6.3. Proposició.** *Sigui  $D^2(\mathbb{R}^3) \subseteq L^2(\mathbb{R}^3)$  l'espai de les funcions complexes de  $\mathbb{R}^3$  dues vegades derivables amb continuïtat. Llavors, la representació  $\rho$*

i l'operador de Laplace commuten en  $D^2(\mathbb{R}^3)$ ; és a dir, per a tot  $g \in \mathbf{SO}(3)$  i tota funció  $\psi \in D^2(\mathbb{R}^3)$  és  $\rho_g \Delta \psi = \Delta \rho_g \psi$ .

DEMOSTRACIÓ. Sigui  $g \in \mathbf{SO}(3)$  una rotació qualsevol. Si un punt  $x := (x_1, x_2, x_3)$  es transforma en un punt  $g(x) = y := (y_1, y_2, y_3)$ , és

$$y_j = \sum_{k=1}^3 g_{k,j} x_k,$$

on  $[g_{i,j}]$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , és la matriu de la rotació  $g$ . Llavors,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^3 g_{k,j} \frac{\partial}{\partial y_j};$$

de manera que

$$\Delta = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{k,j} g_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_l} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial y_j^2},$$

ja que la matriu  $g$  és ortogonal i, per definició, és

$$\sum_{k=1}^3 g_{k,j} g_{k,l} = \delta_{j,l} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = l, \\ 0, & \text{si } j \neq l. \end{cases}$$

Això demostra que l'operador de Laplace és invariant per rotació, d'on la proposició se segueix immediatament. En efecte, aquesta propietat ens diu que, per a tota funció  $\psi$  i tota rotació  $g$ , és  $\Delta(\psi \circ g^{-1}) = (\Delta \psi) \circ g^{-1}$ ; per tant, per a tot punt  $P$ ,

$$(\rho_g \Delta \psi)(P) = (\Delta \psi)(g^{-1}P) = (\Delta(\psi \circ g^{-1}))(P) = (\Delta \rho_g \psi)(P),$$

com volíem veure.  $\Lambda$

Per definició de camp central, obtenim el resultat següent.

**6.4. Corol·lari.** *La representació  $\rho$  commuta amb l'operador de Hamilton  $H$  associat a un camp central donat per un potencial  $V = V(r)$ ; és a dir, per a tot  $g \in \mathbf{SO}(3)$  i tota funció  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  és  $\rho_g H \psi = H \rho_g \psi$ .  $\Lambda$*

Anem a procedir, ara, a la resolució de l'equació de Schrödinger,  $H\psi = E\psi$ .

Sigui  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  una funció pròpia de l'operador de Hamilton, de valor propi associat  $E$ ; és a dir, sigui  $\psi$  una solució de l'equació de Schrödinger. Llavors, per a tot  $g \in \mathbf{SO}(3)$ ,  $\rho_g \psi$  és una altra solució amb el mateix valor propi. Això és degut al fet que la representació  $\rho$  i l'operador de Hamilton commuten:  $H(\rho_g \psi) = \rho_g H \psi = \rho_g E \psi = E \rho_g \psi$ .

Considerem, ara, el conjunt de totes les solucions de l'equació que corresponen al valor propi  $E$ . Acabem de veure que aquest conjunt és un subespai de representació de  $\mathbf{SO}(3)$ , dins de  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ; i podem descompondre aquesta representació com a suma de representacions irreductibles. En particular, obtindrem subespais de dimensions finites  $2\ell + 1$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ .

En aquests subespais irreductibles, podem obtenir les bases canòniques per resolució dels sistemes

$$(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\psi + \ell(\ell + 1)\psi = 0,$$

$$H_3\psi = iA_3\psi = m\psi,$$

on  $m$  recorre l'interval  $-\ell \leq m \leq \ell$ , i on els operadors  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  són donats per les expressions

$$A_1 = x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$A_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$A_3 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

En efecte; recordem que, per a una representació  $\rho$  de  $\mathbf{SO}(3)$ , hem escrit  $A_i$  en la forma  $A_i = \left( \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \rho(g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \right)_0$ , i que podem usar les rotacions  $g(0, \dots, \alpha_i, \dots, 0)$  en lloc de  $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Sigui  $g \in \mathbf{SO}(3)$  la rotació  $g(0, \dots, \alpha_i, \dots, 0)$ , i posem  $(x', y', z') := g^{-1}(x, y, z)$ . Llavors, per a tota funció  $f(x, y, z)$ , és

$$\left( \frac{\partial f(g^{-1}(x, y, z))}{\partial \alpha_i} \right)_0 = \left( \frac{\partial f}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial f}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial \alpha_i} \right)_0.$$

Per a cada una de les rotacions  $g = g(0, \dots, \alpha_i, \dots, 0)$ , els càlculs de les derivades parcials  $\frac{\partial x'}{\partial \alpha_i}$ ,  $\frac{\partial y'}{\partial \alpha_i}$ ,  $\frac{\partial z'}{\partial \alpha_i}$  ens proporcionen les fórmules

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_1} &= 0, & \frac{\partial x'}{\partial \alpha_2} &= -\sin \alpha_2 x - \cos \alpha_2 z, \\ \frac{\partial y'}{\partial \alpha_1} &= -\sin \alpha_3 y + \cos \alpha_3 z, & \frac{\partial y'}{\partial \alpha_2} &= 0, \\ \frac{\partial z'}{\partial \alpha_1} &= -\cos \alpha_3 y - \sin \alpha_3 z, & \frac{\partial z'}{\partial \alpha_2} &= \cos \alpha_2 x - \sin \alpha_2 z,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'}{\partial \alpha_3} &= -\sin \alpha_1 x + \cos \alpha_1 y, \\ \frac{\partial y'}{\partial \alpha_3} &= -\cos \alpha_1 x - \sin \alpha_1 y, \\ \frac{\partial z'}{\partial \alpha_3} &= 0,\end{aligned}$$

que, en substituir en l'origen, produeixen les expressions que volem per als operadors  $A_1, A_2, A_3$ .

Cal, doncs, procedir a la resolució del sistema

$$\begin{aligned}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\psi + \ell(\ell+1)\psi &= 0, \\ H_3\psi = iA_3\psi = m\psi, & \quad -\ell \leq m \leq \ell.\end{aligned}$$

**6.5. Observació.** En física quàntica, en lloc dels operadors anteriors convé utilitzar els operadors d'impuls,

$$p_j := -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq 3,$$

i els operadors de moment cinètic (o de quantitat de moviment),

$$L_j := i\hbar A_j, \quad 1 \leq j \leq 3;$$

amb aquests operadors, els sistemes diferencials es converteixen en els equivalents

$$\begin{aligned}(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)\psi &= \hbar^2 \ell(\ell+1)\psi, \\ L_3\psi &= \hbar m\psi, \quad -\ell \leq m \leq \ell.\end{aligned}$$

Cercarem solucions del sistema que siguin de la forma  $\psi(r, \theta, \varphi) = \Phi(r)Y(\theta, \varphi)$ . Observem, en primer lloc, el resultat següent, la demostració del qual es deixa com a exercici per al lector.

**6.6. Lema.** *Siguin  $A_{i,2}$  els operadors  $A_i$  que corresponen a la representació  $\rho_2$ . Per a  $1 \leq i \leq 3$ , i per a  $\psi = \Phi Y$ , és  $A_i(\psi) = A_i(\Phi Y) = \Phi A_{i,2}(Y)$ .  $\Lambda$*

Com a conseqüència, obtenim una base de funcions pròpies de l'operador de Hamilton.

**6.7. Corol·lari.** *Una base de funcions pròpies de l'operador de Hamilton  $H$  és formada per funcions  $\psi_\ell^m$ ,  $-\ell \leq m \leq \ell$ , de la forma*

$$\psi_\ell^m(r, \theta, \varphi) = \Phi(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi),$$

on les funcions  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  són les funcions esfèriques i  $\Phi(r)$  satisfà l'equació diferencial ordinària

$$-\frac{h}{2m_0} \left( \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) - \ell(\ell+1) \frac{\Phi}{r^2} \right) + (V(r) - E)\Phi = 0.$$

DEMOSTRACIÓ. El lema anterior ens permet assegurar que una funció de la forma  $\psi(r, \theta, \varphi) := \Phi(r) Y(\theta, \varphi)$  és una solució del sistema

$$(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)\psi + \ell(\ell+1)\psi = 0,$$

$$H_3\psi = iA_3\psi = m\psi,$$

per a  $-\ell \leq m \leq \ell$ , si, i només si,  $Y$  és una solució del sistema

$$(A_{1,2}^2 + A_{2,2}^2 + A_{3,2}^2)Y + \ell(\ell+1)Y = 0,$$

$$iA_{3,2}Y = mY,$$

per a  $-\ell \leq m \leq \ell$ . Per tant, una base de l'espai de representació irreductible en què ens movem és de la forma  $\Phi(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ , amb  $\Phi(r)$  una certa funció i  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  les funcions esfèriques. Ara bé, no qualsevol funció  $\Phi(r)$  és tal que  $\Phi(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  pertany a aquest espai; cal que  $\psi = \Phi Y$  satisfaci l'equació de Schrödinger. Per a calcular  $\Phi(r)$ , doncs, escrivim l'equació de Schrödinger en coordenades polars.

L'operador de Laplace admet l'expressió

$$\Delta\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\cot\theta}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2};$$

per tant, si tenim en compte la relació  $\psi(r, \theta, \varphi) = \Phi(r)Y(\theta, \varphi)$ , l'equació de Schrödinger admet l'expressió

$$-\frac{2m_0}{\hbar^2}(E - V(r))\Phi(r)Y(\theta, \varphi) = \frac{d^2\Phi(r)}{dr^2}Y(\theta, \varphi) + \frac{1}{r^2}\Phi(r)\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\Phi(r)\frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}Y(\theta, \varphi)\frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{\cotg \theta}{r^2}\Phi(r)\frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta}.$$

Si ara tenim en compte que cada una de les funcions esfèriques satisfà el sistema diferencial

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell + 1)Y(\theta, \varphi) = 0$$

$$-i \frac{\partial Y(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = m f,$$

obtenim que  $\Phi(r)$  satisfà l'equació diferencial ordinària escrita a l'enunciat. Això acaba la demostració.  $\Lambda$

**6.8. Esbós de classificació de partícules.** Cal, en primer lloc, conèixer el valor propi  $E$  (és a dir, el nivell d'energia de la partícula).

Com a exemple, ens situarem en el cas d'un àtom d'hidrogen; així, la partícula és un sol electró sotmès al camp produït pel nucli, i el nucli és un sol protó. Les energies possibles són els valors propis discrets de l'equació de Schrödinger; en aquest cas, són de la forma  $E = \frac{K}{n^2}$ , per a  $K$  constant i  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$  (aquí, la constant  $K$  val  $-13.6 \text{ eV}$ ).

• El nombre natural  $n$  s'anomena el nombre quàntic principal. (Podríem prendre el *nivell*  $E$  com a invariant en lloc de  $n$ , però això dependria de les unitats de mesura.)

A continuació, i un cop fixat el nombre quàntic principal (o sigui, fixat el nivell d'energia de l'electró, o, si es vol, el valor propi de l'operador), la partícula és caracteritzada per una funció (d'ona) de la forma  $\psi_\ell^m$ .

• El *pes*  $\ell$  de la representació s'anomena el nombre quàntic azimutal, i és  $\ell \in \mathbb{N}$ , de manera que la dimensió de l'espai de representació és  $2\ell + 1$ .

• El *caràcter*  $m$  s'anomena el nombre quàntic magnètic, i és  $-\ell \leq m \leq \ell$ .



De fet, encara hi ha un altre nombre quàntic, el nombre quàntic *de paritat*,  $w$ , que s'obté en considerar que el grup d'invariància de l'equació no és  $\mathbf{SO}(3)$ , sinó  $\mathbf{O}(3) \simeq \mathbf{SO}(3) \times \{\pm 1\}$ , i definir  $w := 1$  o bé  $w = -1$  segons que la funció d'ona  $\psi_\ell^m$  sigui invariant o canviï de signe en aplicar  $-1$ . Succeeix que en el cas d'una sola partícula se satisfà la relació  $w = (-1)^\ell$ , de manera que el nombre quàntic de paritat és determinat pel nombre quàntic azimutal.

# Bibliografia

- [Ar91] Artin, M.: *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- [Ko78] Kostrikn, A. I.: *Introducción al álgebra*, Mir, Moscú, 1978.
- [Pi73] Pichon, G.: *Groupes de Lie Représentations linéaires et applications*, Méthodes, Hermann, Paris, 1973.
- [Se77] Serre, J.-P.: *Linear Representations of Finite Groups*, GTM, n. 42, Springer-Verlag, 1977. Edició original en llengua francesa de Hermann. Hi ha traducció al castellà de S. Xambó de l'edició original en llengua francesa, editada per Omega, en la col·lecció Métodos, l'any 1970.
- [Si96] Simon, B.: *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics, n. 10, American Mathematical Society, 1996.

Les qüestions de física seleccionades en aquest capítol ho han estat per raó de la seva proximitat al temari del curs.

Cada branca de la física té el seu propi domini d'aplicació. Ateses les seves característiques, es treballa en cadascuna sota supòsits diferents. Trobem, per exemple, les situacions següents:

|                               |                                            |
|-------------------------------|--------------------------------------------|
| Mecànica clàssica             | $c = \infty, \quad h = 0, \quad k = 0,$    |
| Mecànica relativista          | $c < \infty, \quad h = 0, \quad k = 0,$    |
| Mecànica quàntica             | $c = \infty, \quad h \neq 0, \quad k = 0,$ |
| Mecànica quàntica relativista | $c < \infty, \quad h \neq 0, \quad k = 0,$ |
| Teoria quàntica de camps      | $c < \infty, \quad h \neq 0, \quad k = 0,$ |
| Termodinàmica                 | $c = \infty, \quad h = 0, \quad k \neq 0,$ |

on  $c, h, k$  denoten la velocitat de la llum en el buit, la constant de Planck i la constant de Boltzmann, respectivament. En les seccions que segueixen ens apropem a alguns principis i aspectes de la mecànica quàntica i de la mecànica quàntica relativista.

## §1. Principis generals de la mecànica quàntica

Començarem per introduir la terminologia més habitual en aquest context.

**1.1. Sistemes mecànics quàntics.** Un *sistema mecànic quàntic*  $S$  és descrit per un espai de Hilbert  $\mathcal{H}$  i un operador autoadjunt  $H$ .

Els subespais de  $\mathcal{H}$  de dimensió 1 són, per definició, els *estats purs* del sistema. Escriurem  $\psi$  per designar un vector de  $\mathcal{H}$  de mòdul 1, i  $\hat{\psi}$  per

l'estat que determina. Notem que el vector  $\psi$  està determinat per l'estat  $\hat{\psi}$  llevat del producte per nombres complexos de norma 1, anomenats els *factors de fase*.

Sovint, l'espai  $\mathcal{H}$  és un espai de funcions de dimensió no finita; els vectors  $\psi$  s'anomenen aleshores *funcions d'ona*.

El conjunt de tots els estats de  $S$  és l'espai projectiu  $\hat{\mathcal{H}}$  associat a  $\mathcal{H}$ .

L'operador  $H$  s'anomena el *hamiltonià* del sistema, o bé l'operador de *l'energia*.

Tota magnitud física mesurable en l'espai d'estats porta associat un operador autoadjunt definit en un cert domini de  $\mathcal{H}$ . La magnitud, així com l'operador, s'anomenen *observables* del sistema. El hamiltonià d'un sistema n'és l'observable fonamental.

Recordem que la unitat fonamental d'acció (energia  $\times$  temps) és la *constant de Planck*

$$h = 1.05457266(63) \times 10^{-34} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}.$$

La velocitat de la llum en el buit és, *exactament*,

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

**1.2. Evolució en el temps.** Si, en un temps  $t_0$ , un sistema  $S$  es troba en un estat  $\hat{\psi}(t_0)$ , aleshores el seu estat  $\hat{\psi}(t)$  en el temps  $t$  ve donat per  $\psi(t) := e^{-itH}\psi$ , on

$$e^{-itH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itH)^n}{n!} : \quad \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}.$$

El producte  $tH$  correspon a una acció.

Així, l'evolució en el temps d'un sistema està controlada per un grup uniparamètric d'operadors unitaris  $U(t) := \{e^{-itH} \mid t \in \mathbb{R}\}$ , generat pel hamiltonià.

Un estat  $\hat{\psi}$  d'un sistema mecànic quàntic s'anomena *estacionari* si  $\hat{\psi}(t) = \hat{\psi}$ , per a tot  $t \geq 0$ .

**1.3. Teorema.** *Un estat  $\hat{\psi}$  d'un sistema  $S$  és estacionari si, i només si, la seva funció d'ona  $\psi$  és un vector propi del hamiltonià  $H$ .*

DEMOSTRACIÓ (Esbós). Si suposem que  $H\psi = E\psi$ , per a un cert escalar  $E$ , tenim que

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi = e^{-itE}\psi,$$

amb la qual cosa veiem que  $\hat{\psi}$  és un estat estacionari. Ara ens diu Bohr: “La proposició inversa d’una veritat que és una bajanada és falsa. La proposició inversa d’una gran veritat és certa.” Com que l’anterior és una *gran* veritat, la seva inversa és veritable!  $\square$

**1.4. Espectres.** Sigui  $\mathcal{H}$  un espai de Hilbert i  $A$  un operador autoadjunt amb domini de definició dens en  $\mathcal{H}$ . El conjunt

$$\sigma_d(A) := \{\lambda \mid 0 < \dim \ker(A - \lambda I) < \infty\}$$

s’anomena l’*espectre discret* de  $A$ . Els seus elements són els valors propis de  $A$ . Els vectors del  $\ker(A - \lambda I)$  són els vectors propis. La dimensió del  $\ker(A - \lambda I)$  és la multiplicitat del valor propi.

Sigui  $\sigma_c(A)$  el conjunt dels elements  $\lambda \in \mathbb{C}$  per als quals existeix una successió afitada i no precompacta  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  tal que

$$\lim(Ax_k - \lambda x_k) = 0 \quad \text{quan } k \rightarrow \infty.$$

El conjunt  $\sigma_c(A)$  s’anomena l’*espectre continu* de l’operador  $A$ . Les successions com les anteriors es coneixen amb el nom de *successions de Weyl*.

Tant l’espectre discret com l’espectre continu d’un operador autoadjunt són sempre reals. Potser val la pena observar que, segons la definició anterior, els “valors propis” de multiplicitat infinita formen part de l’espectre continu.

El conjunt  $\sigma(A) := \sigma_d(A) \cup \sigma_c(A)$  és, per definició, l’espectre de  $A$ .

**1.5. Observables.** Tal com ja s’ha dit, tota magnitud *observable* (per exemple, l’energia, el moment) d’un sistema mecànic quàntic ve representada per un operador autoadjunt. Els observables estan definits en certs

dominis de  $\mathcal{H}$ . L'espectre d'un observable  $A$  és el sistema complet de valors que la magnitud associada a  $A$  pot prendre. Els observables evolucionen en el temps segons la llei  $A(t) := e^{-itH} A e^{itH}$ . Els observables que commuten amb el hamiltonià satisfan  $A(t) = A$ .

**1.6. Nivells d'energia.** En un sistema mecànic quàntic, els elements de  $\sigma(H)$ , l'espectre del hamiltonià, són els *nivells d'energia*. En particular, a cada estat estacionari li correspon un nivell d'energia.

En general, els estats estacionaris d'energia positiva descriuen *partícules*; els d'energia negativa s'associen a *antipartícules*.

Si l'espectre de  $H$  és simple (multiplicitat 1),  $\mathcal{H}$  estarà equipat d'una base canònica ortonormal formada per funcions d'ona d'estats estacionaris. Si la multiplicitat d'un nivell d'energia és més gran que 1, aleshores aquest nivell i els corresponents estats s'anomenen *degenerats*; la multiplicitat del valor propi s'anomena el *grau de degeneració* del nivell d'energia.

Els sistemes mecànic quàntics tendeixen a assumir els estats d'energia mínima. Els estats estacionaris d'energia mínima s'anomenen *bàsics*; els altres són els estats *excitats*.

**1.7. Postulat de Bohr.** Siguin  $\hat{\psi}_i$ ,  $i = 1, 2$ , estats estacionaris d'un mateix sistema. Si l'estat  $\hat{\psi}_1$  salta espontàniament a l'estat  $\hat{\psi}_2$  (és a dir, es produeix un increment o bé un descens en l'energia del sistema), aleshores la transició implica l'absorció o bé l'emissió d'una radiació electromagnètica de freqüència  $\nu = \frac{1}{h}|E_1 - E_2|$ , on  $h$  és la constant de Planck.

Com que aquestes freqüències es poden mesurar experimentalment, serveixen per contrastar la bondat d'un model matemàtic escollit per descriure un sistema físic.

**1.8. Regla de quantització.** Considerem un sistema clàssic format per  $n$  partícules. Sigui  $f(x_1, \dots, x_{3n}; p_1, \dots, p_{3n})$  el seu hamiltonià, on les variables  $x_i$  designen les coordenades cartesianes d'aquelles partícules i les variables  $p_i = m_i v_i$ , els seus moments lineals. L'operador hamiltonià del sistema mecànic quàntic associat s'obté a partir de l'operador diferencial

$$H\psi := f\left(x_1, \dots, x_{3n}; \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x_{3n}}\right) \psi.$$

En la majoria de casos, cal prendre  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3n})$ .

Un cop portat a terme el procés de quantització esmentat, sovint s'arriba a un operador  $H$  que és essencialment autoadjunt. En aquest cas, la seva adherència és l'operador autoadjunt que cal prendre com a hamiltonià del sistema. (Un operador definit en un cert domini d'un espai de Hilbert s'anomena *essencialment autoadjunt* si té una extensió única a un domini més gran en el qual és autoadjunt.)

**1.9. Probabilitats de transició.** En un sistema mecànic quàntic, la *probabilitat de transició* d'un estat  $\hat{\phi}$  a un estat  $\hat{\psi}$  ve donada per

$$\langle \hat{\psi}, \hat{\phi} \rangle := |(\psi, \phi)|^2,$$

on  $\phi, \psi$  són funcions d'ona dels respectius estats. La desigualtat de Schwarz ens assegura que

$$0 \leq |(\psi, \phi)|^2 \leq 1.$$

Si  $\phi$  i  $\psi$  són ortogonals, aleshores el sistema preparat en l'estat  $\phi$  no podrà ser observat (immediatament després de la preparació) en l'estat  $\psi$ .

**1.10. Definició.** Una aplicació bijectiva  $T : \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$  es diu que és una *isometria* si satisfà que

$$\langle T\hat{\psi}, T\hat{\phi} \rangle = \langle \hat{\psi}, \hat{\phi} \rangle, \quad \text{per a tot } \hat{\psi}, \hat{\phi} \in \hat{\mathcal{H}}.$$

El conjunt de totes les isometries de  $\hat{\mathcal{H}}$  forma un grup, que designem per  $\text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}) = \mathbf{PGL}(\mathcal{H})$ .

Tota isometria resulta de la projectivització d'una transformació unitària o bé antiunitària de  $\mathcal{H}$ . És a dir, per a tota  $T$ , com abans, existeix  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , operador unitari o bé antiunitari, tal que la seva projectivització  $\hat{U}$  satisfà  $\hat{U} = T$ . Si  $\hat{U}_1 = \hat{U}_2$ , aleshores  $U_2 = e^{i\theta} U_1$  per a un cert  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Si designem per  $\tilde{U}(\mathcal{H})$  el grup de transformacions unitàries o bé antiunitàries de  $\mathcal{H}$ , tenim el

**1.11. Teorema.** (Wigner-Bargmann) *La successió següent és exacta:*

$$1 \longrightarrow \mathbf{U}(1) \longrightarrow \tilde{U}(\mathcal{H}) \longrightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}) \longrightarrow 1.$$

Volem ara preparar la definició de grup de simetries d'un sistema mecànic quàntic. Tots els grups de Lie que prendrem en consideració seran grups de Lie reals.

**1.12. Definició.** Sigui  $G$  un grup de Lie. Els homomorfismes continus  $\rho : G \longrightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}})$  s'anomenen *representacions projectives* de  $G$ . Per a cada transformació  $\rho(g)$ , sigui  $\pi(g) \in \tilde{U}(\mathcal{H})$  una transformació unitària o bé antiunitària tal que  $\hat{\pi}(g) = \rho(g)$ . Si  $\pi(g)$  és unitària per a tot  $g \in G$ , aleshores es diu que  $\rho$  és una *representació projectiva unitària*.

**1.13. Proposició.** *Tota representació projectiva d'un grup de Lie conex és una representació projectiva unitària.*

Notem que els operadors de  $\mathcal{H}$  associats a una representació projectiva de  $G$  satisfan

$$\pi(g)\pi(h) = \omega(g, h)\pi(gh),$$

per a un cert factor de fase  $\omega(g, h) \in \mathbf{U}(1)$ .

**1.14. Grup de simetries d'un sistema mecànic quàntic.** Donat un sistema mecànic quàntic  $S$ , un grup  $G$  d'operadors continus de  $\mathcal{H}$  es diu que és un *grup de simetries* de  $S$  quan els seus elements commuten amb el hamiltonià i es projecten en isometries de  $\hat{\mathcal{H}}$ .

Si  $G$  és un grup de simetries de  $S$ , aleshores  $G$  opera en els estats estacionaris associats a un mateix valor propi del hamiltonià. Un *multiplet* és, per definició, el subespai corresponent a una representació irreductible del grup. Amb altres paraules, els multiplets associats a un mateix nivell d'energia provenen de representacions irreductibles de grups de simetria del sistema. En aquest punt és convenient recordar el

**1.15. Lema.** (Schur) *Una representació unitària  $\pi$  d'un grup compacte  $G$  és irreductible si, i només si, els únics operadors que commuten amb tots els operadors  $\pi(g)$ ,  $g \in G$ , són homotècies.*



Situem-nos a  $V^E := \ker(H - EI)$ . Sigui  $G$  un grup compacte de simetries del sistema i sigui

$$\pi : G \longrightarrow \text{Aut}(V^E)$$

la representació corresponent. Escrivim  $\pi$  com a suma de representacions irreductibles. Suposem que a  $V^E$  hi opera un altre operador  $A$  que commuta amb l'acció de  $G$ . En aquest cas,  $A$  opera en els components isotípics de  $\pi$ . El lema de Schur ens diu que l'acció de  $A$  en un component isotípic *irreductible* és una homotècia. La raó d'homotècia és el valor numèric de la magnitud que  $A$  mesura.

## §2. L'espai temps de Minkowski

Els principis de la teoria de la relativitat afirmen que el comportament dels sistemes físics no depèn de la referència inercial escollida per descriure'ls. Els sistemes de referència es prenen a l'espai temps de Minkowski i els canvis de referència inercials són descrits per certes transformacions del grup de Poincaré.

Els canvis de referència inercials donen lloc a transformacions de l'espai d'estats del sistema. Un principi bàsic afirma que la probabilitat de transició d'un estat  $\phi$  a un estat  $\psi$  ha de ser la mateixa que la probabilitat de transició entre els estats transformats  $\phi', \psi'$  després del canvi de referència.

Aquests fets porten de manera natural a la consideració de representacions projectives del grup de Poincaré valorades en espais de Hilbert (de dimensió no finita).

**2.1. El grup de Lorentz.** La mètrica de Lorentz es defineix a l'espai vectorial  $\mathbb{R}^4$  segons

$$\langle x, y \rangle := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3.$$

L'espai mètric que en resulta és l'anomenat *espai temps de Minkowski*.

El grup  $\mathcal{L}$  d'isometries lineals de l'espai temps de Minkowski és el grup de Lorentz

$$\mathcal{L} := \mathbf{O}(1, 3).$$

Com a grup de Lie real, el grup de Lorentz és de dimensió 6. Té quatre components connexos:

$$\mathcal{L}_+^\uparrow := \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda_0^0 \geq 1, \det \Lambda = 1\},$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow := \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda_0^0 \geq 1, \det \Lambda = -1\},$$

$$\mathcal{L}_-^\downarrow := \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda_0^0 \leq 1, \det \Lambda = -1\},$$

$$\mathcal{L}_+^\downarrow := \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda_0^0 \leq 1, \det \Lambda = 1\}.$$

Posem

$$\mathcal{L}_+ := \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_+^\downarrow = \mathbf{SO}(1, 3), \quad \mathcal{L}^\uparrow := \mathcal{L}_+^\uparrow \cup \mathcal{L}_-^\uparrow.$$

El grup  $\mathcal{L}_+$  és el grup de Lorentz *especial* i  $\mathcal{L}^\uparrow$ , el grup de Lorentz *ortocrono*. Els elements de  $\mathcal{L}^\uparrow$  són automorfismes que respecten la causalitat, o bé, si es prefereix, l'orientació del temps.

**2.2. Teorema.** *Existeix una successió exacta de grups*

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{L}_+^\uparrow \longrightarrow 1,$$

on  $C_2$  denota el grup cíclic d'ordre 2.

El grup  $\tilde{\mathcal{L}}_+^\uparrow := \mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$  és un grup de Lie simplement connex. És el recobriment universal del component connex de l'element neutre del grup de Lorentz  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ .

Tota matriu de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$  és producte d'una matriu hermítica per una matriu unitària. Per l'aplicació anterior, les matrius unitàries tenen per imatge les rotacions; les matrius hermítiques s'apliquen en els *impulsors*. Rotacions i impulsors són un sistema de generadors de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ .

Les transformacions discretes

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & -\mathbf{1}_3 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} -1 & 0^t \\ 0 & \mathbf{1}_3 \end{pmatrix}, \quad PT = -\mathbf{1}_4, \quad \mathbf{1}_4,$$

formen un subgrup discret del grup de Lorentz, isomorf a  $C_2 \times C_2$ .  $P$  s'anomena la *inversió espacial*;  $T$ , la *inversió temporal*.

Per a cada rotació  $R \in \mathbf{SO}(3)$ , la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

defineix un element del grup  $\mathcal{L}_+^\uparrow$ , de tal manera que veiem  $\mathbf{SO}(3)$  com un subgrup d'aquest darrer grup. Una rotació queda determinada pel seu argument  $\phi \in [0, \pi)$  i per un vector unitari  $\mathbf{n}$  de  $\mathbb{R}^3$ , que depèn de dos paràmetres independents.

Les altres transformacions de  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  que hem de tenir presents són els impulsors. Sigui  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  un vector de norma  $v < 1$ . Si posem

$$\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

aleshores, la matriu

$$\begin{pmatrix} \gamma(v) & \gamma(v)\mathbf{v}^t \\ \gamma(v)\mathbf{v} & \mathbf{1}_3 + \frac{\gamma(v)-1}{v^2}\mathbf{v}\mathbf{v}^t \end{pmatrix}$$

defineix un element del grup de Lorentz. L'efecte d'un impulsor és el de transformar una partícula en repòs en una partícula amb velocitat  $\mathbf{v}$ . El conjunt de tots els impulsors no és un subgrup. Constitueix una varietat homeomorfa a  $\mathbb{R}^3$  (per tant, no compacta). Però el conjunt de tots els impulsors en una mateixa direcció  $\mathbf{v}$  és un subgrup uniparamètric del grup de Lorentz.

Si escollim la parametrització donada per

$$\mathbf{v} := \tanh \omega \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \omega \in [0, \infty),$$

la composició d'impulsors de paràmetres  $\omega_1, \omega_2$  és un impulsor de paràmetre  $\omega_1 + \omega_2$ . En una base escaient, l'impulsor s'escriu

$$\begin{pmatrix} \cosh \omega & \sinh \omega & 0 & 0 \\ \sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i veiem, per tant, que és una rotació hiperbòlica. El grup d'impulsors en una direcció donada és isomorf al grup de rotacions  $\mathbf{SO}(1,1)$  del pla hiperbòlic.

Per a cada  $m > 0$ , es defineix l'hiperboloide de masses

$$M_{pos} := \{p \in \mathbb{R}^4 \mid \langle p, p \rangle = m^2, p^0 > 0\}.$$

El punt  $q = (m, 0, 0, 0)$  és de  $M_{pos}$ . Aquest punt correspon a una partícula de massa  $m$  situada a l'origen de coordenades espacials. El grup d'impulsors en la direcció

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}, \quad \mathbf{p} = m\gamma(v)\mathbf{v}$$

opera fidelment i transitiva en  $M_{pos}$ . Aquest fet interpreta les partícules de l'espai temps de Minkowski que es troben a l'hiperboloide de masses que defineix la partícula  $q$  donada.

Com que  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  és un grup de Lie no compacte, car conté tots els impulsors, no té representacions unitàries de dimensió finita llevat de les trivials. (Això farà que els components de les funcions d'ona *espinorials* es transformin per mitjà de matrius antiunitàries).

**2.3. El grup de Poincaré.** S'anomena així el grup  $\mathcal{P}$  dels desplaçaments de l'espai temps de Minkowski. El grup de Poincaré s'obté, doncs, en compondre les transformacions del grup de Lorentz amb les translacions de l'espai temps. Com que aquestes formen un grup isomorf a  $\mathbb{R}^4$ , es té una estructura de producte semidirecte

$$\mathcal{P} = \mathbb{R}^4 \odot \mathcal{L}.$$

El component connex de l'element neutre

$$\mathcal{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \odot \mathcal{L}_+^\uparrow$$

és el *grup de Poincaré propi*.

El grup de Poincaré propi és fonamental en física. Els diferents sistemes de referència inercials es connecten per transformacions d'aquest grup. Els principis de la relativitat estableixen que totes les lleis de la natura han de ser independents del sistema de referència inercial escollit per al seu estudi.

Com veurem, les representacions irreductibles del grup de Poincaré juguen un paper fonamental en la classificació de les partícules elementals a energies baixes.

El grup recobridor universal del grup de Poincaré ve donat per

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathbb{R}^4 \odot \tilde{\mathcal{L}}.$$

$\tilde{\mathcal{P}}$  és la unió de quatre components connexos:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow &= \mathbb{R}^4 \odot \tilde{\mathcal{L}}_+^\uparrow, & \tilde{\mathcal{P}}_-^\uparrow &= (0, P) \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow, \\ \tilde{\mathcal{P}}_-^\downarrow &= (0, T) \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow, & \tilde{\mathcal{P}}_+^\downarrow &= (0, PT) \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow.\end{aligned}$$

Amb el punt de mira posat en l'estudi de les transformacions infinitesimals de la mecànica quàntica relativista, passem a estudiar l'àlgebra de Lie del grup de Poincaré.

**2.4. L'àlgebra de Lie del grup de Poincaré.** Com que el grup de Poincaré  $\mathcal{P}$  és un grup de Lie real, per estudiar-lo introduïm coordenades locals. A l'element neutre li associem l'origen de  $\mathbb{R}^{10}$ . A l'entorn del seu element neutre, escollim

$$q = (a, \underline{\omega}, \underline{\phi}) \in \mathbb{R}^{10}.$$

A l'element  $a$  li corresponen 4 coordenades, ja que descriu les translacions; a l'element  $\underline{\omega}$  li'n corresponen tres, car prové dels impulsors, i a l'element  $\underline{\phi}$ , també tres, car prové de les rotacions espacials. Si posem  $q_j(t) = (0, \dots, t, \dots, 0)$ , on la coordenada  $t$  ocupa el lloc  $j$ , tenim un total de 10 subgrups uniparamètrics de  $\mathcal{P}_+^\uparrow$ . En cadascun d'ells, la llei de composició ve donada per l'addició dels paràmetres corresponents.

Les 10 transformacions infinitesimals

$$A_j := \left. \frac{d}{dt} q_j(t) \right|_{t=0}$$

són un sistema de generadors de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{L}\mathcal{P}$ . Atesa la seva particularitat se'ls dona les notacions següents:

|                                                     |                                           |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $-p_0 := \frac{-1}{c}H_0$                           | generador de les translacions temporals,  |
| $p_1, p_2, p_3$                                     | generadors de les translacions espacials, |
| $-\frac{1}{c}N_1, -\frac{1}{c}N_2, -\frac{1}{c}N_3$ | generadors dels impulsors,                |
| $J_1, J_2, J_3$                                     | generadors de les rotacions.              |

A partir de les definicions es demostra fàcilment la

**2.5. Proposició.** *Els generadors anteriors de  $\mathcal{LP}$  estan sotmesos a les relacions següents:*

$$\begin{aligned}
[p_j, p_k] &= [p_j, H_0] = [J_j, H_0] = 0, \\
[N_j, p_k] &= -\delta_{j,k} H_0, & [N_j, H_0] &= -c^2 p_j, \\
[J_j, p_k] &= -\sum_m \epsilon_{j,k,m} p_m, & [J_j, J_k] &= -\sum_m \epsilon_{j,k,m} J_m, \\
[N_j, N_k] &= c^2 \sum_m \epsilon_{j,k,m} J_m, & [J_j, N_k] &= -\sum_m \epsilon_{j,k,m} N_m,
\end{aligned}$$

per a  $1 \leq j, k, m \leq 3$ .

### §3. Principis de la mecànica quàntica relativista

Els grups de simetries dels sistemes quàntics relativistes estan estretament lligats al grup de Poincaré.

L'equació d'ona de Schrödinger és una equació no relativista. És vàlida per estudiar el moviment de partícules que es desplacen a una velocitat molt més petita que la velocitat de la llum. Pel fet que en ella intervenen la primera derivada respecte del temps i la segona derivada respecte de les coordenades espacials, l'equació no és invariant respecte del grup de Poincaré.

La descripció de fenòmens físics que es produeixen a altes energies requereix la investigació d'equacions d'ona relativistes. L'equació d'ona relativista que modifica la de Schrödinger és l'equació de Dirac. L'equació de

Dirac s'utilitza per descriure fenòmens quàntics que impliquen velocitats suficientment altes com per donar lloc a efectes cinemàtics relativistes i, al mateix temps, energies suficientment petites que fan que la creació de parells nous de partícules tingui encara probabilitat negligible. Així, la mecànica quàntica relativista es troba al mig entre la mecànica quàntica i la teoria quàntica de camps.

L'equació de Dirac proporciona una descripció quàntica relativista de l'electró i del seu espín. A partir d'aquesta equació és com Dirac predigué l'existència del positró. Això no obstant, la consideració de l'equació com la pròpia d'una única partícula porta a algunes inconsistències. (Aquestes desapareixen en considerar l'equació de Dirac en el marc de la teoria quàntica de camps, que no tractarem aquí.)

**3.1. Primeres consideracions.** Prenem el *laplaciana* de  $\mathbb{R}^3$

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

L'equació de Schrödinger per a una partícula lliure ve donada per

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi.$$

Pel fet que les transformacions del grup de Lorentz de la teoria especial de la relativitat barregen l'espai i el temps, veiem que aquesta equació no és invariant respecte d'aquest grup.

Per estudiar el moviment de les partícules des del punt de vista relativista, Dirac cercà un hamiltonià invariant pel grup de Lorentz. Per a tal fi, li calgué portar a terme el càlcul de  $\sqrt{-\Delta}$ , de manera que el resultat fos un operador diferencial de primer ordre. El procés el conduí a substituir  $L^2(\mathbb{R}^3)$  per  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$  i a cercar equacions en derivades parcials de la forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[ \frac{\hbar c}{i} \left( \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + mc^2 \beta \right] \psi.$$

La recerca d'un hamiltonià invariant pel grup de Lorentz comporta que les quantitats  $\alpha$  no poden ser nombres, ja que, si fos així, no es donaria la invariància respecte del grup de les rotacions  $\mathbf{SO}(3)$ . Càlculs oportuns condueixen a la consideració de les matrius de Dirac.

**3.2. Matrius de Pauli i matrius de Dirac.** Les matrius  $2 \times 2$  autoadjuntes

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

formen un sistema normalitzat anticommutatiu. Són les anomenades *matrius de Pauli*. Les matrius  $4 \times 4$  autoadjuntes

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_k \\ \sigma_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq 3, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$

formen un sistema normalitzat anticommutatiu. Són les anomenades *matrius de Dirac*.

**3.3. L'operador de Dirac.** L'operador de Dirac es defineix per

$$H_0 \psi := \frac{hc}{i} \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + mc^2 \beta \psi,$$

on  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ , i les funcions  $\psi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  són infinitament diferenciables amb suport compacte.

**3.4. Teorema.** *L'operador  $H_0$  és un operador essencialment autoadjunt en el domini  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})^4$ , que és dens a l'espai de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ . És autoadjunt en el primer espai de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^3)^4$ . El seu espectre discret és buit. El seu espectre continu és  $(-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty)$ .*

(El primer espai de Sobolev és el domini natural de definició dels operadors diferencials de primer ordre.)

**3.5. Partícules lliures.** Per definició, el sistema mecànic quàntic associat a l'operador de Dirac  $H_0$  és el d'una *partícula lliure relativista* de massa  $m$ . Les funcions d'ona que en resulten s'anomenen *espinorials*.

La idea física de partícula lliure correspon a la d'una partícula que no és obligada per forces externes a moure's en un volum més petit que el donat pel cub de la longitud d'ona de Compton:  $\lambda_c = h/mc$ . Altrament, es produeix de seguida la creació de parelles partícula-antipartícula.

Passem a descriure alguns operadors lligats a observables quàntics relativistes.



**3.6. Posició i moment.** L'operador  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  de multiplicació per  $\mathbf{x}$  s'anomena l'operador de *posició* estàndard. De fet, consisteix en tres operadors autoadjunts,  $\mathbf{x}_i$ , de dominis respectius

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}_i) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R})^4 \mid \int \sum_{k=1}^4 |x_i \psi_k(\mathbf{x})|^2 d^3x < \infty\}, \quad \text{per a } 1 \leq i \leq 3.$$

L'operador diferencial de *moment* es defineix com

$$\mathbf{p} = -i \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

**3.7. Moment angular.** Considerem els tres operadors de *moment angular*:

$$\mathbf{S} := -\frac{i}{4} \underline{\alpha} \wedge \underline{\alpha} \quad \text{moment angular d'espín,}$$

$$\mathbf{L} := \mathbf{x} \wedge \mathbf{p} \quad \text{moment angular orbital,}$$

$$\mathbf{J} := \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad \text{moment angular total.}$$

A més, necessitem l'operador d'*energia centrada*

$$\mathbf{N} := \frac{1}{2} (H_0 \mathbf{x} + \mathbf{x} H_0).$$

Tots els operadors  $H_0, \mathbf{p}, \mathbf{J}, \mathbf{N}$  són essencialment autoadjunts a  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$ .

Per raons que quedaran clares més endavant, convé que passem ara a determinar com evolucionen en el temps els operadors anteriors.

**3.8. Evolució en el temps.** L'operador que determina l'*evolució en el temps*  $\exp(-iH_0t)$  és un operador integral de l'espai de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^3)^4$ . Si  $\psi$  és un estat que pertany a l'espai de Schwarz  $S(\mathbb{R})^4$ , format per les funcions de decreixement ràpid a l'infinit, aleshores

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} K(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) d^3y,$$

per a un cert nucli integral  $K$ . En l'expressió d'aquest nucli integral hi intervenen distribucions diverses: la famosa  $\delta$  de Dirac, la  $\theta$  de Heaviside, així com també funcions de Bessel.

L'expressió anterior permet provar que les funcions d'ona dels espinors es propaguen amb velocitat inferior a la de la llum (ho tenim tot controlat!). De totes maneres, únicament per a estats inicials molt particulars la funció d'ona  $\psi(t, \mathbf{x})$  pot ser determinada explícitament i de manera compacta. Això és degut al fet que el terme integral ve donat per un desenvolupament en sèrie que és força complicat.

**3.9. Els tremolors.** En cinemàtica relativista clàssica es té la relació fonamental

$$\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} / E.$$

Aquesta relació podria induir a pensar que  $c^2 \mathbf{p} H_0^{-1}$  és l'operador que convé prendre per mesurar velocitats quàntiques relativistes. Si definim

$$c\mathbf{p}(t) := e^{iH_0 t} c\mathbf{p} e^{-iH_0 t},$$

aleshores

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + \int_0^t c\mathbf{p}(t) dt.$$

Existeix un operador  $\mathbf{F}$  tal que

$$\mathbf{F} H_0 = -H_0 \mathbf{F}$$

i que satisfà

$$c\mathbf{p}(t) = c^2 \mathbf{p} H_0^{-1} + \mathbf{F}(t).$$

Així, la velocitat d'una partícula lliure en un sistema quàntic relativista oscil·la al voltant del valor mitjà  $c^2 \mathbf{p} H_0^{-1}$ . Aquest valor és el de la velocitat quan no es tenen en compte els efectes relativistes. El fenomen es coneix normalment com *Zitterbewegung* (tremolor).

Els tremolors donen sentit físic a les matrius de Dirac. Ocasionen que ni el moment angular orbital ni el moment d'espín es conservin. És a dir, depenen del temps. En canvi, el moment angular total  $\mathbf{J}$  satisfà

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{J} \quad \text{o bé, equivalentment,} \quad [\mathbf{J}, H_0] = 0,$$

i és, per tant, un invariant de la teoria.

## §4. Invariància relativista de l'equació de Dirac.

Provar la invariància relativista de l'equació de Dirac vol dir provar la seva invariància respecte de les transformacions del grup de Poincaré propi. Això es tradueix en la construcció d'una representació contínua i projectiva

$$\pi : \mathcal{P}_+^\uparrow \longrightarrow \text{Aut}(\hat{\mathcal{H}}),$$

on  $\hat{\mathcal{H}}$  és ara l'espai de funcions d'ona espinorials.

Sigui  $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow = \tilde{\mathcal{P}}^\uparrow$  el grup recobridor universal del grup de Poincaré. Considerem la successió exacta fonamental

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow \longrightarrow \mathcal{P}_+^\uparrow \longrightarrow 1,$$

on  $C_2$  és el grup cíclic d'ordre 2 generat per l'element  $(0, -\mathbf{1}_4)$ . Aconseguirem la construcció de la representació projectiva del grup propi de Poincaré mitjançant una representació lineal contínua i unitària del seu grup recobridor universal. A aquesta hi arribarem per integració convenient d'una representació de la seva àlgebra de Lie.

**4.1. Teorema.** (Bargmann) *Sigui  $G$  un grup de Lie connex i  $\tilde{G}$  el seu recobriment universal. Escrivim  $\tilde{G}/C \simeq G$ , on  $C$  és subgrup de Lie central i discret. Sigui  $\mathfrak{g}$  l'àlgebra de Lie de  $\tilde{G}$  (i també de  $G$ ). Suposem que  $H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = 0$ . Aleshores, existeix una correspondència bijectiva entre les representacions projectives de  $G$  i les representacions lineals unitàries  $\pi$  de  $\tilde{G}$  que satisfan*

$$\pi(h) = e^{i\theta(h)} \mathbf{1}, \quad \text{per a tot } h \in C.$$

**4.2. Teorema.** (Bargmann) *Sigui  $\mathcal{LP}$  l'àlgebra de Lie del grup de Poincaré (equivalentment del grup de Poincaré propi). Aleshores*

$$H^2(\mathcal{LP}, \mathbb{R}) = 0.$$

*En particular, tota representació projectiva de  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  admet un aixecament en una representació lineal unitària de  $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ .*

Arribats en aquest punt, podem preguntar-nos com aconseguir la representació lineal unitària de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{LP}$  lligada a l'equació de Dirac. Ho farem a partir d'observables lligats a aquesta equació. De l'existència d'operadors autoadjunts que representen l'àlgebra de Lie del grup de Poincaré es dedueix la invariància relativista de l'equació de Dirac.

**4.3. Teorema.** *Els operadors  $H_0, \mathbf{p}, \mathbf{J}, \mathbf{N}$  són essencialment autoadjunts en el domini comú de definició  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$ . Generen una representació unitària  $\pi$ , unívocament determinada, de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{LP}_+^\uparrow$ . Via l'aplicació exponencial, s'obté una representació unitària de  $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ . En particular, el grup propi de Poincaré  $\mathcal{P}_+^\uparrow$  opera en l'espai projectiu  $\hat{\mathcal{H}}$  dels estats espinorials que són solució de l'equació de Dirac.*

DEMOSTRACIÓ (Esbós). Fàcilment es comprova a partir de la seva definició que les regles de commutació que satisfan aquests operadors analítics són les mateixes que les relacions algebraïques que satisfan els generadors de l'àlgebra de Lie del grup de Poincaré. Però amb això no n'hi ha prou. A més, l'operador

$$Q := \frac{1}{c^2} H_0^2 + \mathbf{p}^2 + \mathbf{J}^2 + \frac{1}{c^2} \mathbf{N}^2$$

és essencialment autoadjunt a  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)^4$ . Aquest fet és suficient per garantir que la representació és unitària, gràcies a un teorema d'operadors en espais de Hilbert, degut a Nelson.  $\square$

## §5. Una classificació relativista de sistemes mecànics quàntics

Ens proposem en aquesta secció donar compte de la classificació de *totes* les representacions projectives irreductibles i unitàries del grup propi de Poincaré. Al mateix temps, justificarem el fet que la representació que hem obtingut anteriorment és la que correspon a l'electró (quan  $m > 0$ ).

**5.1. Representacions irreductibles del grup de Poincaré.** A fi de determinar totes aquestes representacions, comencem per tenir en compte l'estructura de producte semidirecte

$$\tilde{\mathcal{P}}^\dagger = \mathbb{R}^4 \odot \tilde{\mathcal{L}}^\dagger.$$

És convenient escollir a  $\tilde{\mathcal{P}}^\dagger$  un subgrup tancat  $\mathcal{K}$  maximal, que prendrem de la forma

$$\mathcal{K} = \mathbb{R}^4 \odot \mathcal{D},$$

on  $\mathcal{D}$  és un subgrup de  $\tilde{\mathcal{L}}^\dagger$  que determinarem convenientment.

Per a cada  $p \in \mathbb{R}^4$ , definim el caràcter de  $\mathbb{R}^4$

$$\chi_p(a) := e^{i\langle p, a \rangle}, \quad a \in \mathbb{R}^4.$$

El conjunt de caràcters de  $\mathbb{R}^4$  obtinguts d'aquesta manera constitueix el grup dual  $\widehat{\mathbb{R}}^4$ , isomorf a  $\mathbb{R}^4$ .

El grup  $\tilde{\mathcal{P}}^\dagger$  opera a  $\mathbb{R}^4$  per automorfismes interns i, en particular, també ho fa sobre el grup de caràcters  $\widehat{\mathbb{R}}^4$ . Aquestes accions s'expressen així:

$$\begin{aligned} I_{(b, \mathbf{L})}(a, \mathbf{1}) &:= (b, \mathbf{L})(a, \mathbf{1})(b, \mathbf{L})^{-1} = (\mathbf{L}(a), 1), \\ \widehat{I}_{(b, \mathbf{L})}\chi_p(a) &= \chi_p(\mathbf{L}^{-1}a) = \chi_{\mathbf{L}p}(a). \end{aligned}$$

Per a cada  $q \in \mathbb{R}^4$ , podem prendre en consideració el grup d'isotropia

$$\tilde{\mathcal{P}}_q^\dagger := \{g \in \tilde{\mathcal{P}}^\dagger \mid \widehat{I}_g \chi_q = \chi_q\} = \{(a, \mathbf{L}) \in \tilde{\mathcal{P}}^\dagger \mid \mathbf{L}(q) = q\}.$$

És clar que  $\tilde{\mathcal{P}}_q^\dagger = \mathbb{R}^4 \odot \tilde{\mathcal{L}}_q^\dagger$ , on

$$\tilde{\mathcal{L}}_q^\dagger := \{\mathbf{L} \in \tilde{\mathcal{L}}^\dagger \mid \mathbf{L}(q) = q\}.$$

El grup d'isotropia  $\tilde{\mathcal{L}}_q^\dagger$  s'anomena el *grup petit*.

El grup  $\widehat{\mathbb{R}}^4$ , sota l'acció de  $\tilde{\mathcal{L}}^\dagger$ , és unió disjunta d'òrbites  $O_q$ . Per a distingir-les, podem prendre els punts  $q$  següents:

- 1)  $q = (\mu, 0, 0, 0), \quad \mu > 0$
- 2)  $q = (-\mu, 0, 0, 0), \quad \mu > 0$
- 3)  $q = (0, \mu, 0, 0), \quad \mu > 0$
- 4)  $q = (1, 1, 0, 0),$
- 5)  $q = (-1, 1, 0, 0),$
- 6)  $q = (0, 0, 0, 0).$

L'òrbita 1) correspon a  $M_{pos}$ ; l'òrbita 2) s'escriu  $M_{neg}$ . Aquestes òrbites descriuen partícules amb massa real  $\mu/c =: m > 0$ . L'òrbita 3) no té significat físic clar (hi ha persones que parlen de *taquions*). Les òrbites 4), 5) i 6) condueixen a la descripció de partícules amb massa inercial nul·la. Cadascuna d'aquestes òrbites té associada una mesura invariant.

Prendrem  $\mathcal{K} := \tilde{\mathcal{P}}_q^\uparrow = \mathbb{R}^4 \odot \tilde{\mathcal{L}}_q^\uparrow$ . Per a cada representació  $\sigma$  del grup petit podem definir

$$\tau(a, \mathbf{L}) = \chi_q(a)\sigma(\mathbf{L}).$$

Obtenim així una representació de  $\mathcal{K}$ . Aquesta, a la vegada, indueix una representació a tot el grup  $\tilde{\mathcal{P}}^\uparrow$ .

**5.2. Teorema.** *Tota representació irreductible i unitària del grup de Poincaré  $\tilde{\mathcal{P}}^\uparrow$  és induïda per una representació  $\tau$  com l'anterior. La representació  $\sigma$ , que cal que sigui irreductible, està determinada llevat d'equivalències. L'òrbita  $O_q$  sota l'acció de  $\tilde{\mathcal{L}}^\uparrow$  està unívocament determinada.*

En les aplicacions físiques, l'òrbita  $O_q$  determina la *massa* de les partícules; la representació  $\sigma$ , com veurem, el seu *espín*.

Les representacions esmentades es visualitzen, per a cada  $q$ , en uns espais de Hilbert  $\mathfrak{M}_q$ , de dimensió infinita, anomenats *espais d'estats de Wigner*. Els elements de  $\mathfrak{M}_q$  són funcions de quadrat integrable definides sobre el grup  $\tilde{\mathcal{P}}^\uparrow$  i valorades a  $\mathfrak{X}$ , l'espai de la representació  $\sigma$  del grup petit. En posar juntes totes les definicions donades, es comprova que els estats de Wigner  $\phi \in \mathfrak{M}_q$  satisfan l'equació funcional

$$\phi((a, \mathbf{L})(b, \mathbf{L}')^{-1}) = e^{i\langle q, b \rangle} \sigma(\mathbf{L}') \phi(a, \mathbf{L}),$$

per a tot  $(a, \mathbf{L}) \in \tilde{\mathcal{P}}^\uparrow$  i tot  $(b, \mathbf{L}') \in \tilde{\mathcal{P}}_q^\uparrow$ .

Per acabar de comprendre aquestes representacions ens resta només concentrar-nos en les representacions del grup petit. Per a això suposarem que  $q$  correspon a una partícula de massa no nul·la.

## §6. El grup petit

El grup d'isotropia de  $q = (\pm\mu, 0, 0, 0)$  conté totes les translacions, totes les rotacions espacials i la simetria espacial  $P$ . Per contra, els impulsors o les transformacions que no respecten la causalitat canvien  $q$ . Per tant,

$$\tilde{\mathcal{L}}_q = \{\mathbf{L}_U, \mathbf{L}_P \mathbf{L}_U \mid U \in \mathbf{SU}(2)\}, \quad q = (\pm\mu, 0, 0, 0).$$

El grup d'isotropia de  $q$  el veiem, així, representat com un grup de matrius  $4 \times 4$ . Però aquesta acció de  $\tilde{\mathcal{L}}_q$  a  $\mathbb{C}^4$  és reductible. En efecte, la matriu  $\beta = \mathbf{L}_P$  commuta amb totes les altres matrius de  $\tilde{\mathcal{L}}_q$  i no és una homotècia. Per tant, pel lema de Schur, cal que la representació matricial que estem considerant redueixi. Les matrius

$$Q^\pm := \frac{1}{2}(1 \pm \beta)$$

són projectors en dos subespais  $Q^+ \mathbb{C}^4$ ,  $Q^- \mathbb{C}^4$ , tots dos isomorfs a  $\mathbb{C}^2$ . Aquests subespais s'anomenen dels espinors parells i dels espinors senars, respectivament. Cadascun proporciona una representació irreductible del grup petit. Resta tan sols determinar totes les representacions irreductibles de  $\mathbf{SU}(2)$ .

**6.1. Representacions de  $\mathbf{SU}(2)$ .** El grup  $\mathbf{SU}(2)$  és compacte. Per tant, totes les representacions irreductibles d'aquest grup són de dimensió finita. Per a cada  $A \in \mathbf{SU}(2)$ , sigui

$$\otimes^r A : \otimes^r \mathbb{C}^2 \longrightarrow \otimes^r \mathbb{C}^2$$

la seva potència tensorial  $r$ -èsima. Sigui

$$\sigma_r(A) : \text{Sym}^r \mathbb{C}^2 \longrightarrow \text{Sym}^r \mathbb{C}^2$$

la seva restricció al subespai, de dimensió  $r+1$ , format pels tensors simètrics. Com que  $\mathbf{SU}(2)$  és compacte, podem dotar aquest espai d'una estructura d'espai de Hilbert de manera que la representació

$$\sigma_r : \mathbf{SU}(2) \longrightarrow U(\text{Sym}^r \mathbb{C}^2)$$

sigui una representació unitària.

**6.2. Teorema.** *Les representacions  $\sigma_r$  són totes irreductibles i tota representació irreductible de  $\mathbf{SU}(2)$  és equivalent a una d'aquestes.*

L'element de l'àlgebra de Lie de  $\mathbf{SU}(2)$  que correspon a les rotacions al voltant de l'eix  $x^3$  és

$$\frac{i}{2}\sigma_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix},$$

on  $\sigma_3$  és la tercera matriu de Pauli. Per tant,  $\frac{1}{i}\sigma'_r(a_3)$  és la matriu diagonal

$$\frac{r}{2}, \frac{r}{2} - 1, \frac{r}{2} - 2, \dots, -\frac{r}{2}.$$

Per definició, la partícula associada a la representació  $(\chi_q, \sigma_r)$  té massa  $m$  (que proporciona  $q$ ) i espín  $s = r/2$ . Veiem, doncs, que els valors de l'espín poden ser

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

A tota partícula de massa  $m$  i espín  $s = r/2$  correspon una fibra,  $V_{r+1}$ , de dimensió  $2s + 1$ . El fet s'interpreta tot dient que la partícula en qüestió admet  $2s + 1$  estats de polarització.

**6.3. Definició.** L'*electró* és una partícula de massa i espín donats per

$$m = 9.1093897(54) \times 10^{-31} \text{kg}, \quad s = 1/2.$$

Pot estar doncs polaritzat de dues maneres diferents.

Amb una mica més de feina, i gràcies al teorema de Peter-Weyl, podríem construir funcions per descriure analíticament els estats solució de l'equació Dirac.

No obstant tot el recopilat fins ara, encara no podem passar a la descripció directa de l'àtom d'hidrogen. En el sistema quàntic relativista associat a l'àtom d'hidrogen, l'electró es mou sota la influència del camp de Coulomb creat pel seu nucli. En aquest cas, l'electró no és una partícula lliure. Per al seu estudi ens calen mètodes pertorbatius.



## §7. L'àtom d'hidrogen relativista i amb espín

La teoria de partícules sotmeses a l'acció d'un camp exterior és un primer pas per descriure fenòmens d'interacció de partícules. Els camps exteriors exerceixen una influència en el moviment de les partícules sense que aquestes estiguin pertorbades per la presència d'altres partícules. Aquest és un concepte idealitzat atès que, a la realitat, les partícules interaccionen amb el camp que genera el mecanisme.

Suposem que el nostre camp exterior ve donat per una matriu  $4 \times 4$  amb entrades a  $L^2(\mathbb{R}^3)$ :

$$V(x) = (V_{i,j}(x)), \quad \text{on } x = (ct, \mathbf{x}).$$

A fi d'obtenir l'operador de Dirac *pertorbat*, la matriu del *potencial*  $V$  s'afegeix a l'operador de Dirac lliure  $H_0$ , i s'obté l'operador de Dirac *pertorbat*

$$H := H_0 + V.$$

Com que volem que el nou operador de Dirac continuï essent autoadjunt, imposem que la matriu  $V(x)$  sigui hermítica per a cada  $x$ . Notem que, d'entrada, estem considerant únicament potencials que són independents del temps. A fi que l'equació pertorbada continuï invariant per l'acció del grup de Poincaré, cal que el potencial satisfaci certes condicions de simetria sota l'acció d'aquest grup.

**7.1. Teorema.** *Suposem que  $\psi(\mathbf{x})$  sigui una solució de l'equació de Dirac pertorbada per mitjà del potencial  $V(x)$ . Sigui  $(a, \mathbf{L}) \in \tilde{\mathcal{P}}^\uparrow$ . Aleshores la funció d'ona  $\mathbf{L}\psi(\mathbf{L}^{-1}(x - a))$  és una solució de l'equació de Dirac amb el potencial transformat*

$$V'(x) = \mathbf{L}^{*-1}V(\mathbf{L}^{-1}(x - a))\mathbf{L}^{-1}.$$

En general, no es pot esperar aconseguir solucions de l'equació de Dirac pertorbada si no s'hi introdueixen algunes simetries addicionals. Des del punt de vista físic, les més importants són les simetries esfèriques dels potencials. En aquest cas, l'operador de Dirac es pot simplificar a bastament.

Podem ara considerar l'operador de Dirac que defineix el sistema mecànic quàntic associat a l'àtom d'hidrogen relativista i amb espín. Per a tal fi, suposem que l'àtom d'hidrogen està sotmès a l'acció d'un camp exterior electromagnètic que és constant en el temps. Prenem com a origen de coordenades espacials el nucli de l'àtom. Siguin ara  $m, e$  la massa i la càrrega de l'electró, respectivament, i  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  el mòdul del seu vector de posició. Recordem que

$$e = 1.60217733(49) \times 10^{-19} C.$$

Posem

$$H := H_0 - \frac{e^2}{r} \mathbf{1}_4.$$

**7.2. Teorema.** *L'operador  $H$  és essencialment autoadjunt. El seu espectre continu és  $(-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty)$ . El seu espectre discret ve donat per  $\{E_{n,k}\}$ , per a  $n = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, 3, \dots$ , on*

$$E_{n,k} = mc^2 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{(n + \sqrt{k^2 - \alpha^2})^2} \right)^{-1/2}.$$

*El valor  $N = n + k$  s'anomena el nombre quàntic principal. A més,  $\alpha = \frac{e^2}{ch} \sim \frac{1}{137}$ .*

**7.3. Definició.** L'operador  $\overline{H}$  és el hamiltonià del sistema mecànic quàntic relativista associat a l'àtom d'hidrogen.

# Bibliografía

- [Ba 48] Bargmann, V.: Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Annals of Math.* **48**, n. 2 (1948), 568–640.
- [Ge-Fo 65] Gelfand, I. M.; Fomin, S. V.: Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature, *Transl. AMS* **1** (1965), 49–65.
- [Gr 90] Greiner, W.: *Relativistic Quantum Mechanics*, Theoretical Physics, n. 3, Springer, 1990.
- [Ki 94] Kirillov, A. A.: *Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis I*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, n. 22, Springer, 1994.
- [Ko 83] Kostrikin A. I.: *Introducción al Álgebra*, Mir, 1983.
- [Ko-Ma 89] Kostrikin, A. I.; Manin, Yu. I.: *Linear Algebra and Geometry*, Gordon and Breach, 1989.
- [Mac 89] Mackey, G. W.: *Unitary Group Representations in Physics, Probability and Number Theory*, Addison-Wesley, 1989.
- [On-Vi 90] Onishchik, A. L.; Vinberg, E. B.: *Lie Groups and Algebraic Groups*, Springer, 1990.
- [Pi 73] Pichon, G.: *Groupes de Lie. Représentations linéaires et applications*, Méthodes, Hermann, 1973.
- [Si 68] Simms, D. J.: *Lie Groups and Quantum Mechanics*, LNM, n. 52, Springer, 1968.
- [Sim 96] Simon, B.: *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics, n. 10, AMS, 1996.
- [Tha 92] Thaller, B.: *The Dirac Equation*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1992.

- [**Tri86**] Triebel, H.: *Analysis and Mathematical Physics*, Mathematics and Its Applications, D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [**We50,31**] Weyl, H.: *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, 1950, 31.

# Representacions de grups de Lie semisimples i compactes

JOSEFINA DEXEUS SESSIÓ 1A. I 2A. DEL DIA 6 DE NOVEMBRE DE 1996

É. Cartan, a partir de la classificació de les àlgebres de Lie semisimples complexes, descriu les representacions irreductibles de dimensió finita cas per cas. A principi dels anys 20, H. Weyl fa un tractament general per mètodes transcendents. Descriurem mitjançant un exemple la idea bàsica de l'argument de Weyl.

Considerem una representació del grup de Lie  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ , que és connex i semisimple, però no compacte, en un  $\mathbb{C}$ -espai vectorial  $V$  de dimensió finita,

$$\mathbf{SL}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

En diferenciar, en resulta una representació de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ , que s'estén per linealitat a la complexificada  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{sl}(n)$ . Ara bé, també l'àlgebra de Lie real  $\mathfrak{su}(n)$  té per complexificada  $\mathfrak{sl}(n)$ ; així que, per restricció, s'obté una representació de  $\mathfrak{su}(n)$ . Finalment, a través de l'exponencial, passem a una representació del grup de Lie  $\mathbf{SU}(n)$ , que és connex, semisimple, compacte i simplement connex, en el mateix espai vectorial  $V$ :

$$\mathbf{SU}(n) \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Si, per exemple,  $W$  és un subespai de  $V$  invariant per a  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ , també és invariant per a  $\mathbf{SU}(n)$ ; per ser  $\mathbf{SU}(n)$  compacte,  $W$  té un complementari invariant que també ho és per a  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$ . De fet, hi ha una bijecció entre representacions de dimensió finita de  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{R})$  i representacions unitàries de dimensió finita de  $\mathbf{SU}(n)$ .

Aquest pas de grups de Lie no compactes amb àlgebres de Lie semisimples a grups de Lie compactes amb la mateixa complexificació de l'àlgebra de Lie és l'anomenat *unitarian trick* de H. Weyl.

## §1. Formes reals compactes

Només considerarem grups de Lie connexos.

**1.1. Proposició.** *Si  $G$  és un grup de Lie real compacte, la forma de Killing  $k$  és negativa.*

DEMOSTRACIÓ. Per ser  $G$  compacte, en l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  existeix un producte escalar invariant per a la representació adjunta  $\text{Ad}$

$$B(\text{Ad}xY, \text{Ad}xZ) = B(Y, Z).$$

en diferenciar, s'obté que

$$B(\text{ad}XY, Z) + B(Y, \text{ad}XZ) = 0,$$

igualtat que ens diu que els endomorfismes  $\text{ad}X$  són antisimètrics respecte  $B$  i

$$k(X, X) = \text{tr}(\text{ad}X)^2 = \sum a_{ij}a_{ji} = -\sum a_{ij}^2 \leq 0.$$

□

En particular, hem vist que els endomorfismes  $\text{ad}X$  són semisimples i els valors propis són imaginaris purs.

**1.2. Teorema.** (Weyl) *Si  $G$  és un grup de Lie real compacte i semisimple, el recobriment universal  $\tilde{G}$  també és compacte i semisimple ([Va 74, p. 345]).*

Cal remarcar, com a exemple, que el tor és compacte però no ho és el seu recobriment universal (el tor no és semisimple).

Donem ara un criteri infinitesimal de compacitat.

**1.3. Proposició.** *Sigui  $G$  un grup de Lie real semisimple;  $G$  és compacte si, i només si,  $k$  és definida negativa.*

DEMOSTRACIÓ. En els grups semisimples, la forma de Killing és no degenerada, i només cal aplicar la proposició 1.1 per saber que la condició és necessària.

Per a la suficiència, cal tenir present que si  $G$  és semisimple amb àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , el grup  $\text{Ad } G = (\text{Aut } \mathfrak{g})^0$  és algebraic amb la mateixa àlgebra de Lie; per tant, semisimple, i que opera sobre  $\mathfrak{g}$  fidelment i preserva  $k$ . En la nostra hipòtesi,  $(\text{Aut } \mathfrak{g})^0$  és un subgrup tancat del grup ortogonal relatiu a  $-k$ ,  $\text{SO}(-k)$ . Com que aquest és compacte,  $(\text{Aut } \mathfrak{g})^0$  també ho és. Segons el teorema de Weyl, el recobriment universal  $\tilde{G}$  també és compacte i semisimple. Finalment,  $G$  és compacte per ser imatge contínua d'un compacte.  $\square$

Siguin  $\mathfrak{g}$  una àlgebra de Lie real i  $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$  la seva complexificada. La majoria de propietats es transmeten per extensió d'escalars i per restricció. Per exemple,  $\mathfrak{g}$  és semisimple si, i només si,  $\mathfrak{g}_c$  és semisimple; els rangs de  $\mathfrak{g}$  i de la complexificada són iguals;  $\mathfrak{h}$  és una subàlgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$  si, i només si,  $\mathfrak{h}_c$  és una subàlgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}_c$ ; elements regulars es corresponen amb elements regulars ... Assenyalem, només, que les subàlgebres de Cartan de  $\mathfrak{g}$  no són necessàriament conjugades per  $\text{Int } \mathfrak{g}$ , però en tot cas hi ha un nombre finit de classes de conjugació.

S'anomena  $\mathfrak{g}$  una forma real de  $\mathfrak{g}_c$  i s'afegeix compacta si la forma de Killing de  $\mathfrak{g}$  és definida negativa.

Donem ara un teorema d'existència i unicitat de formes reals compactes.

**1.4. Teorema.** *Si  $\mathfrak{g}$  és una àlgebra de Lie semisimple complexa, existeix una forma real compacta, única a menys d'automorfismes de  $\mathfrak{g}$ .*

DEMOSTRACIÓ. Podem prendre una base de  $\mathfrak{g}$  (base de Weyl) de la manera següent:

- i)  $H_\alpha, \forall \alpha \in S$ , la base habitual de  $\mathfrak{h}$ .
- ii)  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}, \forall \alpha \in R$  tals que  $k(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$  (aleshores  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ );
- iii) si  $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in R, N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha - \beta}$ , on  $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha, \beta} X_{\alpha + \beta}$ .

Notem  $a_\alpha := iH_\alpha$ ,  $b_\alpha := X_\alpha - X_{-\alpha}$ ,  $c_\alpha := i(X_\alpha + X_{-\alpha})$ . Aleshores, l'espai vectorial real  $\mathfrak{g}_0 = \langle a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \rangle_{\mathbb{R}}$  és una forma real compacta de  $\mathfrak{g}$ . En efecte, és immediat que  $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{g}$  i que  $\mathfrak{g}_0$  és una subàlgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ ; també  $k$  restringida a  $\mathfrak{g}_0$  és definida negativa, perquè si  $x := \sum \lambda_\alpha a_\alpha + \sum \mu_\alpha b_\alpha + \sum \gamma_\alpha c_\alpha = \sum \lambda_\alpha iH_\alpha + \sum (\mu_\alpha + i\gamma_\alpha)X_\alpha + \sum (\mu_\alpha - i\gamma_\alpha)X_{-\alpha}$ , tindrem  $k(x, x) = -\sum \lambda_\alpha^2 - \sum (\mu_\alpha^2 + \gamma_\alpha^2) \leq 0$ .  $\square$

Per exemple, les àlgebres de Lie  $\mathfrak{su}(n)$ ,  $\mathfrak{so}(n)$ ,  $\mathfrak{sp}(n)$  són respectivament les formes reals compactes de les àlgebres  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ .

Globalment, tenim les mateixes definicions. Si  $G$  és un grup de Lie complex amb àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , i  $G_0$  és un subgrup de Lie real de  $G$  amb àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$ , s'anomena  $G_0$  una forma real (compacta) de  $G$  si, i només si,  $\mathfrak{g}_0$  és una forma real (compacta) de  $\mathfrak{g}$ .

**1.5. Teorema.** *Tot grup de Lie semisimple complex admet una forma real compacta única a menys de conjugació.*

Per exemple,  $\mathbf{SU}(n)$ ,  $\mathbf{SO}(n)$ ,  $\mathbf{Sp}(n)$  són, respectivament, les formes reals compactes dels grups  $\mathbf{SL}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathbf{SO}(n, \mathbb{C})$ ,  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ .

La primera part del teorema següent examina la connexió amb les formes reals compactes en el cas simplement connex, fet que permet donar el resultat bàsic sobre les representacions.

**1.6. Teorema.** *Tot grup de Lie compacte semisimple pot ser immers com a forma real d'algun grup semisimple complex. Sigui  $G$  un grup de Lie complex semisimple i simplement connex. Les formes reals compactes són subgrups de Lie de  $G$  compactes i simplement connexos. Per a cada representació irreductible de dimensió finita  $\rho$  de  $G$ , la restricció a una forma real compacta és irreductible i la classe d'equivalència només depèn de  $\rho$ . A més, la correspondència entre les classes d'equivalència respectives és bijectiva.*

En definitiva, si  $\mathfrak{g}$  és una forma real compacta de l'àlgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  i  $\tilde{G}$  és la forma real compacta del grup de Lie semisimple simplement connex  $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$  corresponent, les classes de representacions irreductibles dels quatre objectes en un espai vectorial complex  $V$  de dimensió finita es corresponen bijectivament segons el diagrama



$$\begin{array}{ccc}
\text{Reps}(\tilde{G}_{\mathbb{C}}, V) & \xrightarrow{a} & \text{Reps}(\tilde{G}, V) \\
b \downarrow & & c \downarrow \\
\text{Reps}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, V) & \xrightarrow{d} & \text{Reps}(\mathfrak{g}, V),
\end{array}$$

on les aplicacions  $a$ ,  $d$  són les aplicacions restricció i  $b$ ,  $c$  les obtingudes a partir de la diferencial.

En particular, les representacions irreductibles obtingudes en els capítols anteriors de l'àlgebra de Lie complexa  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  i del grup de Lie real  $\mathbf{SU}(2)$  es corresponen bijectivament.

## §2. Tors maximals dels grups de Lie compactes

Recordem que un tor  $T$  és un grup de Lie connex abelià i compacte. És isomorf a  $\dim T$ -còpies de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  i admet un generador topològic.

Fixem  $G$  un grup de Lie real, compacte i connex, i  $T$  un tor maximal. Notem per  $\mathfrak{g}$  i  $\mathfrak{h}$  les àlgebres de Lie respectives.

Per ser  $G$  compacte, podem escollir una mètrica euclidiana en  $\mathfrak{g}$  invariant per a l'acció de la representació  $\text{Ad}$ . La descomposició associada,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\perp} \oplus \mathfrak{h}$ , és invariant per a l'acció de  $T$  a través de l'adjunta ( $\text{Ad}$ ); per ser  $T$  abelià, opera trivialment sobre  $\mathfrak{h}$ , i per ser  $T$  maximal, no opera trivialment sobre cap vector no nul de  $\mathfrak{h}^{\perp}$ .

El normalitzador de  $T$  en  $G$  és un subgrup tancat de  $G$ ; per tant, és un grup de Lie compacte que conté  $T$ . El quocient  $N_G(T)/T$  s'anomena el grup de Weyl de  $G$  associat a  $T$ . Veurem que tots els tors maximals són conjugats, de manera que diferents tors maximals donen grups de Weyl isomorfs.

Per exemple, en el grup  $\mathbf{U}(n)$ , el conjunt de matrius diagonals és un tor maximal i té grup de Weyl isomorf al grup simètric de  $n$  elements.

**2.1. Teorema.** *El grup de Weyl  $W$  d'un grup de Lie real  $G$  compacte i connex és finit.*

**DEMOSTRACIÓ.** Si  $\mathfrak{k}$  és l'àlgebra de Lie de  $N_G(T)$  tindrem, amb les notacions

anterior,  $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}^\perp) \oplus \mathfrak{h}$ . Però  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}^\perp \subset \mathfrak{h}$ , i en resulta  $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}$ . Per ser  $T$  connex,  $T$  és la component connexa de la identitat en  $N_G(T)$ . Finalment, per la compacitat del normalitzador, el quocient  $W$  és compacte i discret; per tant, finit.  $\square$

Per ser  $T$  tancat, l'espai homogeni  $G/T$  té estructura de varietat diferenciable i l'aplicació conjugació

$$\begin{aligned}\psi : G/T \times T &\longrightarrow G \\ (xT, y) &\longrightarrow xyx^{-1}\end{aligned}$$

és un morfisme de varietats compactes i connexes de la mateixa dimensió.

Ara volem calcular el grau de  $\psi$ , que és un enter tal que

$$\begin{aligned}\psi^* : H^n(G) &\longrightarrow H^{n-r}(G/T) \otimes H^r(T), \\ \omega_G &\longrightarrow \text{grau } \psi \, \omega_{G/T} \otimes \omega_T\end{aligned}$$

on  $n = \dim G$  i  $r = \dim T$ . Per a això, farem ús del criteri següent:

- i) Si  $\psi$  no és exhaustiva,  $\text{grau } \psi = 0$ .
- ii) Si existeix  $g \in G$  tal que  $\psi^{-1}(g) = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$  i  $\psi$  és un difeomorfisme en cada  $x_i$ ,  $\text{grau } \psi = \sum (-1)^{\epsilon_i}$ , on  $\epsilon_i$  és 1 o 0 segons si es conserva la orientació previamente fixada o no.

La projecció  $\pi : G \longrightarrow G/T$  induïx una aplicació entre  $\mathfrak{g}$  i l'espai tangent de  $G/T$  en el neutre, que és un isomorfisme entre  $\mathfrak{h}^\perp$  i aquest espai tangent. Via aquest isomorfisme, identifiquem ambdós subespais. Per translació, podem veure  $d\psi$  en cada punt com una aplicació de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{g}$ .

El lema següent ens posarà en les condicions del criteri per calcular el grau de  $\psi$ .

**2.2. Lema.** *Sigui  $a$  un generador de  $T$ . Aleshores,*

- i)  $\psi^{-1}(a)$  té  $|W|$  elements.
- ii)  $\det d\psi$  és positiu en aquests punts.

**DEMOSTRACIÓ.** És clar que  $\psi^{-1}(a) = \{(xT, x^{-1}ax)\}_{x \in W}$  i que el  $\det d\psi$  en el punt  $(xT, x^{-1}ax)$  és el mateix que en el punt  $(xT, a)$ . Per a tot  $X \in \mathfrak{h}^\perp$ ,  $Y \in \mathfrak{h}$ , calculem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (x \exp(tX) a \exp(tY) \exp(-tX) x^{-1})_{t=0} (x a x^{-1}) \\
&= x(Xa + aY - aX)x^{-1} x a^{-1} x^{-1} \\
&= x(X + \text{Ad } aY - \text{Ad } aX)x^{-1} \\
&= x((I - \text{Ad } a)X + Y)x^{-1}.
\end{aligned}$$

D'aquí veiem que  $\det d\psi_{(xT,a)} = \det(I - \text{Ad } a)$ . És positiu perquè  $I - \text{Ad } a$  no té valors propis reals; els valors propis són complexos agrupats per parelles, un i el seu conjugat. En efecte, si tingués valors propis reals, haurien de ser  $+1$  o  $-1$ , ja que  $\text{Ad } a$  és ortogonal. Com que  $a^2$  també genera  $T$ , n'hi ha prou amb comprovar que  $\text{Ad } a$  no té el valor propi 1. Si per a algun  $X \in \mathfrak{h}^\perp$  fós  $\text{Ad } aX = X$ , tindriem el grup abelià i connex  $\{\exp sX\}_{s \in \mathbb{R}} T$ . Per ser  $T$  maximal, aquest grup està contingut en  $T$  i, per tant,  $X \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{h}^\perp = 0$ .  $\square$

Remarquem que en el curs de la demostració anterior s'ha observat que  $\dim G/T$  és parella.

Conseqüència immediata del lema és la següent

**2.3. Proposició.** grau  $\psi = |W|$ . En particular,  $\psi$  és exhaustiva.

Donem ara algunes conseqüències:

- 1)  $G = \bigcup_{x \in G} xTx^{-1}$ .
- 2) Tots els tors maximals de  $G$  són conjugats. En particular, tenen la mateixa dimensió, nombre que s'anomena el rang de  $G$ .
- 3) L'aplicació  $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$  és exhaustiva.

El morfisme de conjugació  $\psi$  permet passar d'integrals sobre  $G$  a integrals sobre  $T$ . Ho precisem donant a continuació la fórmula d'integració de Weyl, eina important en l'estudi de representacions.

**2.4. Teorema.** Sigui  $\mu$  una mesura de Haar sobre  $G$ , normalitzada, amb restricció a  $T$  també normalitzada. Si  $f$  és una funció integrable sobre  $G$ , invariant sobre les classes de conjugació, tindrem

$$\int_G f d\mu = \frac{1}{|W|} \int_T \det(1 - \text{Ad}) f d\mu.$$

DEMOSTRACIÓ. Notem per  $d\mu_{G/T}$  la mesura normalitzada obtinguda per composició amb la projecció canònica de  $G$  sobre  $G/T$  i apliquem a la integral la fórmula del canvi de variable induït per la conjugació  $\psi$ . Es té

$$\int_G f d\mu = \frac{1}{|W|} \int_{G/T \times T} \det(1 - \text{Ad } y) f(yxy^{-1}) d\mu_{G/T} d\mu_T.$$

El teorema de Fubini dona ara la fórmula buscada.  $\square$

Cal observar que la integral del segon membre no es calcula sobre tots els punts de  $T$  perquè el jacobià del canvi de coordenades s'anul·la en els punts, anomenats singulars, que pertanyen a més d'un tor maximal. Ara bé, el conjunt d'aquests punts té mesura 0.

### §3. Representacions de les àlgebres de Lie semisimples complexes

Siguin  $\mathfrak{g}$  una àlgebra de Lie semisimple complexa de dimensió finita,  $\mathfrak{h}$  una subàlgebra de Cartan i  $R$  el sistema d'arrels associat a  $\mathfrak{h}$ . Escollim una base  $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $R$  i notem per  $R^+$  el conjunt d'arrels positives.

Per a cada  $\alpha \in R^+$ , escollim  $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ ,  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$  tals que  $[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha$  (les notacions habituals  $\dots$ ). Si  $\alpha$  és una de les arrels simples  $\alpha_i$ , escriurem  $X_i, Y_i, H_i$  en lloc de  $X_{\alpha_i}, Y_{\alpha_i}, H_{\alpha_i}$ . Notarem  $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha$ ,  $\mathfrak{n}^- = \sum_{\alpha < 0} \mathfrak{g}^\alpha$ ,  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ .

Sigui  $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$  una representació de  $\mathfrak{g}$  en un  $\mathbb{C}$ -espai vectorial  $V$  de dimensió qualsevol. Si  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , considerem  $V^\lambda = \{v \in V \mid \rho(H)v = \lambda(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}$ . Si  $V^\lambda \neq 0$ , es diu que  $\lambda$  és un pes de  $\rho$  de multiplicitat  $\dim V^\lambda$  i que  $v \in V^\lambda$  és un vector de pes  $\lambda$ . Per exemple, les arrels són els pesos de la representació adjunta.

#### 3.1. Proposició.

- a)  $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V^\lambda = V^{\lambda+\alpha}, \forall \alpha \in R$ .
- b) La suma  $V' = \sum V^\lambda$  és directa i  $V'$  és un  $\mathfrak{g}$ -submòdul de  $V$ .
- c) Si la dimensió de  $V$  és finita,  $V' = V$ .

Si per a un  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  existeix  $v \in V^\lambda$  tal que  $\rho(X_\alpha)v = 0, \forall \alpha \in R^+$  ( $v$  s'anomena vector primitiu de pes  $\lambda$ ),  $v$  seria un vector que no augmentaria el seu pes per l'acció de  $\rho$ . El  $\mathfrak{g}$ -submòdul  $E$  generat per  $v$  satisfà:

- a) Si  $\beta_1, \dots, \beta_k$  són les arrels positives diferents,  $E$  està generat com espai vectorial per elements de la forma  $\rho(Y_{\beta_1})^{m_1} \dots \rho(Y_{\beta_k})^{m_k}$ , amb  $m_i \in \mathbb{N}$ ;
- b) Els pesos de  $E$  són de la forma  $\lambda - \sum_{i=1}^n p_i \alpha_i$ , amb  $p_i \in \mathbb{N}$ , i tenen dimensió finita;
- c)  $\dim E^\lambda = 1$ ;

i s'anomena de pes maximal  $\lambda$ ; quan  $\rho$  és irreductible, coincideix amb  $V$ .

Es poden donar exemples de representacions irreductibles que no contenen cap element primitiu; són necessàriament de dimensió finita, com veurem aviat.

El teorema següent ens explica com construir representacions irreductibles que admetin elements primitius.

**3.2. Teorema.** *Existeix una bijecció entre els elements  $\lambda$  de  $\mathfrak{h}^*$  i les classes de representacions de  $\mathfrak{g}$  irreductibles amb pes maximal  $\lambda$ .*

DEMOSTRACIÓ. Siguin  $V_1$  i  $V_2$   $\mathfrak{g}$ -mòduls irreductibles generats per  $v_1$  i  $v_2$ , vectors primitius de pesos  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , respectivament. Cal veure que  $V_1$  i  $V_2$  són isomorfs si, i només si,  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  són iguals. Els pesos de  $V_1$  són de la forma  $\lambda_1 - \sum p_i \beta_i$  i els de  $V_2$ ,  $\lambda_2 - \sum p'_i \beta_i$ , amb  $p_i, p'_i \in \mathbb{N}$ . Les igualtats  $\lambda_2 = \lambda_1 - \sum p_i \beta_i$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 - \sum p'_i \beta_i$  només són possibles si  $p_i = p'_i = 0$  per a tot  $i$ . Si ara  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , el  $\mathfrak{g}$ -mòdul  $V_1 \oplus V_2$  té  $v_1 + v_2$  per element primitiu de pes més gran  $\lambda$ . Es veu fàcilment que les projeccions de  $V_1 \oplus V_2$  sobre cada component són isomorfismes.

Recíprocament, donada  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , considerem la representació de grau 1 següent:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\langle e \rangle) \\ H &\longrightarrow (e \rightarrow \lambda(H)e) \\ X &\longrightarrow (e \rightarrow 0). \end{aligned}$$

Sigui  $V_\lambda$  el mòdul de Verma associat,  $V_\lambda := \mathbf{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbf{U}(\mathfrak{b})} \langle e \rangle$ , on  $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$  denota l'àlgebra envelopant de  $\mathfrak{g}$  (recordem que és el quocient entre l'àlgebra tensorial de  $\mathfrak{g}$  i l'ideal bilàter generat per  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ , per a tot  $x, y \in \mathfrak{g}$ ). Com a  $\mathfrak{g}$ -mòdul, està generat per  $1 \otimes e$ , que és primitiu de pes  $\lambda$ . Sigui  $N_\lambda$  el  $\mathfrak{g}$ -submòdul de  $V_\lambda$  generat per tots els  $\mathfrak{g}$ -submòduls propis de  $V_\lambda$ . Pot ser 0, però sempre  $N_\lambda \neq V_\lambda$ . Per exemple, per a l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2)$ , segons sigui  $\lambda$ , pot ser  $N_\lambda = 0$  o  $N_\lambda \neq 0$ . El quocient  $V_\lambda/N_\lambda$  és un  $\mathfrak{g}$ -mòdul simple amb pes més gran  $\lambda$ .  $\square$

Ens fixarem ara en les representacions que són de dimensió finita.

**3.3. Teorema.** *La bijecció del teorema anterior induïx una subbijecció entre el conjunt de pesos dominants,*

$$\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(H_\alpha) \geq 0, \forall \alpha \in S\},$$

*i les classes de representacions irreductibles de dimensió finita.*

**DEMOSTRACIÓ.** Primer observem que tot  $\mathfrak{g}$ -mòdul  $V$  de dimensió finita conté un element primitiu. En efecte, per ser  $V$  de dimensió finita, tenim  $V = \bigoplus V^\lambda$ . Com que  $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V^\lambda = V^{\lambda+\alpha}$ , existeix  $\lambda$  tal que per a tot  $\alpha \in R^+$ ,  $\lambda + \alpha$  no és un pes. Per tant,  $n_+ V^\lambda = 0$  i hi ha elements primitius.

Si afegim  $V$  simple i  $v$  és un vector primitiu de pes  $\lambda$ ,  $V$  està generat per  $v$  i té pes maximal  $\lambda$ . Per tant, tota representació irreductible de dimensió finita té un pes més gran.

Sigui ara  $V_\lambda$  un  $\mathfrak{g}$ -mòdul simple de dimensió finita generat per un vector primitiu  $v$  de pes  $\lambda$ . També  $v$  és un element primitiu de  $V_\lambda$  com a  $\mathfrak{sl}(2) = \langle X_\alpha, Y_\alpha, H_\alpha \rangle$ -mòdul. Com que les representacions de  $\mathfrak{sl}(2)$  ja han estat estudiades, ja sabem que  $\lambda(H_\alpha) \geq 0$ , per a tot  $\alpha \in S$ .

Recíprocament, cal veure que si  $\lambda$  és un pes dominant, el  $\mathfrak{g}$ -mòdul simple amb pes més gran  $\lambda$ ,  $V_\lambda$ , generat per  $v$ , és de dimensió finita. Per a això, cal comprovar:

- i)  $V_\lambda$  és suma de  $s_i = \langle X_i, Y_i, H_i \rangle$ -submòduls de dimensió finita generats per  $\rho(Y_i)^p v$ , amb  $0 \leq p \leq m_i$ ,  $m_i = \lambda(H_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- ii) El conjunt de pesos de  $V_\lambda$ ,  $P_\lambda$ , és invariant per a la simetria associada amb l'arrel  $\alpha_i$ .

iii)  $P_\lambda$  és finit.

Finalment, el resultat es dedueix del fet que els pesos tenen multiplicitat finita.  $\square$

Remarquem que el grup de Weyl opera sobre el conjunt de pesos d'un  $\mathfrak{g}$ -mòdul simple amb pes més gran i que aquesta acció conserva la multiplicitat dels pesos.

Sigui  $\{\omega_i\}_{i=1,\dots,n}$  la base de  $h^*$  dual de la base  $\{H_i\}_{i=1,\dots,n}$ . Els  $\omega_i$  s'anomenen els pesos fonamentals del sistema d'arrels  $R$  (respecte la base escollida  $S$ ).

Els pesos dominants es caracteritzen per ser combinacions lineals dels pesos  $\omega_i$  amb coeficients enters no negatius.

Les representacions irreductibles amb pes maximal  $\omega_i$  s'anomenen les representacions fonamentals de  $\mathfrak{g}$ . Si  $\rho_i$  és una tal representació en el  $\mathbb{C}$ -espai vectorial  $V_i$ , amb vector primitiu  $v_i$ , tota representació irreductible de dimensió finita és equivalent a una de pes més gran  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda(H_i)\omega_i$ , que és una subrepresentació de

$$\rho = \overbrace{\rho_1 \otimes \dots \otimes \rho_1}^{\lambda(H_1)} \otimes \dots \otimes \overbrace{\rho_n \otimes \dots \otimes \rho_n}^{\lambda(H_n)},$$

amb vector primitiu

$$v = v_1 \otimes \dots \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes \dots \otimes v_n.$$

Observem que podem substituir el  $\mathfrak{g}$ -mòdul  $V_i \otimes \dots \otimes V_i$  per la  $\lambda(H_i)$ -èsima potència simètrica de  $V_i$  sense canviar el pes maximal.

Per exemple, si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ , hi ha una sola arrel positiva  $\alpha = 2\lambda$  i un únic pes fonamental  $\lambda$ . La representació natural

$$\rho : \mathfrak{sl}(2) \longrightarrow \text{End}(\mathbb{C}^2)$$

és irreductible amb pes maximal  $\lambda$ . Tota representació irreductible de dimensió finita és equivalent a una de pes més gran  $k\lambda$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , que és una subrepresentació de

$$\otimes^k \rho : \mathfrak{sl}(2) \longrightarrow \text{End}(\otimes^k \mathbb{C}^2).$$

Es prova que és exactament la  $k$ -èsima potència simètrica

$$\mathrm{Sym}^k \rho : \mathfrak{sl}(2) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{Sym}^k \mathbb{C}^2).$$

En particular, és de grau igual a  $k + 1$ .

En usar l'*unitarian trick* de Weyl, també tenim calculades totes les representacions de dimensió finita dels grups de Lie  $\mathbf{SL}(2)$  i  $\mathbf{SU}(2)$ .

Els físics acostumen a parametritzar per l'espín  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ , amb  $k = 2s$  i grau igual a  $2s + 1$ .

## §4. La fórmula de Weyl dels caràcters

Sigui  $G$  un grup de Lie semisimple, compacte, connex i simplement connex, amb àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Triem una subàlgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  i notem  $T$  el tor maximal associat. Sabem que les representacions irreductibles de dimensió finita de  $G$  es corresponen amb les representacions irreductibles de dimensió finita de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  i també amb les de la complexificada  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  (les notarem amb la mateixa lletra). Per completar els resultats de la secció anterior, resta calcular el caràcter i el grau de les representacions de pes maximal.

Donat que tot element de  $G$  és conjugat a un element de  $T$ , i que els caràcters són invariants sobre les classes de conjugació, per calcular el caràcter d'una representació, n'hi ha prou amb fixar-se en l'acció de  $T$ , que és un subgrup de Lie tancat, abelià i connex.

Sigui  $\rho_{\lambda}$  una representació de  $G$  (o de  $\mathfrak{g}$ , o de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ) irreductible sobre un  $\mathbb{C}$ -espai vectorial  $V$  de dimensió finita, de pes maximal  $\lambda$ , i amb caràcter  $\chi_{\lambda}$ . Notarem els diferents pesos de  $\rho_{\lambda}$  per  $\mu$ , i per  $m_{\mu}$  la multiplicitat. Per la definició dels pesos,

$$\chi_{\lambda}(\exp H) = \sum_{\mu \in P_{\lambda}} m_{\mu} e^{\mu(H)} \quad \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Utilitzarem la notació simbòlica

$$\chi_{\lambda} = \sum_{\mu \in P_{\lambda}} m_{\mu} e^{\mu}.$$



Si  $\mu$  és un pes, escriurem

$$A_\mu := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\mu},$$

on  $\epsilon(w) = \det w$ . Se satisfà que  $wA_\mu = \epsilon(w)A_\mu$ .

Cal remarcar que  $A_\delta := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$  satisfà  $\delta(H_i) = 1, i = 1, \dots, n$ . Per tant,  $\delta$  és un pes i es comprova que

$$A_\delta = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})$$

i també que

$$\begin{aligned} |A_\delta|^2 &= A_\delta \overline{A_\delta} = \prod_{\alpha \in R^+} (e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}) \overline{(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}})} = \prod_{\alpha \in R^+} (e^\alpha - 1)(e^{-\alpha} - 1) \\ &= \prod_{\alpha \in R} (1 - e^\alpha) = \det(1 - \text{Ad}). \end{aligned}$$

**4.1. Teorema.** *El caràcter  $\chi_\lambda$  d'una representació irreductible de dimensió finita de pes més gran  $\lambda$  és donat per*

$$\chi_\lambda = \frac{A_{\lambda+\delta}}{A_\delta}.$$

(Remarquem que  $A_\delta$  és 0 sobre els elements singulars, però tota classe d'elements regulars de  $G$  talla als elements regulars de  $T$  i el conjunt de tots els elements regulars és dens).

DEMOSTRACIÓ. Calculem

$$A_\delta \cdot \chi_\lambda = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w\delta} \cdot \sum_{\mu \in P_\lambda} m_\mu e^\mu = \sum_{w \in W, \mu \in P_\lambda} n_{w, \mu} e^{w\delta + \mu}.$$

Amb atenció, s'observa que  $A_{\lambda+\delta}$  surt en aquesta suma, de manera que podem escriure

$$A_\delta \cdot \chi_\lambda = n_\lambda A_{\lambda+\delta} + \sum_{\mu \in P_\lambda, \mu \neq \lambda+\delta} n_\mu e^\mu.$$

Per ser el caràcter  $\chi_\lambda$  irreductible, podem aplicar les relacions d'ortogonalitat i la fórmula d'integració de Weyl per obtenir

$$1 = \int_G \chi_\lambda \cdot \overline{\chi_\lambda} d\mu_G = \int_G |\chi_\lambda|^2 d\mu_G = \frac{1}{|W|} \int_T |\chi_\lambda|^2 \cdot |A_\delta|^2 d\mu_T.$$

Per l'ortonormalitat dels  $e^\mu$  tenim, finalment,

$$1 = n_\lambda^2 + \frac{1}{|W|} \sum_{\mu \in P_\lambda, \mu \neq \lambda} n_\mu^2.$$

Per força, ha de ser  $n_\lambda = 1$  i  $n_\mu = 0$ .  $\square$

Per exemple, si  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ , el caràcter de la representació de pes maximal  $k\lambda$ , amb  $k \geq 0$ , és donat per

$$\chi_\lambda = \frac{e^{(k+1)\lambda} - e^{-(k+1)\lambda}}{e^\lambda - e^{-\lambda}} = e^{k\lambda} + e^{(k-2)\lambda} + \dots + e^{-k\lambda}.$$

Conseqüència de la fórmula dels caràcters és la fórmula de les dimensions que donem a continuació.

**4.2. Teorema.** *El grau d'una representació irreductible de pes maximal  $\lambda$  és*

$$\prod_{\alpha \in R^+} \frac{(\lambda + \delta)(H_\alpha)}{\delta(H_\alpha)}.$$

**DEMOSTRACIÓ.** En principi, només s'ha de calcular el valor de  $\chi_\lambda$  en el neutre, però no és tan fàcil perquè la fórmula dels caràcters queda indeterminada en el neutre i cal fer un pas al límit (de fet,  $A_\delta$  en el neutre és un zero d'ordre el nombre d'arrels positives).  $\square$

Finalment, en el cas no simplement connex, tot grup de Lie és quotient del recobriment universal per un subgrup discret  $C$  contingut en el centre. Les representacions són aleshores les del recobriment universal que són trivials sobre  $C$ . Si  $\rho$  és una representació de pes maximal  $\lambda$ , serà trivial sobre  $C$  si i només si  $e^{\lambda(X)} = I$ , o sigui,

$$\lambda(X) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \quad \forall \exp X \in C.$$

Per exemple, les representacions irreductibles de  $\mathbf{PSL}(2) = \mathbf{SL}(2)/\{1, -1\}$  corresponen a les representacions irreductibles de  $\mathfrak{sl}(2)$  que són potències simètriques parelles.

## §5. Representacions dels grups clàssics

Tipus  $\mathbf{A}_n$ ,  $n \geq 1$ .

L'àlgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$  està formada per les matrius complexes  $(n+1) \times (n+1)$  de traça 0. El grup de Lie complex simplement connex corresponent és  $\mathbf{SL}(n+1)$ , que té per forma compacta el grup de Lie real  $\mathbf{SU}(n)$ .

Les matrius diagonals de traça 0 formen una subàlgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ . Prenem com a base de  $\mathfrak{g}$  les matrius  $E_{ii} - E_{i+1,i+1}$ ,  $E_{ij}$ ,  $i \neq j$ .

Si  $\lambda_i$  és l'element de  $\mathfrak{h}^*$  que assigna a una matriu diagonal  $H$  la component  $i$ , l'acció de  $\text{ad } H$  sobre  $\mathfrak{g}$ ,

$$[H, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)(E_{ij}),$$

dóna el sistema d'arrels  $R = \{\alpha_{ij}\}_{i \neq j}$ , on  $\alpha_{ij} := \lambda_i - \lambda_j$ . Escollim la base de  $R$ ,  $S = \{\alpha_i\}_{i=1, \dots, n}$ , on  $\alpha_i := \alpha_{i,i+1}$ .

El grup de Weyl és isomorf al grup simètric de  $n$  elements i opera sobre  $S$  per  $s_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ .

Els  $H_i$  són les matrius diagonals amb 1 en el lloc  $i$ ,  $-1$  en el lloc  $i+1$ , i els pesos fonamentals són

$$\omega_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

La representació natural

$$\rho_1 : \mathfrak{sl}(n+1) \longrightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{n+1})$$

és una representació fonamental de pes maximal  $\omega_1$ . En efecte, per a  $k = 1, \dots, n+1$ , el vector  $e_k$  de la base canònica de  $\mathbb{C}^{n+1}$  és primitiu de pes  $\lambda_k$ ; aquests són tots els pesos i  $\omega_1 = \lambda_1$  és el més gran, perquè

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_{i-1} = \lambda_1 - \lambda_k.$$

La irreductibilitat prové del fet que tots els pesos estan a la mateixa òrbita per a l'acció del grup de Weyl.

Considerem la representació  $\rho_k := \Lambda^k \rho_1$ ,

$$\rho_k : \mathfrak{sl}(n+1) \longrightarrow \text{End}(\Lambda^k \mathbb{C}^{n+1}),$$

que opera per

$$\rho_k(X)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = X e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} + \cdots + e_{i_1} \wedge \cdots \wedge X e_{i_k}.$$

Els pesos de  $\rho_k$  són  $\lambda_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n+1$ ; el més gran és  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \omega_k$ , i tots estan a la mateixa òrbita per a l'acció del grup de Weyl. Així, les  $\rho_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , descriuen totes les representacions fonamentals de  $\mathfrak{sl}(n+1)$ .

Aquestes  $\rho_k$  són la diferencial de les representacions fonamentals

$$\rho_k : \mathbf{SL}(n+1) \longrightarrow \text{GL}(\Lambda^k \mathbb{C}^{n+1})$$

determinades per

$$\rho_k(A)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = A e_{i_1} \wedge \cdots \wedge A e_{i_k}.$$

Per restricció, s'obtenen les del grup  $\mathbf{SU}(n)$ .

El centre de  $\mathbf{SL}(n+1)$  és un grup cíclic  $C$  de  $n+1$  elements generat, per exemple, per  $\exp X$ , amb

$$X = \frac{2\pi i}{n+1} \sum_{i=1}^n (E_{ii} - n E_{n+1, n+1}).$$

Tot grup de Lie no simplement connex amb àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  és isomorf a un quocient de  $\mathbf{SL}(n+1)$  per un subgrup de  $C$  de  $m$  elements. Una representació de pes maximal

$$\lambda = \lambda(H_1)\omega_1 + \cdots + \lambda(H_n)\omega_n$$

(posant  $a_k := \sum_{i=k}^n \lambda(H_i)$ , utilitzarem la notació  $\lambda = a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n$ )

passa al quocient quan  $\lambda(X) = (2\pi i/m)(a_1 + \cdots + a_n)$  és múltiple de  $2\pi i$ , o sigui, quan  $a_1 + \cdots + a_n$  és múltiple de  $m$ . En particular, per al grup  $\mathbf{PSL}(n+1)$ , la condició és que  $a_1 + \cdots + a_n$  sigui múltiple de  $n+1$ .

En el grup  $\mathbf{PSL}(2)$ , això significa que les representacions irreductibles corresponen a les de  $\mathfrak{sl}(2)$  que tenen pes maximal un múltiple enter de l'arrel positiva  $\alpha$ .

Tipus  $\mathbf{C}_n$ ,  $n \geq 2$ , ( $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}_1$ ).

L'àlgebra de Lie simplèctica  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n)$  té per elements les matrius complexes  $2n \times 2n$ ,  $M$ , tals que

$$M^t S + SM = 0, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Són matrius del tipus

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix},$$

amb  $B$  i  $C$  simètriques.

El grup de Lie simplement connex corresponent és el grup simplèctic  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ , format per els automorfismes de  $\mathbb{C}^{2n}$  que deixen invariant una forma bilineal antisimètrica no degenerada  $Q$  (no depèn de  $Q$ ). Té per forma compacta el grup  $\mathbf{Sp}(n) = \mathbf{Sp}(n, \mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$ .

Prenem com a subàlgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  les matrius amb  $A$  diagonal,  $B = 0$  i  $C = 0$ . Una base de  $\mathfrak{h}$  és  $E_{ii} - E_{n+i, n+i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . El sistema d'arrels associat és  $R = \{\pm\lambda_i \pm \lambda_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$ , i escollim com a base de  $R$ ,  $S = \{\lambda_i - \lambda_{i+1}\}_{1 \leq i < n} \cup \{2\lambda_n\}$ .

El grup de Weyl és isomorf al producte semidirecte del grup simètric de  $n$  elements pel grup  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ .

La base de  $\mathfrak{h}$  corresponent a  $S$  són les matrius diagonals  $H_i$  que, per a  $1 \leq i < n$ , tenen 1 en el lloc  $i$ , -1 en el lloc  $i+1$ ; mentre que, per a  $i = n$ , tenen 1 en el lloc  $n$ . Els pesos fonamentals són

$$\omega_i = \lambda_1 + \dots + \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

La representació natural

$$\rho_1 : \mathfrak{sp}(n) \longrightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{2n})$$

és una representació fonamental de pes maximal  $\omega_1$ . En efecte, els pesos són  $\{\pm\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\lambda_1 = \omega_1$  és el més gran, i tots pertanyen a la mateixa òrbita per a l'acció del grup de Weyl.

Les representacions  $\rho_k := \Lambda^k \rho_1$ ,  $1 < k \leq n$ , tenen pes maximal  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \omega_k$ ; però ara no són irreductibles. Cal restringir al  $\mathfrak{g}$ -submòdul generat per l'element primitiu  $e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ , que és el nucli de la contracció

$$\phi_k : \Lambda^k \mathbb{C}^{2n} \longrightarrow \Lambda^{k-2} \mathbb{C}^{2n}$$

definida per

$$\phi_k(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i < j} Q(v_i, v_j) (-1)^{i+j-1} v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge \hat{v}_j \wedge \cdots \wedge v_k.$$

Aquestes representacions fonamentals tenen grau  $\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-2}$ .

Les representacions de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{sp}(n)$  obtingudes són les diferencials de les representacions fonamentals del grup  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$ . Per restricció, s'obtenen les de la forma compacta  $\mathbf{Sp}(n)$ .

El centre del grup  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  té dos elements,  $I$  i  $-I = \exp X$ , on

$$X = \pi i \left( \sum_{i=1}^n (E_{ii} - E_{i+n, i+n}) \right).$$

Una representació de  $\mathbf{Sp}(n, \mathbb{C})$  de pes maximal  $\lambda$  dóna una representació irreductible del grup  $\mathbf{PSp}(n, \mathbb{C})$  si  $\lambda(X) = \pi i(a_1 + \cdots + a_n)$  (són les mateixes notacions que en el tipus  $\mathbf{A}_n$ ) és múltiple de  $2\pi i$ , o sigui, si  $a_1 + \cdots + a_n$  és parell.

Tipus  $\mathbf{B}_n$ ,  $n \geq 2$ , ( $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1$ ).

L'àlgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$  està formada per les matrius complexes  $2n+1 \times 2n+1$ ,  $M$ , tals que

$$M^t S + S M = 0, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Són matrius del tipus

$$\begin{pmatrix} A & B & a \\ C & -A^t & b \\ -b^t & -a^t & 0 \end{pmatrix},$$

amb  $B$  i  $C$  antisimètriques. El grup de Lie simplement connex corresponent és el grup  $\mathbf{Spin}(2n+1, \mathbb{C})$ , que té per forma compacta el grup  $\mathbf{Spin}(2n+1)$ .

Prenem com a subàlgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  les matrius diagonals i com a base del sistema d'arrels associat,  $\alpha_i := \lambda_i - \lambda_{i+1}$ ,  $1 \leq i < n$ ;  $\alpha_n := \lambda_n$ .

El grup de Weyl és isomorf al producte semidirecte del grup simètric de  $n$  elements pel grup  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ .

Els pesos fonamentals són

$$\omega_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_i, 1 \leq i < n; \quad \omega_n = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

La representació natural

$$\rho_1 : \mathfrak{so}(2n+1) \longrightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{2n+1})$$

té pesos  $\pm\lambda_i$ , 0; el pes més gran és  $\lambda_1 = \omega_1$ .

Més en general, per a  $k = 1, \dots, n-1$ , les representacions  $\rho_k := \Lambda^k \rho_1$  tenen pes més gran  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = \omega_k$ . Són irreductibles perquè la dimensió  $\binom{2n+1}{k}$  concorda amb la fórmula de dimensions.

Ara bé, si  $k = n$ , la corresponent  $\Lambda^n \rho_1$  també és una representació irreductible, però té pes maximal  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 2\omega_n$ . Per tant, la representació fonamental de pes maximal  $\omega_n$  no pot ser obtinguda per aquest procediment. Aquesta última representació és l'anomenada representació espín; l'obtindrem recordant la relació entre les àlgebres de Lie ortogonals i les àlgebres de Clifford.

Donats l'espai vectorial  $V := \mathbb{C}^{2n+1}$  i la forma bilineal simètrica no degenerada  $Q$  de matriu  $S$ , considerem el quocient entre l'àlgebra tensorial de  $V$  i l'ideal bilàter generat per  $v \otimes v - Q(v, v) \cdot 1$ , per a tot  $v \in V$ . És una àlgebra associativa, unitària, de dimensió  $2^{2n+1}$ ,  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduada,  $C(Q) = C(Q)^{\text{parell}} \oplus C(Q)^{\text{senar}}$ , anomenada l'àlgebra de Clifford associada a  $V$  i a  $Q$ .

L'aplicació de  $\Lambda^2 V$  a  $C(Q)$ , que assigna a  $a \wedge b$  l'element  $a \cdot b - Q(a, b)$ , combinada amb l'isomorfisme entre  $\Lambda^2 V$  i  $\mathfrak{so}(2n+1)$ , que assigna a  $a \wedge b$  l'endomorfisme  $\phi_{a \wedge b}(v) = 2(Q(b, v)a - Q(a, v)b)$ , indueix una immersió de  $\mathfrak{so}(2n+1)$  en  $C(Q)^{\text{parell}}$ , com a subàlgebra de Lie.

D'altra banda, la descomposició natural de  $V$ ,  $V = W \oplus W' \oplus U$ , on  $W$  i  $W'$  són subespais isòtrops de dimensió  $n$  i  $U$  és un subespai de dimensió 1 ortogonal a  $W$  i a  $W'$ , determina un isomorfisme d'àlgebres  $C(Q) \cong \text{End}(\Lambda W) \oplus \text{End}(\Lambda W)'$ , tal que  $C(Q)^{\text{parell}} \cong \text{End}(\Lambda W)$ .

S'obté, així, una representació de dimensió  $2^n$

$$\rho_n : \mathfrak{so}(2n+1) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\Lambda W),$$

en la qual tots els vectors de la base canònica de  $\Lambda W$ ,  $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ , són primitius de pesos  $\frac{1}{2}(\sum_{i \in I} \lambda_i - \sum_{j \notin I} \lambda_j)$ . Tots aquests pesos pertanyen a la mateixa òrbita per a l'acció del grup de Weyl i el més gran és  $\omega_n$ .

Les representacions de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(2n+1)$  obtingudes són les diferencials de les representacions fonamentals del grup de Lie complex **Spin**( $2n+1, \mathbb{C}$ ). Per restricció, s'obtenen les de la forma real compacta **Spin**( $2n+1$ ).

El centre del grup **Spin**( $2n+1, \mathbb{C}$ ) té dos elements,  $I$  i  $-I = \exp X$ , on  $X = 2\pi i(E_{11} - E_{n+1, n+1})$ . El quocient és el grup ortogonal complex **SO**( $2n+1, \mathbb{C}$ ) = **PSO**( $2n+1, \mathbb{C}$ ). Una representació de pes maximal

$$\lambda = \lambda(H_1)\omega_1 + \cdots + \lambda(H_n)\omega_n$$

passa al quocient quan  $\lambda(X) = 2\pi i(a_1 + \cdots + a_n)$  és múltiple de  $2\pi i$  (són les mateixes notacions que en el cas **A** <sub>$n$</sub> ), cosa que succeeix sempre perquè els coeficients  $\lambda(H_i)$  són enters positius.

Per restricció, s'obtenen les representacions fonamentals de la forma compacta **SO**( $2n+1$ ), que són

$$\rho_k : \mathbf{SO}(2n+1) \longrightarrow \text{GL}(\Lambda^k \mathbb{C}^{2n+1}),$$

determinades per

$$\rho_k(A)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = Ae_{i_1} \wedge \cdots \wedge Ae_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n-1;$$

més la representació espín.

Aquests resultats són aplicables al cas  $n = 1$ ; hi ha una sola representació fonamental, que és la representació espín, amb pes maximal la meitat



de l'única arrel positiva. Si comparem amb la secció anterior, constatem, en particular, que les representacions del grup ortogonal  $\mathbf{SO}(3)$  són les que provenen del seu recobriment simplement connex,  $\mathbf{SU}(2)$ .

Tipus  $\mathbf{D}_n$ ,  $n \geq 4$ , ( $\mathbf{D}_2 = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{D}_3 = \mathbf{A}_3$ ).

L'àlgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$  està formada per les matrius complexes  $2n \times 2n$ ,  $M$ , tals que

$$M^t S + SM = 0, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Són matrius del tipus

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}, B^t = -B, C^t = -C.$$

El grup simplement connex corresponent és el grup  $\mathbf{Spin}(2n, \mathbb{C})$ , que té per forma compacta el grup  $\mathbf{Spin}(2n)$ .

Prenem com a subàlgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  les matrius diagonals. El sistema d'arrels associat és  $R = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_p + \lambda_q)\}_{i < j, p < q}$ , i escollim la base  $\alpha_i := \lambda_i - \lambda_{i+1}$ ,  $1 \leq i < n$ ;  $\alpha_n := \lambda_{n-1} + \lambda_n$ .

El grup de Weyl és isomorf al producte semidirecte del grup simètric de  $n$  elements pel grup  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$ .

Els pesos fonamentals són

$$\begin{aligned} \omega_i &= \lambda_1 + \cdots + \lambda_i, 1 \leq i < n-1; \quad \omega_{n-1} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} - \lambda_n); \\ \omega_n &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n). \end{aligned}$$

A partir de la representació natural

$$\rho_1 : \mathfrak{so}(2n) \longrightarrow \text{End}(\mathbb{C}^{2n})$$

considerem, per a  $k = 1, \dots, n-2$ , les representacions  $\rho_k := \Lambda^k \rho_1$ . Tenen pes dominant  $\omega_k$  i són irreductibles.

Les representacions fonamentals que manquen,  $\rho_{n-1}$  i  $\rho_n$ , les anomenades representacions espín, les obtindrem a partir de la relació amb

l'àlgebra de Clifford associada a l'espai vectorial  $V := \mathbb{C}^{2n}$  i a la forma bilineal simètrica no degenerada  $Q$  de matriu  $S$ , igual que en el cas senar.

La descomposició natural de  $V$ ,  $V = W \oplus W'$ , on  $W$  i  $W'$  són sub-espais isòtrops  $n$ -dimensionals de  $V$ , determina un isomorfisme d'àlgebres  $C(Q) \cong \text{End}(\Lambda W)$  tal que  $C(Q)^{\text{parell}} \cong \text{End}(\Lambda^{\text{parell}}) \oplus \text{End}(\Lambda^{\text{senar}} W)$ . Per tant, la immersió de  $\mathfrak{so}(2n)$  en  $C(Q)^{\text{parell}}$  com a subàlgebra de Lie induïx dues representacions de dimensió  $2^{n-1}$

$$\rho_{n-1} : \mathfrak{so}(2n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\Lambda^{\text{parell}} W), \quad \rho_n : \mathfrak{so}(2n) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\Lambda^{\text{senar}} W),$$

que són irreductibles i tenen pes maximal  $\omega_{n-1}$  i  $\omega_n$ , en el cas que  $n$  és senar; quan  $n$  és parell és al contrari.

Les representacions de l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(2n)$  obtingudes són les diferencials de les representacions fonamentals del grup de Lie **Spin**( $2n, \mathbb{C}$ ). Per restricció, s'obtenen les de la forma compacta **Spin**( $2n$ ).

El centre del grup **Spin**( $2n, \mathbb{C}$ ) és d'ordre 4; és isomorf a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , si  $n$  és parell, i a  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ , si  $n$  és senar. En ambdós casos, notem els 4 elements per  $\pm 1, \pm \omega$ ; és  $-1 = \exp X$ , amb  $X = 2\pi i(E_{11} - E_{n+1, n+1})$  i  $\omega = \exp Y$ , amb  $Y = \pi i \sum (E_{jj} - E_{n+j, n+j})$ .

El quocient de **Spin**( $2n, \mathbb{C}$ ) pel centre és el grup **PSO**( $2n, \mathbb{C}$ ). Una representació de pes maximal  $\lambda$  passa al quocient quan la suma  $a_1 + \dots + a_n$  (són les notacions anteriors...) és parella.

El quocient pel subgrup  $\{\pm 1\}$  és el grup ortogonal **SO**( $2n, \mathbb{C}$ ). Igual que en el cas senar, totes les representacions amb pes maximal passen al quocient.

Per restricció, s'obtenen les representacions fonamentals de les formes compactes **PSO**( $2n$ ) i **SO**( $2n$ ).

En el cas  $n$  parell, hi ha dos grups més amb àlgebra de Lie  $\mathfrak{so}(2n)$ , que són els quocients pels subgrups del centre,  $\{1, \omega\}$  i  $\{1, -\omega\}$ . En el primer cas, una representació amb pes maximal passa al quocient quan la suma  $a_1 + \dots + a_n$  és parella; en el segon cas, quan aquesta suma menys  $n/2$  és senar.

# Bibliografia

- [Br-Di85] Bröckner, T.; tom Dieck, T.: *Representations of Compact Groups*, GTM, n. 98, 1985.
- [Fu-Ha91] Fulton, W.; Harris, J.: *Representation Theory*, GTM, n. 129, 1991.
- [Se66] Serre, J.P.: *Algèbres de Lie Semi-Simples Complexes*, Benjamin, 1966.
- [Si96] Simon, B.: *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics, n. 10, AMS, 1996.
- [Ti67] Tits, J.: *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen*, LNM, n. 40, 1967.
- [Va74] Varadarajan, V. S.: *Lie Groups, Lie Algebras and their representations*, GTM, n. 102, 1974.

# Grups reductius

MONTSERRAT ALSINA    SESSIÓ 1A. DEL DIA 13 DE NOVEMBRE DE 1996

## §1. Sistemes d'arrels i dades d'arrels

**1.1. Definició.** Una dada d'arrels és una quadrupla  $\Psi = (X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ , on  $X$  i  $X^\vee$  són grups abelians lliures de tipus finit, duals per a un aparellament  $\langle, \rangle : X \times X^\vee \rightarrow \mathbb{Z}$ , i  $\Phi$  i  $\Phi^\vee$  són subconjunts finits de  $X$  i  $X^\vee$ , respectivament, i hi ha una bijecció  $\alpha \rightarrow \alpha^\vee$  de  $\Phi$  sobre  $\Phi^\vee$ . Per a  $\alpha \in \Phi$ , posem  $s_\alpha$  i  $s_{\alpha^\vee}$  els endomorfismes de  $X$  i  $X^\vee$ , respectivament, definits per  $s_\alpha(x) = x - \langle x, \alpha^\vee \rangle \alpha$  i  $s_{\alpha^\vee}(u) = u - \langle \alpha, u \rangle \alpha^\vee$ . Aleshores, s'han de satisfer els axiomes següents:

DA1  $\forall \alpha \in \Phi$  tenim  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ ;

DA2  $\forall \alpha \in \Phi$  tenim  $s_\alpha(\Phi) \subset \Phi$  i  $s_{\alpha^\vee}(\Phi^\vee) \subset \Phi^\vee$ ;

o, equivalentment,

DA2' a)  $\forall \alpha \in \Phi$  tenim  $s_\alpha(\Phi) \subset \Phi$ ;

b) els  $s_\alpha$  generen un grup finit.

Observem que de la definició es dedueix que  $s_\alpha^2 = id$  i  $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$  (i similarment per a  $s_{\alpha^\vee}$ ). És clar, també, que  $\Psi = (X^\vee, \Phi^\vee, X, \Phi)$  també és una dada d'arrels, la dual de l'anterior.

Sigui  $Q$  el subgrup de  $X$  generat per  $\Phi$  i denotem per  $X_0$  el subgrup de  $X$  ortogonal a  $\Phi^\vee$ ,  $V = Q \otimes \mathbb{Q}$ ,  $V_0 = X_0 \otimes \mathbb{Q}$ . Es defineixen similarment els subgrups  $Q^\vee$ ,  $X_0^\vee$  de  $X^\vee$  i els espais vectorials  $V^\vee$  i  $V_0^\vee$ .

Diem que  $\Psi$  és semisimple si  $X_0 = \{0\}$  i toral si  $\Phi$  és buit.

Es demostra que  $Q \cap X_0 = \{0\}$  i que  $Q + X_0$  és d'índex finit en  $X$ . Aleshores  $V^\vee$  es pot identificar amb l'espai dual de  $V$ . Si s'identifica  $\Phi$  amb  $\Phi \otimes 1 \subset V$ ,  $\Phi \neq \emptyset$ , es veu que  $\Phi$  és de fet un sistema d'arrels en  $V$ . Recordem la definició.

**1.2. Definició.**  $\Phi$  és un sistema d'arrels si satisfà:

- (2)  $\Phi$  és finit i genera  $V$ ; a més,  $0 \notin \Phi$ ;
- (2)  $\forall \alpha \in \Phi$  hi ha  $\alpha^\vee \in V^\vee$  tal que  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$  i tal que l'aplicació  $s_\alpha$  estabilitza  $\Phi$ ;
- (3)  $\forall \alpha \in \Phi$  tenim  $\alpha^\vee(\Phi) \subset \mathbb{Z}$ .

Les aplicacions  $s_\alpha$  generen el grup de Weyl de  $\Phi$ ,  $W(\Phi)$ , un grup finit de transformacions lineals de  $V$ , i s'identifica amb el grup d'automorfismes de  $X$  generat per  $s_\alpha$  i el grup d'automorfismes de  $X^\vee$  generat per  $s_{\alpha^\vee}$ .

Així, si  $\Psi$  és una dada d'arrels no toral,  $\Phi$  s'anomena el sistema d'arrels de  $\Psi$ .

**1.3. Relació entre sistemes i dades d'arrels.** Sigui  $\Phi$  un sistema d'arrels al  $\mathbb{Q}$ -espai vectorial  $V$ . Aleshores, hi ha un nombre finit de dades d'arrels semisimples  $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ , amb  $X \subset V$ ,  $X^\vee \subset V^\vee$ . Posem  $Q$  i  $Q^\vee$  les rets de  $V$  i  $V^\vee$  generades per  $\Phi$  i  $\Phi^\vee$ , respectivament, i definim  $P = \{x \in V \mid \langle x, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Phi\}$  i  $P^\vee$  de forma anàloga. Aleshores  $Q \subset P$ ,  $P/Q$  és un grup finit i  $X$  ha d'estar contingut entre  $Q$  i  $P$  i per a cada  $X$  així, hi ha un únic  $X^\vee$ , entre  $P^\vee$  i  $Q^\vee$ , que ens doni una dada d'arrels  $(X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ .

**1.4. Propietats dels sistemes d'arrels.**

- a) Si  $\alpha \in \Phi$  i  $\lambda\alpha \in \Phi$ , aleshores  $\lambda = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2$ . El sistema d'arrels  $\Phi$  es diu que és reduït si,  $\forall \alpha \in \Phi$ , els únics múltiples de  $\alpha$  a  $\Phi$  són  $\pm\alpha$ . A cada sistema d'arrels se li poden associar dos sistemes d'arrels reduïts (treient els múltiples més alts, o més baixos, de  $\alpha$ ).
- b)  $\Phi$  és la suma directa dels sistemes d'arrels  $\Phi' \subset V'$  i  $\Phi'' \subset V''$  si  $V = V' \oplus V''$  i  $\Phi = \Phi' \cup \Phi''$ . Per a dades d'arrels la definició és

anàloga. Un sistema d'arrels es diu que és irreductible si no és la suma directa de dos subsistemes. Cada sistema d'arrels és una suma directa de sistemes irreductibles.

c) Els únics sistemes d'arrels irreductibles són els usuals:

$\mathbf{A}_n$  ( $n \geq 1$ ),  $\mathbf{B}_n$  ( $n \geq 2$ ),  $\mathbf{C}_n$  ( $n \geq 3$ ),  $\mathbf{D}_n$  ( $n \geq 4$ ),  $\mathbf{E}_6$ ,  $\mathbf{E}_7$ ,  $\mathbf{E}_8$ ,  $\mathbf{F}_4$ ,  $\mathbf{G}_2$ .

d) Per a cada dimensió  $n$  hi ha un únic sistema d'arrels irreductible no reduït, i es denota  $\mathbf{BC}_n$ .

**1.5. Cambres de Weyl, bases i diagrames de Dynkin.** Sigui  $\Phi \subset V$  un sistema d'arrels, i el pensem dins de  $V_{\mathbb{R}} = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ . Les cambres de Weyl a  $V_{\mathbb{R}}$  són les components connexes del complementari de la unió dels hiperplans ortogonals a les arrels (se'n diuen hiperplans singulars).

\* El grup de Weyl  $W(\Phi)$  actua de forma simplement transitiva en el conjunt de cambres de Weyl (i.e. permuta les cambres transitivament i l'estabilitzador d'una cambra a  $W$  es redueix a la identitat).

A cada cambra de Weyl  $C$  se li pot associar un ordre de les arrels:  $\alpha > 0 \Leftrightarrow \langle x, \alpha^\vee \rangle > 0 \forall x \in C$ . Aleshores, denotem per  $\Phi^+$  el conjunt d'arrels positives i per  $\Phi^-$  el conjunt d'arrels negatives. Diem que una arrel és simple (per a l'ordre donat per  $C$ ) si no és la suma de dues arrels positives. El conjunt d'arrels simples,  $\Delta$ , s'anomena una base del sistema d'arrels.

\* Cada arrel és una combinació lineal entera d'arrels simples, amb tots els coeficients del mateix signe.

Una cambra de Weyl fixada determina una base, a la qual se li associa un diagrama de Dynkin.

\* Els  $s_\alpha$ , per a  $\alpha \in \Delta$ , generen  $W(\Phi)$ , i sovint s'anomenen reflexions fonamentals. Més precisament,  $(W, (s_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$  és un sistema de Coxeter. Com a tal, té un graf associat, que coincideix amb el graf que se li associa per a construir el diagrama de Dynkin.

\* El diagrama de Dynkin no depèn, llevat d'isomorfisme canònic, de l'elecció de la cambra de Weyl  $C$ .

Així, llevat d'isomorfisme, és equivalent: fixar una cambra de Weyl,

fixar un ordre de les arrels, fixar una base, i fixar un diagrama de Dynkin.

Diem que una base  $\Delta$  és connexa si no es pot escriure com a unió disjunta  $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ , on  $(\Delta' + \Delta'') \cap \Delta = \emptyset$ .

\*  $\Phi$  és irreductible  $\Leftrightarrow \Delta$  connexa  $\Leftrightarrow$  diagrama de Dynkin connex.

Sigui  $\Psi$  una dada d'arrels tal que el seu sistema d'arrels associat,  $\Phi$ , és reduït. Sigui  $\Delta$  una base de  $\Phi$ . Aleshores,  $\Phi$  i  $\Phi^\vee$  queden unívocament determinats per  $\Delta$ , i podem posar  $\Psi = (X, \Delta, X^\vee, \Delta^\vee)$  la dada d'arrels amb base.

## §2. Grups algebraics reductius. Cas absolut

Per grup algebraic entendrem un subgrup algebraic del grup  $\mathbf{GL}_n$ , les matrius invertibles d'ordre  $n$ . Escriurem sovint  $\mathbb{G}_m = \mathbf{GL}_1$ , i  $\mathbb{G}_a$  designarà el grup additiu de dimensió 1.

Per al cas absolut, sense tenir en compte el cos base, podem pensar que és un subgrup d'algun  $\mathbf{GL}(n, \Omega)$ , per a  $\Omega$  cos algebraicament tancat.

**2.1. Definició.** Un grup algebraic  $T$  és un tor si és connex i se satisfan les condicions equivalents següents:

- (1)  $T$  està format per elements semisimples;
- (2)  $T$  és diagonalitzable;
- (3)  $T$  és isomorf al producte de  $n$  còpies de  $\mathbb{G}_m$  (on  $n = \dim T$ ).

Sigui  $G$  un grup algebraic. Un caràcter de  $G$  és un morfisme de  $G$  a  $\mathbb{G}_m$ . El conjunt de caràcters, amb la llei de composició definida pel producte a  $\mathbb{G}_m$ , és un grup commutatiu de tipus finit, lliure si  $G$  és connex, i el denotem  $X^*(G)$ . Un grup multiplicatiu d'un paràmetre de  $G$  és un morfisme  $\mathbb{G}_m \rightarrow G$ . Si  $G$  és commutatiu, el conjunt de grups multiplicatius d'un paràmetre, amb la llei de composició definida pel producte dels valors, és un grup multiplicatiu lliure de tipus finit, s'anomena grup de cocaràcters i el denotem  $X_*(G)$ . Si  $G = T$  és un tor, els grups  $X^*(G)$  i  $X_*(G)$  són grups abelians lliures de rang igual a  $\dim T$ .

Un morfisme de grups algebraics  $\phi : G \rightarrow G'$  indueix canònicament morfismes  $\phi^* : X^*(G') \rightarrow X^*(G)$  i  $\phi_* : X_*(G) \rightarrow X_*(G')$ .

Denotem, com sempre,  $G^0$  la component connexa de la identitat.

**2.2. Definicions.** El radical d'un grup algebraic connex  $G$  és el subgrup distingit tancat connex i resoluble maximal. El radical unipotent d'un grup algebraic connex  $G$  és el subgrup distingit tancat connex i unipotent maximal.  $G$  s'anomena semisimple si el radical de la component connexa de la identitat  $R_u(G^0)$  és la identitat.

**2.3. Definició.** Un grup algebraic  $G$  s'anomena reductiu si se satisfan les condicions equivalents següents:

- 1) el radical és un tor,
- 2)  $G$  té una representació lineal de nucli finit completament reductible.

A partir d'ara, sigui  $G$  un grup algebraic lineal reductiu connex.

Si  $S$  és un subtòr qualsevol de  $G$ , podem definir el sistema d'arrels  $\Phi(G, S)$ , de  $G$  respecte  $S$ , com el conjunt de caràcters de  $S$  no trivials que apareixen quan es diagonalitza la representació de  $S$  en l'àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ , on  $S$  opera via la representació autoadjunta.

**2.4. Dada d'arrels associada.** Fixem ara un subtòr maximal  $T$  de  $G$ . Associarem al parell  $(G, T)$  una dada d'arrels  $\Psi(G, T) = (X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$ , a partir del sistema d'arrels associat  $\Phi(G, T)$ , de la forma següent:

- $X = X^*(T)$ , el grup de caràcters del tor, que és un grup abelià lliure de rang finit.
- $X^\vee = X_*(T)$ , el grup de cocaràcters del tor o grup de subgrups multiplicatius d'un paràmetre de  $T$ , és a dir, el grup d'homomorfismes (de grups algebraics)  $\mathbf{GL}_1 \rightarrow T$ .  $X^\vee$  es pot posar en dualitat amb  $X$  per l'aparellament  $\langle, \rangle$  que ve definit per : si  $x \in X^*(T)$ ,  $u \in X_*(T)$ , aleshores  $x(u(t)) = t^{\langle x, u \rangle} (t \in \Omega^*)$ .
- $\Phi = \Phi(G, T)$ , el sistema d'arrels de  $G$  respecte  $T$ .
- $\Phi^\vee$  és un conjunt d'homomorfismes  $\alpha^\vee : \mathbf{GL}_1 \rightarrow G_\alpha$  per a cada



$\alpha \in \Phi$ , de forma que determinen uns grups unipotents que denotem  $U_\alpha$ .

Anem a descriure-ho explícitament. Sigui  $\alpha \in \Phi$ , i sigui  $T_\alpha$  la component de la identitat en el nucli de  $\alpha$ .  $T_\alpha$  és un subtòr de codimensió 1. El centralitzador  $Z_\alpha$  de  $T_\alpha$  a  $G$  és un grup reductiu connex amb tor maximal  $T$ . Considerem el seu grup derivat  $G_\alpha$ ; és semisimple de rang 1, és a dir isomorf a  $\mathbf{SL}(2)$  o  $\mathbf{PSL}(2)$ . Hi ha un únic homomorfisme  $\alpha^\vee : \mathbf{GL}_1 \rightarrow G_\alpha$  tal que  $T = (\text{Im } \alpha^\vee)T_\alpha$ , i  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ . Aquests homomorfismes  $\alpha^\vee$  constitueixen  $\Phi^\vee$ . A cada  $\alpha \in \Phi$  se li associa un homomorfisme de grups algebraics unívocament determinat

$$x_\alpha : \mathbf{G}_a \rightarrow G_\alpha, \text{ tal que } tx_\alpha(u)t^{-1} = x_\alpha(t^\alpha u), \text{ per a } t \in T, u \in \Omega.$$

Posem  $U_\alpha = \text{Im}(x_\alpha)$  i sigui  $X_\alpha \in \mathfrak{g}$  un vector no nul tangent a  $U_\alpha$ . Aleshores  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(T) \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} \Omega X_\alpha$ .

Es comprova que es satisfan DA1 i DA2'. A més, el sistema d'arrels  $\Phi$  és reduït.

Sigui  $B$  un subgrup de Borel, és a dir, un subgrup tancat resoluble connex maximal, que contingui  $T$ . Hi ha un únic ordre de les arrels  $\Phi$  tal que  $B$  és generat per  $T$  i els  $U_\alpha$  amb  $\alpha > 0$ , la qual cosa determina una base. Així, a la tripleta  $(G, T, B)$ , li podem associar un sistema d'arrels amb base, la base determinada per l'ordre associat en funció de  $B$ .

Per a qualsevol base  $\Delta$ , si prenem totes les arrels, enlloc de prendre només les positives, es té que els  $U_\alpha$ , amb  $\alpha \in \Delta$ , juntament amb  $T$ , generen  $G$ .

**2.5. Isogènies.** Una isogènia  $\phi : G \rightarrow G'$  de grups algebraics és un homomorfisme (racional) exhaustiu amb nucli finit. Siguin ara  $G$  i  $G'$  grups reductius, i  $T$  un subtòr maximal de  $G$ .

**2.6. Definició.** Una isogènia central  $\phi : G \rightarrow G'$  és una isogènia que indueix un isomorfisme de grups algebraics de  $U_\alpha$  en la seva imatge,  $\forall \alpha \in \Phi$ . Equivalentment,  $d\phi(X_\alpha) \neq 0$  per a tot  $\alpha \in \Phi$  (on  $d\phi$  és l'homomorfisme induït a l'àlgebra de Lie). La imatge  $T' = \phi(T)$  és un subtòr maximal de  $G'$ ; així, diem que  $\phi$  és una isogènia central de  $(G, T)$  sobre  $(G', T')$ .

**2.7. Morfismes de dades d'arrels.** Siguin  $\Psi = (X, \Phi, X^\vee, \Phi^\vee)$  i  $\Psi' = (X', \Phi', (X')^\vee, (\Phi')^\vee)$  dues dades d'arrels. Un homomorfisme  $f : X' \rightarrow X$  s'anomena una isogènia de  $\Psi'$  a  $\Psi$  si

- (a)  $f$  és injectiva i  $\text{Im } f$  té índex finit a  $X$ ,
- (b)  $f$  induïx una bijecció de  $\Phi'$  sobre  $\Phi$  i la seva transposada  ${}^t f$  induïx una bijecció entre  $\Phi^\vee$  i  $(\Phi')^\vee$ .

Observem que  ${}^t f$  també és una injecció amb conucli finit de  $X^\vee$  a  $(X')^\vee$ .

Posem  $f(\phi) = \phi^*$  l'homomorfisme induït en els grups de caràcters,  $f(\phi) : X^*(T') \rightarrow X^*(T)$ .

### 2.8. Proposició.

- a) Si  $\phi$  és una isogènia central, aleshores  $f(\phi)$  és una isogènia entre les dades d'arrels que hem associat a  $(G, T)$  i  $(G', T')$ .
- b) Si  $\phi$  i  $\phi'$  són isogènies centrals de  $(G, T)$  sobre  $(G', T')$  tals que  $f(\phi) = f(\phi')$ , aleshores existeix  $t \in T$  tal que  $\phi' = \phi \circ \text{Int}(t)$ .

Per a demostrar-ho s'utilitza que una isogènia queda completament determinada per la seva restricció a  $T$  i a  $U_\alpha$  per a  $\alpha \in \Delta$  (ja que aquests generen  $G$ ).

### 2.9. Teorema.

- a) Per a qualsevulla dada d'arrels  $\Psi$  que tingui sistema d'arrels associat reduït, existeixen un grup reductiu  $G$  i un tor maximal  $T$  de  $G$  tals que  $\Psi = \psi(G, T)$ . La parella  $(G, T)$  és única llevat isomorfisme.
- b) Siguin les dades d'arrels  $\Psi = \psi(G, T)$  i  $\Psi' = \psi(G', T')$ . Si  $f$  és una isogènia de  $\Psi'$  a  $\Psi$ , aleshores existeix una isogènia central  $\Phi$  de  $(G, T)$  a  $(G', T')$  amb  $f(\phi) = \phi \circ \Phi$ . Dues tals isogènies difereixen en un automorfisme  $\text{Int}(t)$ , per a  $t \in T$ , de  $G$ .

### §3. Grups reductius amb cos base $k$ . Cas relatiu

Siguin  $k \subset \Omega$  un cos,  $\bar{k}$  la clausura algebraica de  $k$  en  $\Omega$  i  $k_s$  la seva clausura separable. Un grup algebraic lineal  $G$  que està definit sobre  $k$  s'anomena un  $k$ -grup; denotem per  $G(k)$  els seus punts  $k$ -racionals. Si  $A$  és una  $k$ -àlgebra, posem  $G(A) = \text{Hom}_k(k[G], A)$ .

**3.1. Definició.** Siguin  $G$  i  $G'$   $k$ -grups. Es diu que  $G'$  és una  $k$ -forma de  $G$  si  $G$  i  $G'$  són isomorfs sobre  $\Omega$ . Per exemple, per a  $k = \mathbb{R}$ ,  $U(n)$  és una  $k$ -forma de  $\mathbf{GL}(n)$ .

**3.2. Definició.** Un tor  $T$  s'anomena  $k$ -split si està definit sobre  $k$  (és a dir, és un  $k$ -tor) i és  $k$ -isomorf a un producte de grups  $\mathbb{G}_m$ . Observem que un  $k$ -tor sempre és  $\bar{k}$ -split. Si  $T$  està definit sobre  $k$ , això és equivalent a dir que  $T$  sigui diagonalitzable sobre  $k$ , a dir que  $X^*(T) = X^*(T)_k$ , i a dir que  $X_*(T) = X_*(T)_k$ .

**3.3. Definicions.** Sigui  $G$  un  $k$ -grup reductiu connex. Es diu que  $G$  és quasi-split si conté un subgrup de Borel definit sobre  $k$ . Es diu que  $G$  és split sobre  $k$  si té un subtor maximal definit sobre  $k$  i  $k$ -split. Observem que split implica quasi-split.

Siguin  $G$  un  $k$ -grup reductiu connex,  $S$  un  $k$ -subtor de  $G$   $k$ -split i maximal amb aquestes propietats; de fet és únic llevat de conjugació per un element de  $G(k)$ . La dimensió de  $S$  s'anomena el  $k$ -rang de  $G$ . El sistema d'arrels associat a  $(G, S)$  s'anomena el sistema d'arrels de  $G$  relatiu i es denota per  ${}_k\Phi$  (és un sistema d'arrels en el sentit habitual i genera un subespai  $V$  de  $X^*(S) \otimes \mathbb{Q}$ ). El seu grup de Weyl s'anomena grup de Weyl relatiu i es denota per  ${}_kW$ . Denotem per  $N(S)$  i  $Z(S)$  els  $k$ -subgrups normalitzador i centralitzador de  $S$  a  $G$ , respectivament. El quocient  $N(S)/Z(S)$  actua sobre  ${}_k\Phi$  i sobre  $V$ ; de fet es pot identificar amb  ${}_kW$ , i qualsevol classe pot ser representada per un element de  $N(S)(k)$ .

**3.4. Subgrups parabòlics.** Un subgrup parabòlic  $P$  d'un grup algebraic  $G$  és un subgrup tancat tal que  $G/P$  és una varietat projectiva. Equivalentment,  $P$  és parabòlic si conté un subgrup de Borel de  $G$ . Per a  $G$  un  $k$ -grup reductiu, els  $k$ -subgrups parabòlics minimalssón conjugats sobre  $k$ .

Si  $P$  n'és un, aleshores existeix  $S$ , un tor maximal  $k$ -split de  $G$ , tal que  $P$  és el producte semidirecte de  $k$ -grups  $P = Z(S) \cdot R_u(P)$ . Hi ha un ordre de  ${}_k\Phi$  tal que  $P$  és generat per  $Z(S)$  i els grups unipotents  $U_\alpha$  amb  $\alpha > 0$ . Els  $k$ -subgrups parabòlics minimal que contenen un  $S$  donat corresponen a les cambres de Weyl de  ${}_k\Phi$ , i són permutats de forma transitiva (simple) pel grup de Weyl relatiu.

Fixem un ordre de  ${}_k\Phi$  i sigui  ${}_k\Delta$  la base de  ${}_k\Phi$  que defineix. Per a qualsevol subonjunt  $\theta \subseteq {}_k\Delta$ , denotem per  $P_\theta$  el subgrup generat per  $Z(S)$  i els  $U_\alpha$  on  $\alpha \in {}_k\Phi$  és una combinació lineal de les arrels de  ${}_k\Phi$  tal que per a les arrels que no són a  $\theta$ , el coeficient és  $\geq 0$ . En particular,  $P_{{}_k\Delta} = G$ ,  $P_\Phi = P$  i  $P_\theta \supset P$ . Els  $P_\theta$  s'anomenen els subgrups estàndards parabòlics de  $G$  que contenen  $P$ . Qualsevol  $k$ -subgrup parabòlic de  $G$  és  $k$ -conjugat a un únic  $P_\theta$ . Si  $S_\theta$  és la component connexa de la identitat de  $\bigcap_{\alpha \in \theta} (\ker \alpha)$ , aleshores  $S_\theta$  és un subtore  $k$ -split de  $G$  i tenim que  $P_\theta = Z(S_\theta) \cdot R_u(P_\theta)$ , producte semidirecte de  $k$ -grups. A més,  $R_u(P_\theta)$  està generat pels  $U_\alpha$  amb  $\alpha$  arrel positiva que no és una combinació lineal de les arrels de  $\theta$ .

**3.5. Subgrups de Levi.** Sigui  $Q$  un  $k$ -subgrup parabòlic de  $G$ , amb radical unipotent  $V$  (definit sobre  $k$ ). Un subgrup de Levi de  $Q$  és un  $k$ -subgrup  $L$  de  $Q$  tal que  $Q$  és el producte semidirecte de  $k$ -grups  $Q = L \cdot V$ . Existeixen  $k$ -subgrups de Levi, per exemple els  $L = Z(S_\theta)$  d'abans. Dos subgrups de Levi de  $Q$  són  $k$ -conjugats. Si  $A$  és un tor maximal  $k$ -split en el centre de  $L$ , aleshores  $L = Z(A)$ . Si  $A$  és un subtore de  $G$   $k$ -split qualsevol, aleshores existeix un  $k$ -subgrup parabòlic  $Q$  de  $G$  amb subgrup de Levi  $L = Z(A)$ . Dos tals  $Q$  no són necessàriament  $k$ -conjugats (en canvi sí que ho serien si  $A$  fos un tor  $k$ -split maximal). Dos  $k$ -subgrups parabòlics s'anomenen associats si tenen subgrups de Levi  $k$ -conjugats. Això defineix una relació d'equivalència en el conjunt de  $k$ -subgrups parabòlics. Si  $Q_1$  i  $Q_2$  són dos  $k$ -subgrups parabòlics, aleshores  $(Q_1 \cap Q_2) \cdot R_u(Q_1)$  també és un  $k$ -subgrup parabòlic contingut en  $Q_1$ . És igual a  $Q_1$  si, i només si, hi ha un subgrup de Levi de  $Q_1$  que contingui un subgrup de Levi de  $Q_2$ . Els grups  $Q_1$  i  $Q_2$  s'anomenen oposats si la intersecció  $Q_1 \cap Q_2$  és un subgrup de Levi dels dos.

**3.6. Descomposició de Bruhat.** Sigui  $G$  un  $k$ -grup reductiu connex,  $S$  un  $k$ -subtor de  $G$   $k$ -split i maximal amb aquestes propietats, i  $P$  un subgrup parabòlic de  $G$  (alguna propietat més). Posem  $U = R_u(P)$  i  $n_w \in N(S)(k)$  un representant de  $w \in {}_k W$ . Aleshores,  $G(k)$  és la unió disjunta de les classes dobles  $U(k)n_w P(k)$ , per a  $w \in {}_k W$ , anomenada descomposició de Bruhat de  $G(k)$ .

**3.7. Immoble de Tits.** Sigui  $G$  un  $k$ -grup reductiu connex. Definim l'immoble de Tits de  $(G, k)$  com el complex  $\mathcal{B}$  següent:

- vèrtexs: Són els  $k$ -subgrups parabòlics maximals no trivials de  $G$ .
- símplexs: Un conjunt de vèrtexs diferents  $\{P_1, \dots, P_n\}$  determina un símplex de  $\mathcal{B}$  si, i només si,  $P = P_1 \cap \dots \cap P_n$  és un  $k$ -subgrup parabòlic. En aquest cas, els  $P_i$  estan unívocament determinats per  $P$ . Denotem per  $\sigma_P$  el símplex definit per  $P$ . De fet doncs, els símplexs de  $\mathcal{B}$  corresponen als  $k$ -subgrups parabòlics no trivials de  $G$ .
- $\sigma_P$  és una cara de  $\sigma_{P'}$  si i només si  $P' \subset P$ . Els símplexs maximals corresponen als  $k$ -subgrups parabòlics minimals, i s'anomenen cambres (per la connexió amb les cambres de Weyl dels sistemes d'arrels). Les cares d'una cambra (codimensió 1) s'anomenen parets. Dues cambres són adjacents si tenen una paret en comú. Dues cambres qualssevol  $\sigma$  i  $\sigma'$  poden ser unides per una galeria, és a dir, un conjunt de cambres  $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_s = \sigma'$  tals que  $\sigma_i$  i  $\sigma_{i+1}$  són adjacents ( $0 \leq i \leq s$ ).  $\sigma$  i  $\sigma'$  s'anomenen els extrems. Una galeria s'anomena minimal si no hi ha cap altra galeria amb els mateixos extrems de longitud inferior. Aleshores, es defineix la distància entre dues cambres com la longitud d'una galeria minimal que les tingui com a extrems. Es diu que un immoble de Tits és un apartament, si cada paret pertany exactament a dues cambres.

A més, tenim que  $G(k)$  opera sobre  $\mathcal{B}$ .

Segons Serre, si posem les cambres com a vèrtexs i les galeries com a camins, aquest immoble es pot pensar com un graf.

**3.8. Exemple.** El grup reductiu  $G = \mathbf{GL}(n)$  amb  $k$  arbitrari.

La seva àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  és l'àlgebra de Lie de totes les matrius  $n \times n$ .

(El pensem inclòs en  $\mathbf{SL}(n+1)$  fent  $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \frac{1}{\det A} \end{pmatrix}$ .)

- Posem  $S$  el subgrup de les matrius diagonals; és un tor maximal  $k$ -split que, de fet, també és un tor maximal en sentit absolut. Considerem les aplicacions  $e_i \in X^*(S)$  definides per  $e_i(s) = s_{ii}$ ; formen una base de  $X^*(S)$ .
- El sistema d'arrels  $\Phi(G, S)$ , que coincideix amb el relatiu,  ${}_k\Phi(G, S)$ , està format per les arrels  $e_i - e_j \in X^*(S)$ , per a  $i \neq j$ .
- La dada d'arrels és donada per  $X = \mathbb{Z}^n = X^\vee$ ,  $\Phi = \{e_i - e_j\}_{i \neq j}$ ,  $\Phi^\vee = \{e_i^\vee - e_j^\vee\}_{i \neq j}$ , on  $\{e_i^\vee\}$  és la base de  $X^\vee$  dual a  $\{e_i\}$ .
- Posem  $B$  el subgrup de les matrius triangulars superiors; és un  $k$ -subgrup parabòlic minimal i és de Borel. El seu radical unipotent  $U$  és el subgrup de les matrius triangulars superiors amb 1 a la diagonal.
- La base  $\Delta$  de  $\Phi$  definida per  $B$  és  $\{e_i - e_{i+1}\}_{1 \leq i \leq n-1}$ .
- El grup de Weyl,  $W = {}_k W$ , és isomorf al grup simètric  $\mathcal{S}_n$  vist com a grup de permutacions de la base.
- Els subgrups parabòlics  $P \supset B$  són les matrius amb blocs

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix},$$

on  $A_{ij}$  és una matriu  $(n_i \times n_j)$ ,  $A_{ii}$  és no singular, i  $n_1 + \cdots + n_s = n$ . El seu radical unipotent consisteix en les matrius que tenen  $A_{ii} = 1$  ( $1 \leq i \leq s$ ).

El subgrup  $L$  de les matrius que tenen  $A_{ij} = 0$ , per a  $j > i$ , és un subgrup de Levi de  $P$ . El centre de  $L$  consisteix en aquells elements de  $S$  (=matrius diagonals) en els quals els elements de  $\Delta$  diferents d'un dels  $e_{n_i} - e_{n_i+1}$  ( $1 \leq i \leq s$ ) són trivials. En aquest cas,  $P = P_\theta$ , on  $\theta \subset \Delta$  és el complement del conjunt d'aquestes arrels.

Es pot donar una descripció més geomètrica dels subgrups parabòlics en termes de banderes (en anglès, "flags"), a partir de la qual des-

criurem l'immoble de Tits. Sigui  $V = \Omega^n$ . Una bandera a  $V$  és una seqüència  $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_s = V$  de subespais diferents de  $V$ . S'anomena una  $k$ -bandera si tots els  $V_i$  estan definits sobre  $k$ , és a dir, tenen una base de vectors de  $k^n$ .  $G$  opera en el conjunt de banderes. Els grups parabòlics són aleshores els grups d'isotropia de les banderes. De fet, hi ha una bijecció del conjunt de subgrups parabòlics de  $G$  sobre el conjunt de banderes, sota el qual els  $k$ -subgrups corresponen a  $k$ -banderes. Si  $P$  és un subgrup parabòlic, aleshores els punts del quocient  $G/P$  es poden veure com les banderes del mateix tipus que  $P$  (és a dir, tals que els subespais de les banderes tenen una dimensió constant).

- L'immoble de Tits de  $(G, k)$  es pot descriure ara en termes de banderes: els símplexs corresponen a les  $k$ -banderes no trivials (i.e.  $s > 1$ ). Si  $\sigma_f$  és el símplex definit per la bandera  $f$ , aleshores  $\sigma_f$  és una cara de  $\sigma_{f'}$  si, i només si,  $f'$  refina  $f$ . Les cambres corresponen a les banderes maximals (és a dir,  $s = n$ ,  $\dim V_i = i$ ) i els vèrtexs són els  $k$ -subespais de  $V$  no trivials. L'estructura combinatòria de  $\mathcal{B}$  dibuixa les incidències a l'espai projectiu  $\mathbb{P}_{n-1}(k)$ . El cas especial més senzill no trivial correspon a  $n = 3$  i  $k = \mathbb{F}_2$ . En aquest cas,  $G = \mathbf{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ ,  $\mathcal{B}$  és un graf amb 14 vèrtexs i 21 arestes. Els vèrtexs són els punts i les rectes del pla projectiu sobre  $\mathbb{F}_2$ , i les arestes uneixen les parelles de vèrtexs que formen una bandera, és a dir, un punt i una recta que passa pel punt.

(Hi ha 7 punts i 7 rectes; cada recta passa per tres punts.)

## §4. Descomposicions d'una classe de grups de Lie

Ara parlarem d'una classe de grups de Lie, que és la que intervindrà en el proper capítol, de representacions sobre de grups de Lie reductius reals.

Sigui  $G$  un grup de Lie, amb àlgebra de Lie associada  $\mathfrak{g}$ . Denotem per  $G^0$  la component de la identitat, i per  ${}^0G$  la intersecció dels nuclis de tots els homomorfismes continus  $G \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ . Aleshores,  ${}^0G$  és un subgrup tancat normal i el quocient  $G/{}^0G$  és un grup vectorial.

Suposem que  $G$  té les propietats següents:

- (1) Hi ha un  $\mathbb{R}$ -grup reductiu  $\mathbf{G}$  i un morfisme  $\nu : G \rightarrow \mathbf{G}(\mathbb{R})$  amb nucli finit i tal que la imatge és un subgrup obert de  $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ .  $\nu$  indueix un isomorfisme de  $\mathfrak{g}$  sobre els punts reals de l'àlgebra de Lie de  $\mathbf{G}$ . D'aquí es dedueix que  $G^0$  té índex finit a  $G$  (ja que així és per a  $\mathbf{G}(\mathbb{R})$  i  $\ker \nu$  és finit).
- (2) La imatge de  $G$  en el grup d'automorfismes de  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  està en la imatge de la component de la identitat  $\mathbf{G}^0$  de  $\mathbf{G}$ .

De fet, (1) és per a incloure recobriments finits dels grups lineals, per exemple, el grup metaplèctic i els grups semisimples connexos amb centre finit. (2) és per assegurar que  $G$  actua trivialment en el centre de l'àlgebra recobriment universal de  $\mathfrak{g}$ .

**4.1. Definició.** Una component split de  $G$  és un subgrup vectorial  $V$  de  $G$  tal que  $G = {}^0G \cdot V$  amb  ${}^0G \cap V = \{e\}$ .

**4.2. Involucions de Cartan.** Sigui  $\theta_0$  l'automorfisme de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  que envia  $g$  a  ${}^t g^{-1}$ . Es prova que qualsevol  $\mathbb{R}$ -subgrup de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{C})$  estable per a  $\theta_0$  és reductiu. Per definició, una involució de Cartan de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$  és un automorfisme  $\theta$  conjugat a  $\theta_0$ . Aleshores, amb la notació anterior, es demostra que  $\nu(G)$  és estable per alguna involució de Cartan  $\theta$  de  $\mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ , és a dir, sobre  $\theta_0$  llevat de conjugació. Denotarem per  $K$  la imatge inversa a  $G$  (per  $\nu$ ) dels punts fixos de la involució  $\theta$  a  $\nu(G)$ .

**4.3. Subgrups parabòlics.** Els subgrups parabòlics de  $G$  es corresponen amb els  $\mathbb{R}$ -subgrups parabòlics de  $\mathbf{G}^0$ . Siguin  $\mathbf{P}$  un  $\mathbb{R}$ -subgrup parabòlic de  $\mathbf{G}^0$ ,  $\mathbf{N} = R_u(\mathbf{P})$  el radical unipotent de  $\mathbf{P}$ , i  $\mathbf{L} = \mathbf{P} \cap \theta \mathbf{P}$ .

**4.4. Lema.** (a)  $\mathbf{L}$  és un subgrup de Levi de  $\mathbf{P}$ .

(b) L'àlgebra de Lie de  $\mathbf{G}$  és la suma directa de les àlgebres de Lie associades a  $\mathbf{N}$ ,  $\theta \mathbf{N}$  i  $\mathbf{L}$ .

**4.5. Notació.** Sigui  $\mathbf{S}$  el subtor maximal  $\mathbb{R}$ -split del centre de  $\mathbf{L}$ . Considerem els subgrups de  $G$  següents:



$P$ , el subgrup parabòlic corresponent a  $\mathbf{P}$ ,

$$L = P \cap \theta P,$$

$$M = {}^0L,$$

$$A = \nu^{-1}(\mathbf{S}(\mathbb{R}))^0,$$

$$N = \nu^{-1}(\mathbf{N}(\mathbb{R}))^0.$$

$L$ ,  $M$  i  $A$  són  $\theta$ -estables, i  $L = Z_G(A)$ .  $L$  satisfà les propietats (1) i (2) del començament.  $A$  és una component split de  $L$  i de  $P$ .

**4.6. Proposició.** (Descomposició de Langlands) *L'aplicació  $M \times A \times N \rightarrow P$  donada per  $(m, a, n) \mapsto man$  és un difeomorfisme analític.*

Suposem ara que  $P$  és un subgrup parabòlic minimal; correspon a  $\mathbf{P}$   $\mathbb{R}$ -subgrup parabòlic de  $\mathbf{G}^0$  minimal. En aquest cas,  $M$  és compacte; per tant,  $M \subset K$  i, d'aquí,  $M = K \cap P$ .

**4.7. Proposició.** (Descomposició d'Iwasawa) *L'aplicació  $K \times A \times N \rightarrow G$  donada per  $(k, a, n) \mapsto kan$  és un difeomorfisme analític.*

**4.8. Corol·lari.** *Per a qualsevol subgrup parabòlic  $P$  de  $G$ , tenim la igualtat  $G = KP$ .*

**4.9. Proposició.** (Descomposició de Cartan) *Tenim la descomposició  $G = KAK$ .*

Es demostra en utilitzar que  $G = K \cdot S$  és una descomposició de Cartan i que  $S = \bigcup_{k \in K} kAk^{-1}$ .

# Bibliografia

- [Bo-Ti65] Borel, A.; Tits, J.: Groupes réductifs, *IHES, Publ. Math.* **27** (1965), 55–150.
- [Bou68] Bourbaki, N.: Groupes de Coxeter et systems de Tits, cap. IV, en el llibre *Seminari Bourbaki: Groupes et Algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1968.
- [Se77] Serre, J-P.: *Arbres, amalgames  $\mathbf{SL}_2$* , Astérisque, n. 46, Société mathématique de France, 1977.
- [Sp79] Springer, T. A.: Reductive groups, en el llibre *Proc. Symposia in Pure Mathematics*, 1979, pp. 3–27.
- [Ti74] Tits, J.: On buildings and their applications, en el llibre *Proc. Inter. Congress of Math.*, Canadian Mathematical Society, Vancouver, 1974, pp. 209–221.
- [Ti79] Tits, J.: Reductive groups over local fields, en el llibre *Proc. Symposia in Pure Mathematics*, 1979, pp. 3–27.

# Grups reductius sobre cossos locals

SALVADOR COMALADA    SESSIÓ 2A. DEL DIA 13 DE NOVEMBRE DE 1996

Aquest capítol no ha estat redactat. El seu contingut completa el del capítol anterior; el programa i la bibliografia recomanada per als dos capítols són els següents:

## Grups reductius

Grups reductius: cas absolut. Isogènies centrals. Subgrups parabòlics. Subgrups de Levi. Descomposició de Bruhat. Edifici de Tits. Descomposicions d'Iwasawa i de Cartan. Grups reductius sobre cossos locals.

## Referències:

- [La 85] Lang, S.:  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ , GTM, n. 105, Springer, 1985.
- [Sp 79] Springer, T., A: Reductive Groups, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-functions*, v. I, Borel, A.; Casselman, W., ed., Proceed. Symposia Pure Mathematics, n. XXXIII, AMS, 1979, pp. 3–27.
- [Ti 79] Tits, J.: Reductive Groups over Local Fields, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-functions*, v. I, Borel, A.; Casselman, W., ed., Proceed. Symposia Pure Mathematics, n. XXXIII, AMS, 1979, pp. 29–69.

# Representacions de grups reductius reals

JORDI QUER

SESSIÓ 1A. I 2A. DEL DIA 20 DE NOVEMBRE DE 1996

Aquest capítol no ha estat redactat. El programa i la bibliografia recomanada són els següents:

## Representacions de grups de Lie reductius reals

Representacions admissibles. Teorema de Harish-Chandra. Funcions de quadrat sumable. La sèrie principal: Classificació de Harish-Chandra. La sèrie complementària. La sèrie discreta: Classificació de Langlands. Estudi de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{C})$ . Estudi de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{C})$ .

### *Referències:*

- [Ba48] Bargmann, V.: Irreducible unitary representations of the Lorentz group, *Annals of Math.* **48**, n. 2 (1948), 568–640.
- [Gel-Fo65] Gelfand, I. M.; Fomin, S. V.: Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature, *Translations AMS* **1** (1965), 49–65.
- [Ge75] Gelbart, S. S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, n. 83, Princeton University Press, 1975.
- [Kn79] Knapp, A. W.: Representations of  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$  and  $\mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ , en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-functions*, v. I, Borel, A.; Casselman, W., ed., Proceed. Symposia Pure Mathematics, n. XXXIII, AMS, 1979, pp. 87–91.
- [La85] Lang, S.:  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ , GTM, n. 105, Springer, 1985.

- [Ro 73] Robert, A.: Formes automorphes sur  $\mathbf{GL}_2$ , en el llibre *Séminaire Bourbaki*, v. 1971-72, LNM, n. 317, 1973.
- [Wa 79] Wallach, Nolan R.: Representations of reductive Lie groups, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-functions*, v. I, Borel, A.; Casselman, W., ed., Proceed. Symposia Pure Mathematics, n. XXXIII, AMS, 1979, pp. 71–86.

# Representacions de grups reductius sobre cossos locals no arquimedians

SALVADOR COMALADA    SESSIÓ 1A. I 2A. DEL DIA 27 DE NOVEMBRE DE 1996

Aquest capítol no ha estat redactat. El programa i la bibliografia recomanada són els següents:

## **Representacions de grups reductius sobre cossos locals no arquimedians**

Representacions admissibles. Àlgebres de Hecke. La sèrie principal. Representacions de Weil. Representacions supercuspidals i especials (sèrie discreta). Edificis i subgrups d'Iwahori. Descomposicions d'Iwasawa i d'Iwahori. Teorema de Casselman. Models de Whittaker i de Kirillov. Estudi de  $\mathbf{GL}(2, K)$ ,  $K$  cos local no arquimedià.

### *Referències:*

- [Ca 79] Cartier, P.: Representations of  $p$ -adic groups: A survey, en el llibre *Automorphic Forms, Representations, and L-functions*, v. I, Borel, A.; Casselman, W., ed., Proceed. Symposia Pure Mathematics, n. XXXIII, AMS, 1979, pp. 111–155.
- [Ja-La 70] Jacquet, H.; Langlands, R. P.: *Automorphic Forms on  $\mathbf{GL}(2)$* , LNM, n. 114, 1970.
- [Ro 73] Robert, A.: Formes automorphes sur  $\mathbf{GL}_2$ , en el llibre *Séminaire Bourbaki*, v. 1971-72, LNM, n. 317, 1973.

# Representacions de grups reductius associats a àlgebres centrals i simples sobre cossos locals

PILAR BAYER

SESSIÓ 1A. DEL DIA 4 DE DESEMBRE DE 1996

En aquest capítol, volem posar de manifest com, a partir de representacions de grups reductius associats a àlgebres centrals i simples sobre cossos locals, es pot edificar una teoria de factors locals, de manera similar a la que es presenta en la tesi de Tate [Ta67]. L'eina principal és l'anàlisi de Fourier, tant en el cas arquimedià com en el cas ultramètric. El tractament serà, necessàriament, molt parcial. Un tractament exhaustiu necessitaria de l'estudi de les sèries de representacions associades a aquests grups locals. A [Ad79], en l'exposició de P. Gerardin, es pot trobar la construcció de la sèrie cuspidal no ramificada associada al grup multiplicatiu d'una d'aquestes àlgebres.

## §1. Grups algebraics reductius

Les notacions que fixem tot seguit seran vàlides al llarg del capítol.

### 1.1. Notacions:

$F$  designa un cos local;

$\mathcal{O}_F$ , l'anell d'enters de  $F$ ;

$H$ , una àlgebra de divisió central sobre  $F$ ;

$\mathcal{O}_H := \{x \in H \mid \mathcal{O}_F[x] \text{ és un } \mathcal{O}_F\text{-mòdul finitament generat}\};$

$d^2 = \text{rg}_F H;$

$M = M(m, H)$ , l'àlgebra, simple, de matrius amb entrades a  $H$ ;

$n^2 = \text{rg}_F M; \quad n := md;$

$\text{Nr}_M; \text{Tr}_M$ , la norma i la traça reduïdes de  $M$ ;

$\tau : F \rightarrow \mathbb{C}$ , un caràcter additiu fix.

**1.2. Proposició.** *El grup lineal  $\mathbf{GL}(m, H)$  és un grup algebraic reductiu sobre  $F$ .*

Denotem per  $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(m, H)(F)$  el grup dels punts  $F$ -racionals de  $\mathbf{GL}(m, H)$ , i per  $Z = F^*$ , el centre de  $\mathbf{G}$ .

**1.3. Definició.** Si  $F$  és un cos local ultramètric, sigui  $\mathcal{S}(M)$  l'espai de les funcions localment constants amb suport compacte definides a  $M = M(m, H)$ . Si  $F = \mathbb{R}$ , o bé  $\mathbb{C}$ , els elements de  $\mathcal{S}(M)$  són, per definició, les funcions  $f$  de classe  $C^\infty$  tals que, per a tot polinomi  $P$  i tot operador diferencial  $D$ , la funció  $PD(f)$  és afitada; és a dir, són les funcions tals que elles i totes les seves derivades presenten un decreixement ràpid a l'infinit.  $\mathcal{S}(M)$  s'anomena l'espai de Schwartz-Bruhat associat a  $M(m, H)$ .

**1.4. Proposició.** *Els subgrups  $K$  que escrivim a continuació són subgrups compactes maximals de  $\mathbf{G}$ .*

*Cas arquimedià :*

i) Si  $F = \mathbb{R}$ ,  $d = 1$ ,  $K := \mathbf{O}(n, \mathbb{R}) = \mathbf{O}(\sum_{i=1}^n x_i^2)$ .

ii) Si  $F = \mathbb{R}$ ,  $d = 2$ ,  $K := \mathbf{O}(\sum_{i=1}^m z_i \bar{z}_i)$ .

En particular, si  $m = 1$ , aleshores  $K = \mathbf{O}(\langle 1, -1, -1, 1 \rangle)$ .

iii) Si  $F = \mathbb{C}$ ,  $K := \mathbf{U}(n, \mathbb{C}) = \mathbf{U}(\sum_{i=1}^m z_i \bar{z}_i)$ .

*Cas ultramètric:*

iv)  $K := \mathbf{GL}(m, \mathcal{O}_H)$ .

En particular, si  $d = 1$ ,  $K = \mathbf{GL}(n, \mathcal{O}_F)$ ; si  $m = 1$ ,  $K = \mathcal{O}_H^*$ .



**1.5. Definició.** Donada una funció de Schwartz-Bruhat  $\phi \in \mathcal{S}(M)$ , es defineix la seva *transformada de Fourier* per mitjà de la integral

$$\widehat{\phi}(x) = \int_M \phi(y) \tau(\text{Tr}(xy)) dy,$$

on  $dy$  designa una mesura de Haar de  $M$  normalitzada de manera que

$$\phi(0) = \int \widehat{\phi}(y) dy.$$

**1.6. Proposició.** *Sigui  $d^*x$  una mesura de Haar de  $\mathbf{G}$ . Sigui  $\phi \in \mathcal{S}(M)$ .*

*i) La integral*

$$\int_{\mathbf{G}} \phi(x) |\text{Nr}(x)|^s d^*x$$

*convergeix absolutament per a  $\text{Re } s > d(m-1)$ .*

*ii) Per a tota funció  $f \in L^2(\mathbf{G}/Z)$ , la integral*

$$\int_{\mathbf{G}} \phi(x) f(x) |\text{Nr}(x)|^s d^*x$$

*convergeix absolutament per a  $\text{Re } s > \frac{1}{2}d(m-1)$ .*

**DEMOSTRACIÓ (Esbós).** El cas  $m = 1$  és el tractat a la tesi de Tate. Si  $m > 1$ , escrivim  $\mathbf{G} = PK = AUK$ , on  $P$  és el subgrup parabòlic de  $\mathbf{G}$  format per les matrius triangulars superiors,  $K$  és un subgrup compacte maximal,  $A$  és el grup diagonal (amb entrades en  $H$ ) i  $U$  és el radical unipotent de  $P$ . Definim la funció

$$\Phi(x) = \int_K \phi(xk) dk.$$

Aleshores,  $\Phi \in \mathcal{S}(M)$ . Definim, donat  $a \in A$ ,

$$\phi(a) = \int_A \Phi(au) du.$$

Aleshores, si  $a_1, \dots, a_m$  són les entrades a la diagonal de  $A$ , podem prendre una descomposició de la forma

$$\phi(a) = \phi'(a_1, \dots, a_m) \prod_{1 \leq i \leq m} |\text{Nr}(a_i)|^{-d(m-i)},$$

amb una certa funció  $\phi' \in \mathcal{S}(H^m)$ . És fàcil veure que existeixen funcions  $\phi_i \in \mathcal{S}(H)$ , positives, tals que

$$\phi'(a_1, \dots, a_m) \leq \prod_{1 \leq i \leq m} \phi_i(a_i).$$

Per a la integral que es tracta de calcular, podem escriure

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{G}} \phi(auk) |\mathrm{Nr}_M(a)|^s da du dk = \\ & \int \phi'(a_1, a_2, \dots, a_m) \prod_{1 \leq i \leq m} |\mathrm{Nr}_H(a_i)|^{s-d(m-i)} d^* a_i \leq \\ & \prod_{1 \leq i \leq m} \int_{F^*} \phi_i(a) |\mathrm{Nr}_H(a)|^{s-d(m-i)} d^* a. \end{aligned}$$

Aquesta integral és finita si  $s > d(m-1)$ . D'aquesta manera es demostra l'afirmació de *i*).

Per provar l'afirmació de *ii*), la integral es trenca de la manera següent

$$\int_{\mathbf{G}/Z} |\mathrm{Nr}(\tilde{g})|^s d\tilde{g} \int_{F^*} \phi(ga) |a|_F^{ns} d^* a. \quad \square$$

## §2. Representacions absolutament cuspidals

En aquesta secció, suposem que  $F$  és un cos local ultramètric. Denotem per  $\mathcal{H}(\mathbf{G})$  l'àlgebra de Hecke formada per les funcions definides sobre  $\mathbf{G}$ , localment constants i amb suport compacte, amb el producte de convolució.

Donat un  $\mathbb{C}$ -espai vectorial  $V$ , considerem una representació

$$\pi : \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{Aut}(V),$$

irreductible i admissible. Aquestes representacions tenen definit un caràcter

$$\mathrm{Tr}(\pi)(g) := \mathrm{Tr}(\pi(g)), \quad \mathrm{rg}(\pi(g)) < \infty.$$

$\mathrm{Tr}(\pi)$  és un funcional lineal continu definit sobre  $\mathcal{H}(\mathbf{G})$ ; és, per tant, una distribució sobre  $\mathbf{G}$ .

Donat un subgrup parabòlic maximal  $P \subset \mathbf{G}$ , amb radical unipotent  $U$ , sigui

$$V(P) := \left\{ v \in V \mid \int_{U'} \pi(u)v \, dv = 0, \text{ per a } U' \subseteq U, \text{ obert compacte} \right\}.$$

**2.1. Definició.** Una representació  $\pi$  s'anomena *absolutament cuspidal* si, i només si, se satisfà que

$$V(P) = V,$$

per a tot subgrup parabòlic maximal  $P$  de  $\mathbf{G}$ .

Alguns autors, Harish-Chandra entre ells, anomenen supercuspidals les representacions anteriors. La importància d'aquestes representacions es posa de manifest en el teorema següent.

**2.2. Teorema.** *Tota representació  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(V)$  irreductible i admissible és isomorfa a una subrepresentació d'una representació induïda,*

$$\text{Ind}(G, P, \sigma),$$

on  $P$  és un subgrup parabòlic de  $\mathbf{G}$  i  $\sigma$  és una representació absolutament cuspidal de  $P/U(P)$ .

### §3. Factors locals ultramètrics

Ens proposem presentar en aquesta secció una teoria general de factors  $L$  i de factors  $\varepsilon$  associats a representacions admissibles del grup  $\mathbf{G}$ . Suposem, com en la secció anterior, que el cos base  $F$  és local ultramètric.

**3.1. Definició.** Un *factor d'Euler* és una funció de la forma

$$\frac{1}{P(q^{-s})},$$

on  $q = \#\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F$  és el nombre d'elements del cos residual de l'anell d'enters de  $F$  i  $P$  és un polinomi tal que  $P(0) = 1$ .

Donades una representació admissible i la seva representació contragradient

$$\pi : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(V), \quad \tilde{\pi} : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(\tilde{V}),$$

i donats vectors  $v \in V, \tilde{v} \in \tilde{V}$ , es defineix el *coeficient*

$$f_{v,\tilde{v}} : \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}$$

de la representació  $\pi$  per la fórmula

$$f_{v,\tilde{v}}(g) = \langle \pi(g)v, \tilde{v} \rangle.$$

Al mateix temps, les fórmules

$$\tilde{f}_{v,\tilde{v}}(g) := f_{v,\tilde{v}}(g^{-1}) = \langle v, \tilde{\pi}(g)\tilde{v} \rangle$$

defineixen el coeficient contragradient corresponent a  $\tilde{\pi}$ .

**3.2. Definició.** (Funció zeta local) Donades una representació admissible  $\pi$  de  $\mathbf{G}$ , una funció  $\phi \in \mathcal{S}(M)$ , i un coeficient  $f$  de  $\pi$ , definim

$$Z(\phi, s, f) := \int_{\mathbf{G}} \phi(x) f(x) |\text{Nr}_M(x)|_F^s d^*x.$$

**3.3. Teorema.** *Sigui  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(V)$  una representació irreductible i admissible, fixada.*

- i) *Existeix un  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que, per a tota  $\phi \in \mathcal{S}(M)$  i per a tot coeficient  $f$  de  $\pi$ , les integrals*

$$Z(\phi, s, f), \quad Z(\phi, s, \tilde{f})$$

*convergeixen absolutament per a tot  $s \in \mathbb{C}$  tal que  $\text{Re } s > s_0$ .*

- ii) *Existeixen factors d'Euler  $L(s, \pi), L(s, \tilde{\pi})$  tals que, per a tota funció  $\phi$  i tot coeficient  $f$ , es tenen les igualtats*

$$\begin{aligned} Z(\phi, s + \frac{1}{2}(n-1), f) &= \theta(\phi, s, f) L(s, \pi), \\ Z(\phi, s + \frac{1}{2}(n-1), \tilde{f}) &= \tilde{\theta}(\phi, s, \tilde{f}) L(s, \tilde{\pi}), \end{aligned}$$

on  $\theta(\phi, s, f)$ ,  $\tilde{\theta}(\phi, s, \tilde{f})$  són polinomis en  $q^{-s}$ ,  $q^s$ , respectivament.

iii) Existeix una funció de  $s$ ,  $\varepsilon(s, \pi, \tau)$ , tal que satisfà l'equació funcional

$$\theta(\hat{\phi}, 1-s, \tilde{f}) = (-1)^{m(d-1)} \varepsilon(s, \pi, \tau) \theta(\phi, s, f),$$

per a tot parell  $\phi, f$ . El factor  $\varepsilon$  és producte d'una constant per una potència de  $q^{-s}$ .

La demostració del teorema es troba, en el cas  $n = 1$ , a [Ta67]; quan  $n = 2$ , a [Ja-La 70]; i, en el cas general, a [Go-Ja 72].

En el cas general, la demostració del teorema passa per una sèrie de reduccions. Suposem que  $\pi = \text{Ind}(G, P, \sigma)$ . Es veu que si el teorema és cert per a  $\sigma$ , també ho és per a  $\pi$ . Suposem que  $P/U = \prod_{j=1}^r G_j$ ,  $\sigma = \prod \sigma_j$ , on cada  $\sigma_j$  és una representació admissible de  $G_j$ . Aleshores, si el teorema és cert per a cada representació  $\sigma_j$ , també ho és per a  $\pi$  i se satisfà que

$$\begin{aligned} L(s, \pi) &= \prod_j L(s, \sigma_j), \\ L(s, \tilde{\pi}) &= \prod_j L(s, \tilde{\sigma}_j), \\ \varepsilon(s, \pi, \tau) &= \prod_j \varepsilon(s, \sigma_j, \tau). \end{aligned}$$

Aquestes consideracions fan que la demostració del teorema es pugui reduir a l'estudi del cas absolutament cuspidal.

Anem a veure algunes particularitats en el cas  $m = 1$  i en el cas absolutament cuspidal.

**3.4. Proposició.** *Suposem que  $\mathbf{G} = H^*$ ; és a dir,  $M = H$ ,  $m = 1$ ,  $n = d$ . Donada una representació  $\pi$  admissible, existeixen factors  $L$  d'Euler. Satisfan que*

$$L(s, \pi) = L(s, \tilde{\pi}) = 1,$$

*llevat del cas  $\pi = \omega \text{Nr}_H$ , i  $\omega = \chi| \cdot|^s$  un quasicaràcter de  $F^*$  no ramificat. En aquest cas,*

$$\begin{aligned} L(s, \pi) &= L(s + 1/2(n-1), \chi), \\ L(s, \tilde{\pi}) &= L(s + 1/2(n-1), \chi^{-1}). \end{aligned}$$

Per a tot parell  $\phi, \psi \in \mathcal{S}(M)$  se satisfà que

$$Z(\phi, s, \phi)Z(\widehat{\psi}, n-s, \widehat{\pi}) = Z(\widehat{\phi}, n-s, \widehat{\pi})Z(\psi, s, \pi),$$

en tenir present les prolongacions analítiques corresponents.

**3.5. Proposició.** *Segui  $\pi$  la representació trivial de  $\mathbf{G} = H^*$ , i siguin  $\mu_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , els  $n$  quasicaràcters de  $F^*$  definits per*

$$\mu_i(x) = |x|_F^{\frac{1}{2}(n+1)-i}.$$

*Aleshores,*

$$L(s, \pi) = L(s, \mu_1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{s+\frac{1}{2}(n-1)}}},$$

$$\varepsilon'(s, \pi, \tau) = \prod_{1 \leq i \leq n} \varepsilon'(s, \mu_i, \tau).$$

(El factor  $\varepsilon'$  resulta de modificar lleugerament el factor  $\varepsilon$ .)

**3.6. Proposició.** *Suposem que  $m > 1$ . Segui  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(V)$  una representació absolutament cuspidal i irreductible. Definim el quasicaràcter associat*

$$\omega(a) := \pi(a), \quad a \in F^*.$$

*Aleshores,*

i) *Per a tot coeficient  $f$  de  $\pi$  se satisfà que*

$$f(ga) = f(g)\omega(a), \quad \text{per a tot } a \in Z.$$

*La funció  $f$ , mòdul el centre, té suport compacte.*

ii) *Si  $\omega$  és un caràcter, aleshores la representació  $\pi$  és preunitària.*

iii) *La representació contragradient  $\widetilde{\pi}$  és, també, absolutament cuspidal.*

**3.7. Proposició.** *Suposem que  $m > 1$  i, com abans, que  $\pi$  és absolutament cuspidal. Aleshores,*

$$L(s, \pi) = L(s, \widetilde{\pi}) = 1.$$

Si  $\omega$  és un caràcter ramificat,

$$L(s, \omega) = L(s, \omega^{-1}) = 1.$$

Suposem que  $m > 1$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(m, H)$ ,  $K = \mathbf{GL}(m, \mathcal{O}_H)$ . Tot seguit veurem com l'ús de les funcions esfèriques permeten el càlcul de factors locals. L'àlgebra de Hecke relativa,  $\mathcal{H}(\mathbf{G}, K)$ , formada per les funcions que són  $K$ -biinvariants, és commutativa i opera en  $V_0 := V^K$ . Com que  $\pi$  és irreductible i  $V_0 \neq 0$ ,  $V_0$  és  $\mathcal{H}(\mathbf{G}, K)$ -mòdul irreductible. Per tant, existeixen vectors distingits  $v_0, \tilde{v}_0$  tals que

$$V_0 = \langle v_0 \rangle, \quad \tilde{V}_0 = \langle \tilde{v}_0 \rangle, \quad \langle v_0, \tilde{v}_0 \rangle = 1.$$

**3.8. Definició.** La funció  $f_0(g) := \langle \pi(g)v_0, \tilde{v}_0 \rangle$  s'anomena la *funció esfèrica* associada a  $\pi$ .

**3.9. Proposició.** Sigui  $M = M(m, H)$ ,  $m > 1$ ; siguin  $\phi$  la funció característica de  $K$ , i  $\pi$  una representació admissible, irreductible i que contingui la representació trivial de  $K$ . Normalitzem les mesures de manera que  $\int_K d^*g = 1$ . Sigui  $f_0$  la funció esfèrica associada a  $\pi$ . Aleshores,

$$i) \quad \hat{\phi} = \phi.$$

$$ii) \quad \varepsilon(s, \pi, \tau) = 1.$$

iii) Existeixen  $n$  quasicaràcters  $\chi_i = |\cdot|^{\sigma_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tals que

$$\begin{aligned} Z(\phi, s + \frac{1}{2}(n-1), f_0) &= L(s, \pi) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} L(s, \chi_i) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{\sigma_i + s}}}; \\ Z(\phi, s + \frac{1}{2}(n-1), \hat{f}_0) &= L(s, \tilde{\pi}) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} L(s, \chi_i^{-1}) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{1 - \frac{1}{q^{-\sigma_i + s}}}. \end{aligned}$$

## §4. La representació especial

Continuem en el cas en què  $F$  és un cos local ultramètric. Suposem que  $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(m, F)$  i sigui  $(G_0, B, N(A) \cap B, S)$  un sistema de Tits de  $\mathbf{G}$ .

Sigui  $\omega$  una arrel d'un uniformitzant  $\varpi$  de  $F$ , en el sentit que

$$\omega^n = \varpi 1_M.$$

Denotem per  $W_0$  el grup de Weyl afí. Donat  $w \in W_0$ , sigui  $\lambda(w)$  el nombre mínim de simetries que necessitem per escriure l'element  $w$  com a producte d'aquests elements.

Considerem la funció

$$\varphi_B(\omega^p w) := (-1)^{(n-1)p} (-q)^{-\lambda(w)},$$

per a  $w \in W_0$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

**4.1. Teorema.** *Existeix una representació irreductible,*

$$\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(V),$$

*en un cert espai vectorial  $V$ , única llevat d'equivalències, tal que:*

- i) La funció  $\varphi_B$  és un coeficient de  $\sigma$ .*
- ii)  $\sigma$  és quasiunitària i  $\tilde{\sigma} \simeq \sigma$ .*
- iii)  $\sigma$  és un component de la representació  $\text{Ind}(G, P_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$ , on  $\mu_i$  és el quasicaràcter de  $F^*$  definit per  $\mu_i = |\cdot|^{\frac{1}{2}(n+1)-i}$ .*
- iv) Se satisfan les identitats*

$$L(s, \sigma) = L(s, \mu_1), \quad \varepsilon'(s, \sigma, \tau) = \prod_{1 \leq i \leq n} \varepsilon'(s, \mu_i, \tau).$$

## §5. Factors locals en el cas arquimedià

Suposem que  $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ;  $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(m, F)$ ;  $\pi : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut } V$ . Denotem també per  $\pi$  la representació de l'àlgebra de Hecke  $\mathcal{H}(\mathbf{G}, K)$  en  $\text{End}(V)$  que es dedueix de  $\pi$ .



**5.1. Teorema.** *Suposem que  $\pi$  és irreductible i admissible. Sigui  $P$  un subgrup parabòlic maximal de  $\mathbf{G}$  i sigui  $U$  el seu radical unipotent. Existeix una representació contínua, irreductible i de dimensió finita*

$$\sigma : P/U \rightarrow \text{Aut}(W)$$

*tal que  $\pi$  és un component de  $\text{Ind}(G, P, \sigma)$ .*

**5.2. Definició.** Siguin

$$G_1(s) = \pi^{-\frac{1}{2}s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right),$$

$$G_2(s) = (2\pi)^{1-s} \Gamma(s).$$

Si  $F = \mathbb{R}$ , s'anomenen factors d'Euler les expressions

$$P(s) \prod_i G_1(s + s_i) \prod_j G_2(s + s_j).$$

Si  $F = \mathbb{C}$ , s'anomenen factors d'Euler les expressions

$$P(s) \prod_j G_2(s + s_j).$$

En ambdues situacions,  $P(s)$  denota una funció polinòmica en  $s$ .

**5.3. Teorema.** *Suposem que  $\pi$  és admissible i irreductible.*

i) *Existeix un  $s_0 \in \mathbb{R}$  tal que la integral*

$$Z(\phi, s, f) := \int \phi(x) |\text{Nr}(x)|_F^s f(x) d^*x$$

*és absolutament convergent en el semiplà  $\text{Re}(s) \geq s_0$ .*

ii) *En el cas  $F = \mathbb{R}$ ,  $\tau(x) = e^{2\pi i ax}$ , existeixen factors d'Euler respecte de les funcions*

$$\theta(s, \phi, f) = P(s) |a|^{-\frac{1}{2}sn}.$$

iii) *En el cas  $F = \mathbb{C}$ ,  $\tau(x) = e^{2\pi i z(x+\bar{x})}$ , existeixen factors d'Euler respecte de les funcions*

$$\theta(s, \phi, f) = P(s) (z\bar{z})^{-\frac{1}{2}sn}.$$

*En ambdues situacions,  $P$  denota un polinomi.*

*iv) Existeix un factor  $\varepsilon(s, \pi, \tau)$  tal que*

$$\tilde{\theta}(\hat{\phi}, 1-s, \tilde{f}) = (-1)^{m(d-1)} \varepsilon(s, \pi, \tau) \theta(\phi, s, f),$$

*per a tot parell  $\phi, f$ .*

## §6. El cas unitari

Suposem que  $F$  és un cos local ultramètric, o bé que  $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . Suposem que  $V$  és un espai de Hilbert i sigui

$$\pi : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(V)$$

una representació unitària i de quadrat integrable. La funció

$$Z(\phi, s, \pi)$$

admet una prolongació analítica en una funció meromorfa de tot el pla complex. Donades funcions  $\phi, \psi \in \mathcal{S}(M)$ , se satisfà l'equació funcional

$$Z(\phi, s, \pi) Z(\hat{\psi}, n-s, \tilde{\pi}) = Z(\hat{\phi}, n-s, \tilde{\pi}) Z(\psi, s, \pi),$$

on  $\tilde{\pi}(g) := \pi(g^{-1})$ , és una antirepresentació deduïda de  $\pi$ .

# Bibliografia

- [Ad 79] Autors diversos: *Automorphic Forms, Representations, and L functions*, v.I,II, Proceed. Symposia Pure Mathematics, n. XXXIII, AMS, 1979. Ed. A. Borel; W. Casselman.
- [Ge 75] Gelbart, S.S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1975.
- [Go-Ja 72] Godement, R.; Jacquet, R.: *Zeta Functions of Simple Algebras*, LNM, n. 260, Springer, 1972.
- [Ja-La 70] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic forms on  $\mathbf{GL}_2$* , LNM, n. 114, Springer, 1970.
- [Ro 73] Robert, A.: Formes automorphes sur  $\mathbf{GL}_2$ , en el llibre *Séminaire Bourbaki*, v. 1971-72, LNM, n. 317, 1973.
- [Tam 63] Tamagawa, T.: On the  $\zeta$ -Functions of a Division Algebra, *Annals of Math.* **77**, n. 2 (1963), 387–405.
- [Ta 67] Tate, J.: Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions, en el llibre *Algebraic Number Theory*, Cassels, J. W. S.; Frölich, A., ed., Thompson Book Company, 1967.

# Formes automorfes sobre grups reductius reals

NÚRIA VILA    SESSIÓ 2A. DEL DIA 4 DE DESEMBRE DE 1996, I 1A. DEL DIA 11 DE DESEMBRE DE 1996

L'objectiu que ens proposem és presentar les formes automorfes sobre un grup reductiu real. Es vol tenir una definició de forma automorfa prou general per tal que la definició sigui traslladable “copiant” al cas adèlic i que englobi les formes modulars clàssiques i les formes onades en el sentit de Maass. A més, es voldria que en considerar les representacions automorfes associades a les formes cuspidals en el cas adèlic i les  $L$ -sèries associades, es tingui el caràcter enter i el producte d'Euler.

Aquestes notes contenen aproximadament el que vaig explicar en el STNB 96-97. La primera sessió la vaig dedicar a presentar i intentar entendre les condicions que intervenen en la definició de forma automorfa sobre un grup reductiu real. La segona la vàrem dedicar a veure amb “tot detall” que les formes modulars clàssiques són formes automorfes.

## §1. Definició de forma automorfa sobre grups reductius reals

### 1.1. Notacions.

$G$ , grup algebraic reductiu connex  $\mathbb{Q}$ -definit.

$Z$ , tor del centre de  $G$ ,  $\mathbb{Q}$ -split maximal.

$K \subset G(\mathbb{R})$ , subgrup compacte maximal.

$\mathfrak{g}$ , l'àlgebra de Lie de  $G(\mathbb{R})$ .

$U(\mathfrak{g})$ , l'àlgebra envelopant universal de  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathbb{C}$ .

$Z(\mathfrak{g})$ , el centre de  $U(\mathfrak{g})$ .

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(G(\mathbb{R}), K)$ , l'àlgebra de Hecke.

$A_K$ , l'àlgebra de mesures finites de  $K$ .

$\mathfrak{k}$  i  $U(\mathfrak{k})$ , l'àlgebra de Lie i l'envolupant universal associades a  $K$ .

Recordem que l'àlgebra de Hecke  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(G(\mathbb{R}), K)$ , és a dir, l'àlgebra de convolució de les distribucions sobre  $G(\mathbb{R})$  amb suport a  $K$  és isomorfa a  $U(\mathfrak{g}) \times_{U(\mathfrak{k})} A_K$ . Un idempotent a  $\mathcal{H}$  és un idempotent a  $A_K$ , és a dir, una suma finita de mesures  $d(\sigma)^{-1} \cdot \chi_\sigma \cdot dk$ , on  $\sigma$  és una representació irreductible de dimensió finita de  $K$  de grau  $d(\sigma)$ ,  $\chi_\sigma$  és el caràcter de  $\sigma$  i  $dk$  és una mesura de Haar sobre  $K$  normalitzada.

**1.2. Funcions de creixement lent.** Una funció  $f$  sobre  $G(\mathbb{R})$  es diu que és de creixement lent si existeixen una norma a  $G(\mathbb{R})$ , una constant  $C$  i un enter positiu  $n$  tals que

$$|f(x)| \leq C \cdot \|x\|^n,$$

per a tot  $x \in G(\mathbb{R})$ .

Una norma a  $G(\mathbb{R})$  és una funció de la forma

$$\|g\| = (\mathrm{tr} \sigma(g)^* \cdot \sigma(g))^{1/2},$$

on  $\sigma : G(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{GL}(E)$  és una representació de dimensió finita complexa amb nucli finit i imatge tancada a  $\mathrm{End}(E)$ ;  $*$  denota l'adjunt respecte a l'estructura d'espai de Hilbert de  $E$  invariant per  $K$ .

Notem que, de fet, la definició de funció de creixement lent no depèn de la norma. En efecte, si  $\tau$  és una altra representació, existeixen una constant  $C_1 > 0$  i un enter positiu  $n_1$  tals que  $\|x\|_\sigma \leq C_1 \cdot \|x\|_\tau^{n_1}$ , per a tot  $x \in G(\mathbb{R})$ .

D'altra banda, la condició de imatge de la representació  $\sigma$  tancada, no és essencial. Si  $\sigma : G(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{GL}(E)$  té nucli finit, però no té la imatge

tancada a  $\text{End}(E)$ , es pot, o bé afegir una coordenada i  $\det \sigma(g)^{-1}$  com a entrada, o bé prendre la suma  $\sigma + \sigma^*$ , on  $\sigma^*(g) = \sigma(g^{-1})^*$ . Aleshores es té que

$$\|g\|^2 = |\det \sigma(g)^{-1}|^2 + \text{tr}(\sigma(g)^* \cdot \sigma(g)),$$

o bé

$$\|g\|^2 = \text{tr}(\sigma(g)^* \cdot \sigma(g)) + \text{tr}(\sigma(g^{-1}) \cdot \sigma(g^{-1})^*).$$

**1.3. Subgrups aritmètics de  $G(\mathbb{Q})$ .** Un subgrup  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  es diu que és un subgrup aritmètic si existeix una representació  $\rho : G \rightarrow \mathbf{GL}_n$ ,  $\mathbb{Q}$ -definida, tal que  $\rho(\Gamma)$  és commensurable amb  $\rho(G(\mathbb{R}) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}))$ .

Recordem que  $A, B \subset C$  són commensurables si  $A \cap B$  és d'índex finit en  $A$  i en  $B$ .

Notem que un grup aritmètic  $\Gamma$ :

- És un subgrup discret de  $G(\mathbb{R})$ .
- Opera a  $G(\mathbb{R})$  per translació a la dreta.
- Si  $\rho : G \rightarrow G'$  és un  $\mathbb{Q}$ -epimorfisme de grups algebraics, la imatge  $\rho(\Gamma)$  és un subgrup aritmètic de  $G'$ .

**1.4. Definició de forma automorfa.** Sigui  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  un subgrup aritmètic; una funció  $f : G(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  llisa és una forma automorfa per a  $(\Gamma, K)$  (o simplement per a  $\Gamma$ ), si satisfà les propietats següents:

- (i)  $f(\gamma x) = f(x)$ , per a tot  $x \in G(\mathbb{R})$  i tot  $\gamma \in \Gamma$ .
- (ii) Existeix un idempotent  $\xi \in \mathcal{H}$  tal que  $f * \xi = f$ .
- (iii) Existeix un ideal  $J$  de codimensió finita de  $Z(\mathfrak{g})$  que anul·la  $f$ , és a dir, tal que  $f * X = 0$ , per a  $X \in J$ .
- (iv)  $f$  és de creixement lent.

Una forma automorfa que satisfà les condicions (i), (ii), (iii), (iv) s'anomena de tipus  $(\xi, J)$ .

Denotem per  $\mathcal{A}(\Gamma, \xi, J, K)$  l'espai de les formes automorfes per a  $(\Gamma, K)$  i de tipus  $(\xi, J)$ .

**1.5. Teorema.** (Harish-Chandra) *L'espai  $\mathcal{A}(\Gamma, \xi, J, K)$  és de dimensió finita.*

La demostració d'aquest teorema per a grups semisimples és a [H-C 68]. Segons Borel-Jacquet [B-J 79], la generalització a grups reductius és fàcil. Una altra referència per a la prova és [Lan 76].

### 1.6. Anàlisi de les condicions.

- La condició (ii) és equivalent a dir que  $f$  és  $K$ -finita a la dreta, és a dir, que els traslladats de  $f$  per elements de  $K$  (a la dreta) generen un espai de funcions de dimensió finita. A més, satisfan les condicions (i), (iii), (iv), si  $f$  les satisfà (cf. [Bo 66]).

- Si  $r : K \rightarrow \mathbf{GL}(V)$  és una representació unitària de dimensió finita de  $K$ , tenim la noció de forma automorfa  $V$ -valuada, això és, una funció  $f : G(\mathbb{R}) \rightarrow V$  llisa que satisfà (i), (iii), (iv), per a  $\|\cdot\|$  la norma a  $V$  i la condició segona substituïda per

$$(ii)' \quad f(x \cdot k) = r(k^{-1}) \cdot f(x), \text{ on } x \in G(K) \text{ i } k \in K.$$

- Una definició similar es pot donar per a recobriments finits  $H$  d'un subgrup obert de  $G(\mathbb{R})$ , en lloc de  $G(\mathbb{R})$  i en substituir  $\Gamma$  per un subgrup de  $H$  amb imatge a  $G(\mathbb{R})$  aritmètica. Aquí s'inscriuen les formes modulars de pes racional, de fet, són formes automorfes de recobriments finits de  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ .

**1.7. La condició de creixement.** Sigui  $A$  la component de l'element neutre de  $S$ , el tor  $\mathbb{Q}$ -split maximal de  $G$ . Sigui  $\Phi$  un sistema de  $\mathbb{Q}$  arrels de  $G$  respecte a  $S$ . Fixem una ordenació a  $\Phi$  i sigui  $\Delta$  el conjunt d'arrels simples. Donat  $t > 0$  sigui

$$A_t = \{a \in A : |\alpha(a)| \geq t, \alpha \in \Delta\}.$$

- Si  $f$  és una funció llisa que satisfà les condicions (i), (ii), (iii), la condició (iv) és equivalent a la condició

(iv)' Donats un compacte  $R \subset G(\mathbb{R})$  i  $t > 0$  existeixen una constant  $C > 0$  i un enter positiu  $m$  tals que  $|f(x \cdot a)| \leq C|\alpha(a)|^m$ , per a tot  $a \in A_t$ , tot  $\alpha \in \Delta$  i tot  $x \in R$ .

- Si  $f$  és una funció llisa que satisfà les condicions (i), (ii), (iii) i

$$f(z \cdot x) = \chi(z)f(x),$$

per a tot  $z \in Z(\mathbb{R})$  i tot  $x \in G(\mathbb{R})$ , on  $\chi$  és un caràcter de  $Z(\mathbb{R})/(Z(\mathbb{R}) \cap \Gamma)$ , aleshores  $|f|$  és una funció a  $Z(\mathbb{R}) \Gamma \backslash G(\mathbb{R})$ .

Si, a més,  $|f| \in L^p(Z(\mathbb{R}) \Gamma \backslash G(\mathbb{R}))$ , per a  $p \geq 1$ , aleshores  $f$  és de creixement lent i, per tant,  $f$  és una forma automorfa.

**1.8. Formes cuspidals.** Una funció contínua (respectivament mesurable) sobre  $G(\mathbb{R})$  és cuspidal si

$$\int_{(\Gamma \cap N(\mathbb{R})) \backslash N(\mathbb{R})} f(n.x) \, dn = 0,$$

per a tot (respectivament, quasi tot)  $x \in G(\mathbb{R})$ , on  $N$  és el radical unipotent d'un  $\mathbb{Q}$ -subgrup parabòlic de  $G$ .

Una forma cuspidal és una forma automorfa cuspidal. Denotem per  ${}^o\mathcal{A}(\Gamma, \xi, J, K) \subset \mathcal{A}(\Gamma, \xi, J, K)$  l'espai de formes cuspidals.

**1.9. Proposició.** Si  $f$  és una funció llisa cuspidal que satisfà (i), (ii), (iii) i existeix un caràcter  $\chi$  de  $Z(\mathbb{R})$  tal que

$$f(z \cdot x) = \chi(z)f(x),$$

per a tot  $z \in Z(\mathbb{R})$  i tot  $x \in G(\mathbb{R})$ , hi ha equivalència entre

- $f$  és de creixement lent (és a dir, és una forma cuspidal);
- $f$  és afitada;
- $|f| \in L^2((Z(\mathbb{R}) \Gamma) \backslash G(\mathbb{R}))$  (és a dir, de quadrat integrable mòdul  $Z(\mathbb{R}) \Gamma$ ).

**1.10. Operador de Laplace.** Sigui  $G(\mathbb{R}) = \mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ . L'àlgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  està generada per

$$X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Siguin  $L_{X_+}$ ,  $L_{X_-}$ ,  $L_H \in U(\mathfrak{g})$  els elements de l'envolvent universal associats. L'operador de Casimir, també anomenat operador de Laplace, el definim com

$$\Delta = \frac{-1}{4}(L_H^2 + 2(L_{X_+}L_{X_-} + L_{X_-}L_{X_+})) = \frac{-1}{4}(L_H^2 + L_V^2 - L_W^2),$$

on  $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  i  $L_V, L_W \in U(\mathfrak{g})$ . D'aquest operador destaquem les propietats (cf. [La 75]):

- 1)  $\Delta$  commuta amb  $L_H$ ,  $L_{X_+}$ ,  $L_{X_-}$ . Per tant,  $\Delta \in Z(\mathfrak{g})$ .
- 2)  $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\Delta]$ , àlgebra de polinomis en la variable  $\Delta$  i coeficients a  $\mathbb{C}$ .

**1.11. Exemple: Forma-Ona en el sentit de Maass.** Siguin  $G = \mathbf{GL}_2$ ,  $\Gamma = \mathbf{GL}_2(\mathbb{Z})$ ,  $K = O(2, \mathbb{R})$ ,  $\xi = 1$  i  $J$  l'ideal de  $Z(\mathfrak{g})$  generat per  $(\Delta - \lambda)$ , on  $\lambda \in \mathbb{C}$  i  $\Delta$  és l'operador de Casimir.

Una forma automorfa per a  $(\Gamma, K)$  de tipus  $(\xi, J)$  és una funció pròpia de l'operador de Casimir, invariant a l'esquerra per  $\Gamma$ , invariant a la dreta per  $K$ , invariant pel centre  $Z$  de  $G(\mathbb{R})$ . El quocient  $G(\mathbb{R})/Z \cdot K$  es pot identificar amb el semipla superior de Poincaré  $\mathfrak{H}$ . En conseqüència,  $f$  és pot veure com una funció  $\Gamma$ -invariant, valor propi de l'operador de Laplace-Beltrami a  $\mathfrak{H}$ ; aquesta és una “forma-ona” en el sentit de Maass (cf. [Ge 75]).

## §2. Formes modulars clàssiques “versus” formes automorfes

Considerem  $G = G(\mathbb{R}) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  com a grup reductiu real,  $\Gamma = \Gamma_0(N)$  subgrup de congruència, com a subgrup aritmètic. Dediquem aquest apartat a establir una correspondència bijectiva entre  $S_k(\Gamma)$ ,  $k$  parell, i cert subespai de dimensió finita de  $L^2(\Gamma \backslash G)$ .

**2.1. Descomposició d'Iwasawa i  $\mathfrak{H}$ .** Sabem que  $G = BK = NAK$ , on

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$  és el subgrup unipotent,

$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \right\}_{a>0}$  és el subgrup diagonal, i

$K = \mathbf{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$ , és el grup de rotacions, el compacte maximal.

Sabem que  $G$  actua al semipla superior de Poincaré

$$\mathfrak{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Si  $z \in \mathfrak{H}$  i  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ , tenim que  $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Notem que:

1)  $B = N \cdot A$  actua transitivament a  $\mathfrak{H}$ . En efecte,

$$\begin{pmatrix} y^{1/2} & x y^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} (i) = \frac{y^{1/2}i + xy^{-1/2}}{y^{-1/2}} = x + yi.$$

2)  $K$  és el grup d'isotropia de  $i$  (l'estabilitzador de  $i$ ). En efecte,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (i) = i &\Leftrightarrow c^2 + d^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = r(\theta). \\ ad - bc &= 1 \end{aligned}$$

Per tant, l'aplicació

$$G \longrightarrow \mathfrak{H}$$

$$g \mapsto g(i)$$

indueix una bijecció

$$\begin{aligned} N A &\longrightarrow \mathfrak{H} \\ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{1/2} & 0 \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} &\mapsto x + yi. \end{aligned}$$

És a dir,

$$\mathfrak{H} \simeq N A \simeq G/K.$$

Donat que un element

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{1/2} & x y^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} r(\theta),$$

podem parametritzar  $G$  per  $(x, y, \theta)$ , on  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Si posem  $z = x + iy \in \mathbb{H}$ , aleshores  $(z, \theta)$  també parametritza  $G$ .

Notem que  $z = g(i)$  i  $\theta = \arg(ci + d)$ .

Què vol dir, aleshores,  $\int_G$  una funció de  $G$ ?

$$\int_G \phi(g) dg = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \phi(x, y, \theta) \frac{dx dy}{y^2} d\theta,$$

prenent la mesura de Haar de  $G$  normalitzada.

**2.2. L'operador de Laplace en les coordenades de  $G$ .** Recordem que si

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$H, V, W \in \mathfrak{g}$  i  $L_H, L_V, L_W \in U(\mathfrak{g})$ , tenim que l'operador de Laplace   s

$$\Delta = \frac{-1}{4}(L_H^2 + L_V^2 - L_W^2).$$

Ara,  $\Delta$  està definida sobre funcions de  $L^2(\Gamma \backslash G)$ ; prenent a  $G$  les coordenades  $(x, y, \theta)$ , aleshores tenim:

$$\Delta(\phi(g)) = \Delta(\phi(x, y, \theta)),$$

$$L_W = \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$L_H = -2y \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial x} + 2y \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial y} + \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$L_V = 2y \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial x} + 2y \sin 2\theta \frac{\partial}{\partial y} - \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Un càlcul ens permet expressar l'operador de Laplace com:

$$\Delta = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - y \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$$

(cf. [La75]).

**2.3. Definició de l'aplicació.** Assignem ara a cada forma modular parabòlica una forma automorfa cuspidal:

$$S_k(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma \backslash G)$$

$$f \mapsto \phi_f.$$

Definim

$$\phi_f(g) := f(g(i))j(g, i)^{-k},$$

on  $g \in G$  i  $j(g, z) := (cz + d)(\det g)^{-1/2}$ , per a  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}^+(2, \mathbb{R})$ , és el factor d'automorfia. En el nostre cas,  $g \in G = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ ; per tant,  $j(g, z) = (cz + d)$ .

**2.4. Proposició.** *La funció  $\phi_f$  satisfà:*

- 1)  $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ , per a tot  $\gamma \in \Gamma$ .
- 2)  $\phi_f(g r(\theta)) = e^{-ik\theta} \phi_f(g)$ , per a  $r(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in K$ .
- 3)  $\int_{\Gamma \backslash G} |\phi_f(g)|^2 dg < \infty$ .
- 4)  $\int_0^1 \phi_f\left(\sigma \begin{pmatrix} 1 & xh \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0$ , per a tot  $g \in G$ ,  $\sigma \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ , on  $\zeta = e^{2\pi iz/h}$  és l'uniformitzant local a  $\sigma(\infty)$ .

Notem que la condició 1) és la condició (i) de la definició de forma automorfa; la condició 2) dóna la  $K$ -finitud; l'afitació de la condició 3) ens dóna la condició de creixement lent, i la condició 4) dóna el caràcter cuspidal. De fet, veurem caràcter cuspidal lligat a l'anul·lació del coeficient zero del desenvolupament de Fourier.

DEMOSTRACIÓ.

1)

$$\begin{aligned} \phi_f(\gamma g) &= f(\gamma g(i)) j(\gamma g, i)^{-k} \\ &= j(\gamma, g(i))^k f(g(i)) j(\gamma, g(i))^{-k} j(g, i)^{-k} \\ &= \phi_f(g), \end{aligned}$$

en tenir en compte que el factor d'automorfia  $j(g, z)$  satisfà

$$j(g_1 g_2, z) = j(g_1, g_2 z) j(g_2, z).$$

2)

$$\begin{aligned} \phi_f(g r(\theta)) &= f(g r(\theta) i) j(g r(\theta), i)^{-k} \\ &= f(g(i)) j(g, r(\theta) i)^{-k} j(r(\theta), i)^{-k} \\ &= \phi_f(g) e^{-ik\theta}, \end{aligned}$$

ja que

$$j(r(\theta), i)^{-k} = (i \sin \theta + \cos \theta)^{-k} = (e^{i\theta})^{-k} = (1_\theta)^{-k},$$

4) La condició cuspidal és

$$\int_{\Gamma \cap N(\mathbb{R}) \backslash N(\mathbb{R})} \phi_f(n g) \, dn = 0,$$

on  $g \in G$ . Ara  $\Gamma \cap N(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on  $x \in \mathbb{Z}$ . Ara,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma \cap N(\mathbb{R}) \backslash N(\mathbb{R})} \phi_f(n g) \, dn \\ &= \int_{\Gamma \cap N(\mathbb{R}) \backslash N(\mathbb{R})} \phi_f \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}} \phi_f \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx = \int_0^1 \phi_f \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx. \end{aligned}$$

Si la punta és  $\infty$ , aquesta condició és

$$a_0 = \int_0^1 f(x + iy) dx = 0,$$

que és la condició de forma parabòlica. En efecte,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_f \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx &= \\ \int_0^1 f \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g(i) \right) j \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g, i \right)^{-k} dx &= \\ \int_0^1 f(z + x) j(1, z + x)^{-k} dx &= \int_0^1 f(x + yi) dx. \end{aligned}$$

Per a les altres puntes, la condició és

$$a_0(s) = \int_0^1 f|_{[\sigma]_k}(hx + z) dx = 0. \square$$

**2.5. Teorema.** La imatge  $\text{Im}(\Phi)$  de

$$\Phi : S_k(\Gamma) \longrightarrow L^2(\Gamma \backslash G)$$

$$f \mapsto \phi_f$$

és el conjunt de  $\phi \in L^2(\Gamma \backslash G)$  que satisfi, (a), (b), (c), (d), tals que

$$\Delta(\phi) = -\frac{k}{2} \left( \frac{k}{2} - 1 \right) \phi.$$

DEMOSTRACIÓ. Cal veure que  $\phi_f$  és vector propi de l'operador de Laplace; concretament, que  $\Delta(\phi_f) = -\frac{k}{2}(\frac{k}{2} - 1)\phi_f$ .

Remarquem primer que  $\phi_f(g) = \phi_f(z, \theta) = y^{k/2} f(z) e^{-ik\theta}$ . En efecte,  $\phi_f(g) := f(g(i))j(g, i)^{-k}$ . Ara, si

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^{1/2} & x y^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} r(\theta),$$

tenim

$$\begin{aligned} j(g, i)^{-k} &= j\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & x y^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix} r(\theta), i\right)^{-k} \\ &= j\left(\begin{pmatrix} y^{1/2} & x y^{-1/2} \\ 0 & y^{-1/2} \end{pmatrix}, r(\theta)(i)\right)^{-k} j(r(\theta), i)^{-k} \\ &= y^k e^{-2k\theta}. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\begin{aligned} \Delta\phi_f(g) &= \\ &\left(-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - y\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}\right)(y^{k/2}f(z)e^{-ik\theta}) = \\ &(-e^{-ik\theta}y^{2+k/2})\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(z) + \\ &(ik)e^{-ik\theta}y^{1+k/2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)f(z) - \\ &\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)y^{k/2}f(z)e^{-ik\theta}. \end{aligned}$$

Donat que  $f(z)$  és holomorfa, és armònica i, per tant, els dos primers sumands s'anul·len. Tenim doncs que

$$\begin{aligned} \Delta\phi_f(g) &= -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)y^{k/2}f(z)e^{-ik\theta} \\ &= -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\phi_f(g). \end{aligned}$$

Recíprocament, si  $\phi(g) \in \text{Im}(\Phi)$ , posem

$$f_\phi(z) := \phi(g)j(g, i)^k,$$

on  $g \in G$ ,  $g(i) = z$ . La condició (b) ens diu que  $f(z)$  està ben definida, no depèn de  $g$ . És clar que  $\phi_{f_\phi} = \phi$ . Cal veure que  $f_\phi(z) \in S_k(\Gamma)$ . Comprovar les propietats és fàcil, estudiar l'holomorfia és més difícil (cf. [Ge 75]).  $\square$

# Bibliografia

- [Bo66] Borel, A: Introduction to automorphic forms, en el llibre *Proc. Sympos. Pure Math. Soc.*, Providence, R.I., 1966, pp. 199–210.
- [Bo69] Borel, A: *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, 1969.
- [B-J 79] Borel, A; Jacquet, H.: Automorphic forms and automorphic representations, en el llibre *Proc. Sympos. Pure Math. Soc.*, Providence, R.I., 1979, pp. 189–202.
- [Ge75] Gelbart, S.: *Automorphic forms on adele groups*, Ann. of Math. Studies, n. 83, Princeton Univ. Press,, 1975.
- [H-C 68] Harish-Chandra: *Automorphic forms on semi-simple Lie groups*, Lecture Notes in Math., n. 68, Springer-Verlag, 1968.
- [J-L 70] Jacquet, H.; Langlands, R.P.: *Automorphic Forms on  $\mathbf{GL}(2)$* , Lecture Notes in Math, n. 114, Springer-Verlag, 1970.
- [La75] Lang, S:  $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ , GTM, n. 105, Springer-Verlag, 1975.
- [Lan76] Langlands, R. P.: *On the functional equations satisfied by Eisenstein series*, Lecture Notes in Math, n. 68, Springer-Verlag, 1976.

# Teoria analítica de formes automorfes sobre grups d'ideles lineals

PILAR BAYER

SESSIÓ 2A. DEL DIA 18 DE DESEMBRE DE 1996

## §1. Grups d'ideles: el cas $GL(2)$

Començarem per introduir les nocions més bàsiques a fi de parlar dels punts adèlics de  $\mathbf{GL}(2)$  i d'altres grups algebraics similars.

**1.1. Productes directes restringits.** Sigui  $P$  un conjunt d'índexs. Suposem donats:

$G_{\mathfrak{p}}$  un grup abelià localment compacte, per a cada  $\mathfrak{p} \in P$ ,

$H_{\mathfrak{p}}$  un subgrup obert i compacte de  $G_{\mathfrak{p}}$ , q.p.t.  $\mathfrak{p} \in P$ ,

$S$  un subconjunt finit de  $P$  que conté els  $\mathfrak{p}$  on  $H_{\mathfrak{p}}$  no està definit.

Posem

$$G_S := \prod_{\mathfrak{p} \in S} G_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} H_{\mathfrak{p}}.$$

Amb les dades anteriors, es defineix el grup *producte restringit* dels grups  $G_{\mathfrak{p}}$  en relació amb els subgrups  $H_{\mathfrak{p}}$  com  $G := \varinjlim G_S$ . Farem servir la notació  $G = \prod (G_{\mathfrak{p}} : H_{\mathfrak{p}})$ .

**1.2. Proposició.** *El grup abelià  $G = \prod (G_{\mathfrak{p}} : H_{\mathfrak{p}})$  és localment compacte. Els productes  $N = \prod_{\mathfrak{p}} N_{\mathfrak{p}}$ , on  $N_{\mathfrak{p}}$  és un entorn de l'element neutre de  $G_{\mathfrak{p}}$  i  $N_{\mathfrak{p}} = H_{\mathfrak{p}}$  q.p.t., són una base d'entorns de l'element neutre de  $G$ .*



**1.3. Exemple.** Siguin  $F$  un cos de nombres,  $\mathcal{O}$  el seu anell d'enters,  $P$  el conjunt de les seves places finites i  $P_\infty$  el de les seves places no finites. Per a cada  $\mathfrak{p} \in P \cup P_\infty$ , prenem  $G_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}}$ ; per a cada  $\mathfrak{p} \in P$ , prenem  $H_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ . Aleshores, els elements del grup additiu producte restringit

$$\mathbb{A}_F := \prod (F_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$$

són les adeles del cos  $F$ . En aquest cas,  $\mathbb{A}_F$  té, a més, estructura d'anell topològic. És l'anell de les adeles de  $F$ . Les seves unitats formen el grup multiplicatiu  $\mathbb{A}_F^*$  de les ideles de  $F$ .

**1.4. Exemple.** Siguin  $F$ ,  $P$  i  $P_\infty$  com abans. Sigui  $n \geq 1$  un nombre natural fix. Per a cada  $\mathfrak{p} \in P \cup P_\infty$ , prenem  $G_{\mathfrak{p}} = \mathbf{GL}(n, F_{\mathfrak{p}})$ ; per a cada  $\mathfrak{p} \in P$ , prenem  $H_{\mathfrak{p}} = \mathbf{GL}(n, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}})$ . Aleshores, el producte restringit

$$\mathbf{GL}(n, \mathbb{A}_F) := \prod (\mathbf{GL}(n, F_{\mathfrak{p}}) : \mathbf{GL}(n, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}))$$

és el grup d'ideles del grup lineal  $\mathbf{GL}(n)$  sobre  $F$ . Per a  $n = 1$ , s'obté el grup de les ideles,  $\mathbb{A}_F^*$ . Notem que  $\mathbf{GL}(n)$  és el grup algebraic de les unitats de l'àlgebra de matrius  $M(n)$ .

**1.5. Exemple.** Siguin  $F$ ,  $P$  i  $P_\infty$  com abans. Sigui  $S_0 \subset P \cup P_\infty$  un subconjunt finit de places de  $F$ . Sigui  $G$  un grup connex reductiu definit sobre l'anell dels elements de  $F$  que són enters fora de  $S_0$ . Per a qualsevol subconjunt finit  $S \supseteq S_0$ , posem

$$G(\mathbb{A}_{F,S}) := \prod_{\mathfrak{p} \in S} G(F_{\mathfrak{p}}) \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} G(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}).$$

Aleshores, el producte restringit

$$G(\mathbb{A}_F) := \prod (G(F_{\mathfrak{p}}) : G(\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}))$$

és el grup dels *punts adèlics* del grup  $G$ . O bé, més senzillament, el grup d'ideles de  $G$ . En el capítol següent, veurem exemples concrets d'aquesta situació més general, associats al grup d'unitats d'àlgebres de quaternions  $H = \left( \frac{a, b}{F} \right)$ , definides sobre  $F$ .

**1.6. Lema.**  $F^*$  és un subgrup discret de  $\mathbb{A}_F^*$ .

**1.7. Definició.** El grup quocient  $F^* \backslash \mathbb{A}_F^*$  és el grup de *classes d'ideles* del cos  $F$ .

Designem per  $F_\infty^0$  el component connex de l'element neutre en el producte  $\prod_{\mathfrak{p} \in P_\infty} F_\mathfrak{p}$  de les completacions arquimedianes de  $F$ .

**1.8. Proposició.** *El grup quocient*

$$F^* \backslash \mathbb{A}_F^* / F_\infty^0 \prod_{\mathfrak{p} \in P} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^*$$

*és isomorf al grup de classes d'ideals de  $\mathcal{O}_F$ . Denotem per  $h(F)$  el seu nombre, finit, d'elements; és a dir, el nombre de classes de  $F$ .*

**1.9. Corol·lari.** *Si  $h(F) = 1$ , aleshores*

$$\mathbb{A}_F^* = F^* F_\infty^0 \prod_{\mathfrak{p} \in P} \mathcal{O}_\mathfrak{p}^*.$$

*En particular, per a  $F = \mathbb{Q}$ , obtenim la descomposició*

$$\mathbb{A}_\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^* \mathbb{R}_+^* \prod_p \mathbb{Z}_p^*.$$

La descomposició anterior es coneix amb el nom d'*aproximació forta*.

El teoremes següents generalitzen el resultat d'aproximació forta que acabem de recordar en dimensió 1.

**1.10. Teorema.** (D'aproximació forta: cas  $F = \mathbb{Q}$ ) *Suposem que  $F = \mathbb{Q}$ . Per a cada primer  $p$ , sigui  $K_p$  un subgrup obert de  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$ . Suposem que se satisfan les condicions*

*i)  $K_p = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$ , quasi per a tot  $p \in P \cup \{p_\infty\}$ .*

*ii)  $\det : K_p \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$  és una aplicació exhaustiva quasi per a tot  $p$ .*

*Aleshores se satisfà que*

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{A}_\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Q}) \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}) \prod_p K_p.$$

**1.11. Exemple.** Fixat un enter  $N \geq 1$ , podem prendre

$$K_p = K_p(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{Z}_p) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

El grup  $K_p(N)$  és el grup de congruència local de nivell  $N$ .

**1.12. Teorema.** (D'aproximació forta per a  $\mathbf{GL}(2)$ , cas quadràtic)  *sigui  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ,  $d > 0$ . Supposem que  $h(F)=1$ . Se satisfà que*

$$\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}_F) = \mathbf{GL}(2, F)(\mathbf{GL}^+(2, \mathbb{R}) \times \mathbf{GL}^+(2, \mathbb{R})) \prod_{\mathfrak{p}} \mathbf{GL}(2, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}).$$

**1.13. Notacions.** Posarem, sempre que no es presti a confusió,

$$G_{\mathbb{Q}} = \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}),$$

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}},$$

$$G_{\mathbb{A}} = \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}),$$

$$G_{\infty}^+ = \mathbf{GL}^+(2, \mathbb{R}),$$

$$Z(G_{\mathbb{A}}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{A}^* \right\},$$

$$Z(G_{\mathbb{Q}}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q}^* \right\}.$$

Notem que el quocient  $Z(G_{\mathbb{Q}}) \backslash Z(G_{\mathbb{A}})$  és isomorf al grup de classes d'ideles  $\mathbb{Q}^* \backslash \mathbb{A}^*$ .

**1.14. Lema.**

i) *L'espai homogeni  $G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}$  admet una mesura de Haar invariant per a  $G_{\mathbb{A}}$ .*

ii) *L'espai homogeni  $Z(G_{\mathbb{A}})G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}$  és de mesura finita.*

## §2. Formes automorfes en dimensió 1

En aquesta secció, ens limitem a recordar la definició de Grössencharakter, a fi de preparar el contingut de la secció següent. Considerem el grup unitari,

en dimensió 1,  $U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . D'ara endavant,  $F$  designa un cos de nombres.

**2.1. Definició.** Un Grössencharakter sobre un cos de nombres  $F$  és una representació unitària i irreductible del grup (localment compacte) de les classes d'ideles de  $F$ . És a dir, és un homomorfisme continu

$$\Psi : F^* \backslash \mathbb{A}_F^* \rightarrow U(1).$$

**2.2. Proposició.** *Tot caràcter de Dirichlet*

$$\psi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$

defineix un Grössencharakter de  $\mathbb{Q}$ .

DEMOSTRACIÓ. En efecte, si definim

$$\psi_p : \mathbb{Z}_p^* \longrightarrow (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^*,$$

el producte  $\prod_p \psi_p$  és un caràcter de  $\prod_p \mathbb{Z}_p^*$ . Per tant, és un caràcter de  $\mathbb{A}^*$  que és trivial sobre  $\mathbb{Q}^* \mathbb{R}_+^*$ . En particular, és un caràcter sobre les classes d'ideles, valorat en el grup de les arrels  $N$ -èsimes de la unitat.  $\square$

## §3. Formes automorfes en dimensió 2

La descomposició que mostra la proposició següent ens permetrà interpretar les formes modulars respecte de  $\Gamma_1(N)$  com a certes funcions (formes automorfes) sobre les classes d'ideles,  $G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}$ , en dimensió 2, de  $\mathbb{Q}$ .

**3.1. Proposició.** *Per a cada enter  $N \geq 1$ , se satisfà que*

$$Z(G_{\mathbb{A}})G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}} / \prod_p K_p(N) \mathcal{O}(2, \mathbb{R}) \simeq \Gamma_0(N) \backslash \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathbf{SO}(2).$$

DEMOSTRACIÓ. La demostració s'obté fàcilment a partir de l'isomorfisme

$$G_{\mathbb{Q}} \cap G_{\infty}^+ \prod K_p(N) \simeq \Gamma_0(N)$$

i el teorema d'aproximació forta, que proporciona la igualtat

$$G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{Q}} G_{\infty}^+ \prod_p K_p(N). \square$$

Sigui  $\psi$  un caràcter de Dirichlet definit mod  $(N)$ . L'aplicació

$$\psi_p : K_p(N) \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \psi_p(a)$$

és un caràcter. També denotem per  $\psi$  el caràcter

$$\psi : \prod_p K_p(N) \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \psi = \prod_p \psi_p.$$

Donada una idele  $g \in G_{\mathbb{A}}$ , escrivim

$$g = \gamma g_{\infty} \kappa, \quad \gamma \in G_{\mathbb{Q}}, \quad g_{\infty} \in G_{\infty}^+, \quad \kappa \in \prod_p K_p(N),$$

d'acord amb la descomposició que proporciona el teorema d'aproximació forta.

Sigui  $S(N, k, \psi)$  el  $\mathbb{C}$ -espai vectorial complex format per les formes modulars parabòliques de tipus  $N, k, \psi$ . Donada  $f \in S(N, k, \psi)$ , definim

$$\phi_f(g) = f(g_{\infty}(i)) j(g_{\infty}, i)^{-k} \psi(\kappa),$$

on, si  $g_{\infty} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , aleshores

$$g_{\infty}(i) = \frac{ai+b}{ci+d}, \quad j(g_{\infty}, i) = (ci+d)(\det g_{\infty})^{-1/2}.$$

Recordem la descomposició de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  donada per

$$\mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) = B\mathbf{SO}(2) = N\mathbf{ASO}(2),$$

on  $B$  denota el subgrup de Borel, i  $N$ , el subgrup nilpotent triangular superior. Farem servir la variable  $\theta$  per designar l'argument en els elements de  $\mathbf{SO}(2)$ .

**3.2. Proposició.** *L'aplicació  $f(z) \mapsto \phi_f(g)$  estableix un isomorfisme entre l'espai  $S(N, k, \psi)$  i l'espai vectorial de les funcions complexes,  $\phi$ , definides sobre  $G_{\mathbb{A}}$ , que satisfan les propietats següents:*

i)  $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ , per a tot  $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ .

És a dir,  $\phi$  factoritza segons  $\phi : G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{C}$ .

ii)  $\phi(g\kappa) = \phi(g)\psi(\kappa)$ , per a tot  $\kappa \in \prod K_p(N)$ .

iii)  $\phi(gr_{\theta}) = e^{-i\kappa\theta}\phi(g)$ , si  $r_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ .

iv) La funció  $\phi$  restringida a  $G_{\infty}^+ = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  satisfà l'equació diferencial

$$\Delta \phi = \frac{-k}{2} \left( \frac{k}{2} - 1 \right) \phi,$$

on

$$\Delta := -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - y \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta},$$

és l'operador de Laplace.

Aquesta condició ens diu que  $\phi$  és un vector propi de l'espectre discret de l'operador de Laplace.

v)  $\phi(zg) = \phi(gz) = \psi(z)\phi(g)$ , per a tot  $z \in Z(G_{\mathbb{A}})$ .

vi) La funció  $\phi$  és de creixement lent. És a dir, per a tota constant  $c > 0$  i tot compacte  $\Omega \subset G_{\mathbb{A}}$ , existeixen constants  $C, M$  tals que

$$\phi \left( \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) \leq C |a|^M,$$

per a tot  $g \in \Omega$ ,  $a \in \mathbb{A}^*$ ,  $|a| > c$ .

vii) La funció  $\phi$  és cuspidal. És a dir,

$$\int_{\mathbb{Q} \backslash \mathbb{A}} \phi \left( \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \right) dx = 0, \quad q.p.t. \ g.$$

**3.3. Definició.** Es denota per  $L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \psi)$  l'espai de les funcions  $\phi$  definides sobre  $G_{\mathbb{A}}$ , mesurables, tals que satisfan les condicions següents:

i)  $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ , per a tot  $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ .

ii)  $\phi(gz) = \phi(g)\psi(z)$ , per a tot  $z \in Z(G_{\mathbb{A}})$ .

iii)  $\int_{Z(G_{\mathbb{A}})G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}} |\phi(g)|^2 dg < \infty$ .

**3.4. Proposició.** Si  $f \in S(N, k, \psi)$ , aleshores  $\phi_f \in L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}}, \psi)$ .

DEMOSTRACIÓ. Només cal que comprovem iii). Però, s'obté immediatament a partir de les definicions que

$$\int_{Z(G_{\mathbb{A}})G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}} |\phi_f(g)|^2 dg = \int_{\Gamma_0(N)\backslash \mathbb{H}} |f(z)|^2 y^k \frac{dx dy}{y^2} dg < \infty. \quad \square$$

Ja ho tenim tot a punt a fi de donar la definició de forma automorfa sobre el grup algebraic  $\mathbf{GL}(2)$ .

**3.5. Definició.** Una forma automorfa  $\phi$  sobre  $\mathbf{GL}(2)$  és una funció definida sobre el grup dels seus punts adèlics,  $G_{\mathbb{A}}$ , que satisfà

- i)  $\phi(\gamma g) = \phi(g)$ , per a tot  $\gamma \in G_{\mathbb{Q}}$ .
- ii) Existeix un Grössencharakter  $\psi$  tal que  $\phi(gz) = \phi(zg) = \psi(z)\phi(g)$ , per a tot  $z \in Z_{\mathbb{A}}$ .
- iii)  $\phi$  és  $G_{\infty}^+ \prod_p K_p = \mathbf{GL}^+(2, \mathbb{R}) \prod_p \mathbf{GL}(2, \mathbb{Z}_p)$ -finita.
- iv) Si per  $Z(\mathcal{U})$  denotem el centre de l'àlgebra envoltant universal, la restricció de  $\phi$  a  $G_{\infty}$  és llisa i  $Z(\mathcal{U})$ -finita.
- v)  $\phi$  és una funció de creixement lent.
- vi) Si, a més,

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) dx = 0, \quad \text{q.p.t. } g,$$

aleshores, es diu que  $\phi$  és una forma automorfa cuspidal de caràcter central igual a  $\psi$ .

Denotem per  $A_0(\psi)$  l'espai format per les formes automorfes cuspidals de caràcter central  $\psi$ .

Si denotem per  $L_0^2$  el subespai de  $L^2$  format per les funcions cuspidals, tenim les incusions:

$$S(N, k, \psi) \subseteq A_0(\psi) \subseteq L_0^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \psi) \subseteq L^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}, \psi).$$

Notem que, de fet,

$$S(N, k, \psi) \subseteq L_0^2(G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}} / \prod_p K_p(N), \psi).$$

## §4. Sèries de Poincaré

En aquesta secció introduïm certes formes automorfes per a  $\mathbf{GL}(2)$ , algunes de les quals, que no són cuspidals, provenen de l'espectre continu de l'operador de Laplace.

Sigui  $\Gamma$  un subgrup d'índex finit de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$  i sigui  $\Gamma_\infty$  el subgrup cíclic, infinit, generat per la mínima translació  $z \rightarrow z + h$  continguda en  $\Gamma$ . Per a cada parell d'enters  $k > 0$ ,  $\nu \geq 0$ , la *sèrie de Poincaré* de pes  $k$  i caràcter  $\nu$  es defineix per

$$\phi_\nu(z) = \sum_{\gamma} e^{2\pi i \nu \frac{\gamma(z)}{h}} (cz + d)^{-2k},$$

on  $\gamma$  recorre un sistema de representants  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\Gamma_\infty \backslash \Gamma$ .

### 4.1. Proposició.

- i) La sèrie anterior convergeix absolutament i uniformement sobre els compactes del semiplà superior de Poincaré.
- ii) La sèrie de Poincaré de pes  $k$  és una forma automorfa respecte de  $\Gamma$  de pes  $2k$ .
- iii)  $\phi_\nu(z)$  és una forma automorfa cuspidal si, i només si,  $\nu \geq 1$ .
- iv) Per a  $\nu \geq 1$ , les sèries de Poincaré de pes  $2k$  generen l'espai vectorial  $S(\Gamma, 2k)$  de totes les formes automorfes cuspidals de pes  $2k$  respecte de  $\Gamma$ .

### 4.2. Proposició. Si $\Gamma = \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ , considerem la sèrie

$$\phi_0(z) = \sum_{c,d} (cz + d)^{-2k},$$

on la suma s'estén a tots els parells  $(c, d) \neq (0, 0)$ . La funció

$$E_k(z) := \frac{1}{2\zeta(2k)} \phi_0(z),$$

on  $\zeta$  denota la funció zeta de Riemann, és una forma modular de pes  $2k$  per a  $\Gamma$ .



La funció  $E_k(z)$  s'anomena la sèrie d'Eisenstein normalitzada. El seu desenvolupament en sèrie de Fourier ve donat per

$$E_k(z) = 1 + \frac{(-1)^k 4k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e^{2\pi i n z},$$

on  $B_k$  denota el  $k$ -èsim nombre de Bernoulli.

## §5. Sèries d'Eisenstein

Tot seguit, volem presentar les sèries d'Eisenstein des del punt de vista de la teoria de les formes automorfes sobre  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ .

Sigui

$$Z_{\infty}^+ := \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

De moment ens és més convenient treballar a  $L^2(X)$ , on

$$X := Z_{\infty}^+ \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}),$$

que fer-ho a  $L^2(\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}))$ .

Fixem les notacions següents:

$A$  el subgrup de les matrius diagonals de  $\mathbf{GL}(2)$ ,

$B$  el subgrup de les matrius triangulars superiors de  $\mathbf{GL}(2)$ ,

$N$  el subgrup nilpotent triangular superior de  $\mathbf{GL}(2)$ ,

$K = \prod K_p$  subgrup compacte maximal de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ .

Se satisfà que

$$\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}) = B(\mathbb{A})K = N(\mathbb{A})A(\mathbb{A})K.$$

Com a mesura de Haar de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ , prenem la seva mesura de Tamagawa. En els subgrups discrets de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ , hi posem la mesura que assigna a cada punt el valor 1. A  $Z_{\infty}^+$ , hi posem la mesura que prové de la mesura euclidiana de  $\mathbb{R}_+^*$ . D'aquesta manera, determinem una mesura a

$$\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})^1 := Z_{\infty}^+ \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}).$$

L'elecció de les mesures anteriors determina una mesura a  $X$  que és invariant per l'acció del grup  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ .

**5.1. Definició.** L'espai  $X = Z_{\infty}^+ \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$  és de mesura total finita. El seu valor és l'anomenat *nombre de Tamagawa* de  $\mathbf{GL}(2)$ .

De manera semblant, s'assignen mesures, de manera unívoca, als grups idèlics  $A(\mathbb{A})$ ,  $N(\mathbb{A})$ , al grup

$$A_{\infty}^+ := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in A_{\infty} \mid a_i > 0 \right\},$$

així com també a

$$A(\mathbb{A})^1 := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \in A(\mathbb{A}) \mid |a_i| = 1 \right\} = A_{\infty}^+ \backslash A(\mathbb{A}).$$

Passem ara a definir dues mesures en el subgrup de Borel idèlic  $B(\mathbb{A})$ . Les descomposicions

$$B(\mathbb{A}) = A(\mathbb{A})N(\mathbb{A}) = N(\mathbb{A})A(\mathbb{A})$$

permeten definir en el grup  $B(\mathbb{A})$  mesures de Haar  $d_{\ell}$ , respectivament  $d_r$ , que són invariants per l'esquerra, i per la dreta, respectivament. El lema següent posa de manifest que  $B(\mathbb{A})$  no és un grup unimodular, car  $d_r \neq d_{\ell}$ .

**5.2. Lema.**

*i) Se satisfà que  $d_r b = \delta_B(b) d_{\ell} b$ , on*

$$\delta_B(b) := |a_1/a_2|$$

$$\text{per } a b = \begin{pmatrix} a_1 & n \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

*ii) Existeix una constant  $\kappa = \kappa(\mathbf{GL}(2))$  tal que*

$$\int_{\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})} f(x) dx = \kappa \int_{B(\mathbb{A})} \int_K f(bk) \delta_B(b)^{-1} d_r b dk.$$

Tot seguit, fixem l'isomorfisme de  $\mathbb{R}$  en un subgrup  $T$  de  $A_{\infty}^+$  donat per

$$t \mapsto h_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

A partir de la descomposició  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A}) = N(\mathbb{A})A(\mathbb{A})^1 \mathbb{R}KZ_\infty^+$ , escrivim

$$x = nah_t k z.$$

Atès que el nombre  $t$  està unívocament determinat per  $x$ , el denotem  $H(x)$ .

**5.3. Proposició.** *De les descomposicions anteriors, en resulta la fórmula d'integració*

$$\int_{Z_\infty^+ \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A})} f(x) dx = \kappa \int_{N(\mathbb{A})} \int_{A(\mathbb{A})^1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_K f(nah_t k) e^{-2t} dn da dt dk.$$

**5.4. Definició.** Suposem que  $f$  és una funció complexa contínua definida a  $Z_\infty^+ \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ . El seu *terme constant* és la funció

$$f^0(x) = \int_{N(\mathbb{Q}) \backslash N(\mathbb{A})} f(nx) dn.$$

Per tant,  $f$  és una *forma cuspidal* si, i només si, el seu terme constant és zero gairebé per tot.

**5.5. Definició.** Denotem per  $R(g)$  la representació natural, unitària, de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$  en l'espai  $L^2(Z_\infty^+ \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}))$ .

Prenem en consideració el subgrup de  $B(\mathbb{A})$ ,  $\mathcal{T} := N(\mathbb{A})A(\mathbb{Q})A_\infty^+$ . Per a cada  $z \in \mathbb{C}$ , considerem el caràcter de  $\mathcal{T}$ :

$$b = \begin{pmatrix} a_1 & u \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mapsto e^{zH(b)} = |a_1/a_2|^{z/2}.$$

Considerem l'espai de les funcions mesurables sobre  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$

$$\mathcal{H}(z) := \left\{ \phi \mid \int_K |\phi(k)|^2 dk < \infty, \phi(nag) = e^{(z+1)H(na)} \phi(g) \right\}.$$

L'espai  $\mathcal{H}(z)$  és un espai de Hilbert. El dotem de l'estructura de  $\mathcal{T}$ -mòdul definida per

$$R(na, z)\phi(g) = \left| \frac{a_1}{a_2} \right|^{(z+1/2)} \phi(g),$$

per a tot  $na \in \mathcal{T}$ .

La fórmula següent defineix una representació complexa del grup idèlic  $Z_\infty^+ \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ ,

$$R(x, z) := \text{Ind}_{N(\mathbb{A})A(\mathbb{Q})A_\infty^+}^{\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})} e^{zH(b)}.$$

Volem tot seguit identificar un espai per a la representació anterior. Designem per  $\mathcal{H}$  l'espai de les funcions mesurables sobre

$$N(\mathbb{A})A(\mathbb{Q})A_\infty^+ \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}) = \mathcal{T} \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}),$$

dotat de l'estructura de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ -mòdul definida per

$$R'(x, z)\phi(g) = e^{(z+1)H(gx)}\phi(gx)e^{-(z+1)H(x)}\phi(g),$$

per a tot  $x \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ .

### 5.6. Proposició.

- i) Per a cada  $z \in \mathbb{C}$ , les representacions  $R(x, z)$  i  $R'(x, z)$  són equivalents. L'operador que permet passar d'una representació a l'altra ve donat per

$$I(z) : \phi(g) \rightarrow \phi(g)e^{-(z+1)H(g)}.$$

- ii) L'operador adjunt de  $R(x, z)$  és  $R(x^{-1}, -\bar{z})$ . Per tant,  $R(x, z)$  és un operador unitari per a  $\text{Re}(z) = 0$ .

**5.7. Definició.** Sigui  $\tau$  una representació irreductible de  $K$ . Una funció  $\phi \in C^\infty(\mathcal{T} \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}))$  es diu que és de tipus  $\tau$  si, per a tot  $x \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ , la funció  $\phi(xk)$  està continguda en el subespai de  $L^2(K)$  en el qual la representació regular és equivalent a  $\tau$ . Aquest espai, que és de dimensió finita, el designem per  $\mathcal{H}(\tau)$ .

**5.8. Proposició.** En descompondre la representació regular de  $K$ , s'obté que  $\mathcal{H} = \oplus_\tau \mathcal{H}(\tau)$ , i els espais  $\mathcal{H}(\tau)$  són de dimensió finita.

Veurem que les sèries d'Eisenstein proporcionen una aplicació de l'espai  $\mathcal{H}$  de la representació  $R(x, z)$  en un espai de formes automorfes per a  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ . Per a tal fi, considerem una funció auxiliar. Per a cada  $\phi \in \mathcal{H}(\tau)$ ,

definim  $(I^{-1}(z)\phi)(g) := \phi(x)e^{(z+1)H(g)}$ . És fàcil veure que aquesta funció és de  $\mathcal{H}(\tau)$ , amb la qual cosa tenim controlada la seva fórmula de transformació.

**5.9. Definició.** Sigui  $\phi \in \mathcal{H}(\tau)$ . Definim la *sèrie d'Eisenstein* associada a  $\phi$  segons

$$E(g, \phi, z) := \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} (I^{-1}(z)\phi)(\gamma g) = \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{Q})} \phi(\gamma g) e^{(z+1)H(\gamma g)}.$$

**5.10. Observació.** Quan  $\phi \equiv 1$ ,  $g = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  és una matriu real, i  $y > 0$ , es té que  $E(g, \phi, z) = E(x + iy, z)$  és la sèrie d'Eisenstein que hem considerat al començament.

**5.11. Teorema.** (Selberg-Langlands)

i)  $E(x, \phi, z)$  és una forma automorfa per a  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ .

ii) El seu terme constant ve donat per

$$E^0(x, \phi, z) = \phi(x)e^{(z+1)H(x)} + M(z)\phi(x)e^{(-z+1)H(x)},$$

on  $M(z)$  és una funció analítica, unívocament determinada, que depèn de  $(\tau)$ , i que aplica el semiplà definit per  $\operatorname{Re}(z) > 1$  en l'espai d'operadors lineals sobre  $\tau$ .

iii) L'operador adjunt de  $M(z)$  és  $M(\bar{z})$ .

iv) Les funcions  $E(x, \phi, z)$  i  $M(z)$  admeten una prolongació analítica en funcions meromorfs del pla complex. L'únic pol possible a la dreta de  $i\mathbb{R}$  és simple; es presenta en el punt  $z = 1$ , alhora per a  $E(x, \phi, z)$  i per a  $M(z)\phi$ .

v) La funció  $E(x, \phi, z)$  és de creixement lent per a  $\operatorname{Re}(z) = 0$ .

vi) Se satisfan les equacions funcionals

$$M(z)M(-z)\phi = \phi,$$

$$E(x, M(z)\phi, -z) = E(x, \phi, z).$$

**5.12. Proposició.** *Si  $\tau$  és trivial, aleshores  $M(z) = \xi(z)/\xi(z+1)$ , on  $\xi(z) = \pi^{-z/2}\Gamma(z/2)\zeta(z)$ .*

## §6. Sèries d'Eisenstein i representacions

Sigui  $R(g)$  la representació natural del grup idèlic  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$  en l'espai de Hilbert

$$L^2(\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A})).$$

Tenim la suma directa hilbertiana

$$L^2(\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A})) = \int L^2(\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}), \psi) d\psi,$$

on la integral s'estén a tots els caràcters del centre de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$  que són trivials sobre  $\mathbb{Q}^*$ . Denotem per  $R^\psi(g)$  la subrepresentació que resulta de l'acció de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$  en l'espai

$$L^2(\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) \backslash \mathbf{GL}(2, \mathbb{A}), \psi).$$

Es presenta el problema de descompondre cadascuna de les subrepresentacions  $R^\psi(g)$  en suma de representacions irreductibles. Aquesta suma consta de dues parts: la part discreta, proporcionada essencialment per les formes parabòliques, i la part contínua, proporcionada per les sèries d'Eisenstein.

**6.1. Proposició.** *L'aplicació  $\phi \rightarrow E(x, \phi, z)$  de  $\mathcal{H}$  en el corresponent espai de formes automorfes commuta amb l'acció de  $\mathbf{GL}(2, \mathbb{A})$ . És a dir, se satisfà que*

$$E(x, R(g, z)\phi, z) = R(g)E(x, \phi, z),$$

on  $R(g)$  denota la representació regular.

Podem enunciar ara l'important

**6.2. Teorema.** *Sigui  $R_0$  la restricció de  $R$  al subespai de formes parabòliques. Sigui  $R^+$  la restricció de  $R$  al subespai  $\oplus_\chi \mathbb{C}d_\chi$ , on  $\chi$  recorre el*

*conjunt dels Grössencharakteren de  $\mathbb{Q}$  de quadrat trivial sobre  $\mathbb{R}_+^*$  i  $d_\chi(g) = \chi(\det(g))$ . Aleshores,*

$$R(x) = R_0(x) \oplus R^+(x) \oplus \int_0^\infty R(x, it) dt.$$

**6.3. Observació.** El teorema anterior permet descriure l'espectre continu de  $L^2(\Gamma \backslash \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}))$  per als subgrups de congruència  $\Gamma$  de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ .

**6.4. Exemple.** Considerem la representació de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$  induïda pel caràcter

$$\begin{pmatrix} a & u \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \rightarrow |a|^{is}.$$

Sigui  $H(s)$  l'espai d'aquesta representació. Aquesta és una representació de la sèrie principal. Suposem, per simplificar, que  $\Gamma = \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$ . El teorema anterior aplicat a aquest cas, s'escriu

$$L^2(\Gamma, \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})) = L_0^2(\Gamma, \mathbf{SL}(2, \mathbb{R})) \oplus C \oplus \int_0^\infty H(s) ds,$$

on  $C$  denota el subespai de  $L^2$  generat per les constants.

La demostració del teorema és força difícil. El principal problema en la prova prové del fet que les sèries d'Eisenstein  $E(x, \phi, z)$  no són de quadrat integrable. En conseqüència, cal definir transformades de Fourier de manera escaient.

# Bibliografia

- [Ge75] Gelbart, S.S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton, 1975.
- [Ja-La70] Jacquet, H.; Langlands R.P.: *Automorphic Forms on  $\mathbf{GL}(2)$* , LNM, n. 114, 1970.
- [Shi72] Shimizu, H.: Theta series and automorphic forms on  $\mathbf{GL}_2$ , *J. Math. Soc. Japan* **24** (1972), 638–683.



# Teoria analítica de formes automorfes sobre grups d'ideles quaterniònics

PILAR BAYER

SESSIÓ 1A. I 2A. DEL DIA 15 DE GENER DE 1997

## §1. Aritmètica d'àlgebres de quaternions

Abans d'introduir les formes automorfes associades a àlgebres de quaternions, farem un breu repàs d'alguns dels conceptes més necessaris, relatius a l'aritmètica d'aquests objectes.

Suposem que  $\mathcal{O}$  és un anell de Dedekind i que  $F$  és el seu cos de fraccions. Donats dos elements  $a, b \in F^*$ , denotem per  $H = \left(\frac{a, b}{F}\right)$  la  $F$ -àlgebra de base  $\{1, i, j, k\}$  on els elements  $i, j \in H$  satisfan

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji.$$

$H$  s'anomena l'àlgebra de quaternions sobre  $F$  associada al parell  $\{a, b\}$ . Denotem per  $\text{Tr}, \text{Nr}$  la traça i la norma reduïdes, respectivament.

Per a cada plaça  $\mathfrak{p}$  de  $F$ , sigui

$$H_{\mathfrak{p}} := F_{\mathfrak{p}} \otimes_F H.$$

Es diu que  $\mathfrak{p}$  *ramifica* a  $H$  quan  $H_{\mathfrak{p}}$  és un cos, no commutatiu. Es diu que  $\mathfrak{p}$  *descompon* a  $H$  quan  $H_{\mathfrak{p}} \simeq M(2, F_{\mathfrak{p}})$ ; és a dir, és isomorfa a l'àlgebra de matrius  $2 \times 2$  sobre  $F_{\mathfrak{p}}$ . Per definició, el *discriminant reduït*,  $D = d(H)$ , és l'ideal de  $\mathcal{O}$  que s'obté com a producte de tots els ideals primers de  $F$  on  $H$  ramifica.

Suposem que  $F$  és un cos de nombres. Una àlgebra de quaternions  $H$  sobre  $F$  es diu que és *indefinida* si existeix almenys una plaça  $\mathfrak{p}_\infty \in P_\infty$  en la qual  $H$  és no ramificada. Quan això sigui així, considerarem fixat un isomorfisme  $H_{\mathfrak{p}_\infty} \simeq M(2, \mathbb{R})$ . En el cas contrari,  $H$  es diu que és *totalment definida*.

### 1.1. Xarxes i ordres

Una  $\mathcal{O}$ -xarxa  $L$  de  $H$  és un  $\mathcal{O}$ -submòdul de  $H$  finitament generat tal que  $F \otimes_{\mathcal{O}} L = H$ .

Un  $\mathcal{O}$ -ordre  $\Lambda$  de  $H$  és una  $\mathcal{O}$ -xarxa que, a més, és un subanell de  $H$ .

Siguin  $\Lambda$  un ordre de  $H$  i  $L$  una  $\mathcal{O}$ -xarxa. Si  $L \otimes \Lambda \subseteq L$ , es diu que  $L$  és un  $\Lambda$ -ideal per la dreta. Si  $\Lambda \otimes L \subseteq L$ , es diu que  $L$  és un  $\Lambda$ -ideal per l'esquerra. Si una xarxa és, a la vegada, un  $\Lambda$ -ideal per la dreta i per l'esquerra, es diu que és un  $\Lambda$ -ideal bilateral.

Els ideals bilaterals dels ordres formen un grup lliure generat pels ideals primers.

Un ideal  $L$  d'un ordre  $\Lambda$  (per l'esquerra, per la dreta, o bé bilateral) es diu que és *enter* quan  $L \subseteq \Lambda$ .

Dos ideals per la dreta  $L, L'$  de  $\Lambda$  es diu que són equivalents, si existeix un element  $\delta \in \Lambda$  tal que  $\delta L = L'$ . Dos ideals per l'esquerra  $L, L'$  de  $\Lambda$  es diu que són equivalents, si existeix un element  $\delta \in \Lambda$  tal que  $L\delta = L'$ .

Els ideals dels ordres maximals són localment principals. El grup dels ideals bilaterals està generat pels ideals de  $\mathcal{O}$  i els ideals bilaterals de  $\Lambda$  de norma reduïda  $\mathfrak{p}$ , quan  $\mathfrak{p}$  descriu el conjunt dels ideals primers de  $\mathcal{O}$  que ramifiquen a  $H$ .

Donada una  $\mathcal{O}$ -xarxa  $L$  de  $H$ , es defineix la *xarxa dual*

$$L^\sharp := \{x \in H \mid \text{Tr}(xL) \subseteq \mathcal{O}\}.$$

Si  $L$  és un ideal d'un ordre  $\Lambda$ , el seu dual  $L^\sharp$  és un ideal bilateral.

Donat un ordre  $\Lambda$ , l'ideal  $(\Lambda^\sharp)^{-1}$  s'anomena la *diferent* de  $\Lambda$ . L'ideal de  $\mathcal{O}$  donat per

$$d(\Lambda) = \text{Nr}(\Lambda^\sharp)^{-1}$$

s'anomena el *discriminant reduït* de  $\Lambda$ . El nivell  $N(\Lambda)$  és, per definició, l'ideal de  $\mathcal{O}$  donat per la igualtat

$$d(\Lambda) = d(H)N(\Lambda).$$

Si  $\Lambda$  és un  $\mathcal{O}$ -mòdul lliure de base  $u_i$ , aleshores

$$d(\Lambda)^2 = \mathcal{O}(\det \text{Tr}(u_i u_j)).$$

Si  $\Lambda$  és un ordre maximal de  $H$ , el discriminant reduït de  $H$ ,  $d(H)$ , pot identificar-se amb l'ideal de  $\mathcal{O}$  generat per les normes reduïdes dels elements de  $\Lambda^{\sharp-1}$ . És a dir,  $d(H) = \text{Nr}(\Lambda^{\sharp-1}) = d(\Lambda)$ . Per tant, els ordres maximals són de nivell 1.

Suposem que  $F$  és un cos de nombres i que  $\mathcal{O}_F$  és el seu anell d'enters. El *discriminant* (no reduït) de  $H$  es defineix per la fórmula

$$\delta(H) := D(F)^4 N_{F/\mathbb{Q}} d(H)^2.$$

Per tant, si  $F = \mathbb{Q}$ , aleshores  $\delta(H) = d(H)^2$ ; és a dir, el discriminant no reduït és igual al quadrat del discriminant reduït de l'àlgebra de quaternions.

Un ordre  $\Lambda$  de  $H$  es diu que és d'Eichler si és igual a la intersecció de dos ordres maximals.

Sovint, en les aplicacions, cal considerar anells més grans que l'anell  $\mathcal{O}_F$ . Per a certs resultats cal treballar amb els elements de  $F$  que són enters fora d'un conjunt finit de places  $S$  del cos  $F$ .

**1.2. Definició.** Un subconjunt finit  $S$  de places de  $F$  es diu que satisfà la condició d'Eichler quan conté, almenys, una plaça de  $F$  que és no ramificada a l'àlgebra  $H$ .

En les definicions i propietats que segueixen, suposem, si cal, que  $\mathcal{O}$  és el subanell de  $F$  format pels elements enters fora d'un conjunt  $S$  que satisfà la condició d'Eichler. Sovint va bé de pensar que  $\infty \in S$ .

**1.3. Definicions.** Dos  $\mathcal{O}$ -ordres  $\Lambda, \Lambda'$  de  $H$  es diu que són conjugats quan existeix un element  $\alpha \in H^*(F)$  tal que  $\Lambda' = \alpha \Lambda \alpha^{-1}$ . A [Vi 80] i a [Pi 73] es diu, en aquest cas, que  $\Lambda$  i  $\Lambda'$  són del mateix *tipus*.

Suposem que  $H$  és una àlgebra de quaternions totalment definida sobre un cos de nombres totalment real  $F$ . A [Pi73] es troben fórmules per al càlcul del nombre de tipus d'ordres d'Eichler continguts a  $H$ , d'un nivell donat.

Si  $H$  és indefinida i  $F = \mathbb{Q}$ , tots els ordres d'Eichler de nivell  $N$  donat són conjugats.

Dos  $\mathcal{O}$ -ordres  $\Lambda, \Lambda'$  de  $H$  es diu que són isomorfs quan ho són com a  $\mathcal{O}$ -àlgebres.

A [Pi76], es consideren àlgebres de quaternions definides, sobre el cos dels racionals, i s'hi donen fórmules per al nombre de classes d'isomorfia d'ordres d'Eichler d'un nivell donat. (En aquest treball, es diu que dos ordres d'Eichler, amb el mateix nivell, són del mateix *tipus* quan són isomorfs.)

Dos  $\mathcal{O}$ -ordres  $\Lambda, \Lambda'$  de  $H$  es diu que pertanyen al mateix gènere quan les  $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ -àlgebres  $\Lambda_{\mathfrak{p}}, \Lambda'_{\mathfrak{p}}$  són isomorfs per a tot  $\mathfrak{p} \in P \cup P_{\infty}$ . Aquesta definició és la donada a [Kö87, p.196].

Suposem que  $H$  és totalment definida i  $F$  és totalment real. En el treball [Kö87, p.196], es defineix el *nombre de tipus*  $t(\Lambda)$  d'un ordre  $\Lambda$  com el nombre de classes d'isomorfia contingudes en el gènere que  $\Lambda$  individua.

Donada una forma quadràtica ternària  $Q$  amb coeficients enters, la seva (segona) àlgebra de Clifford  $C(Q)$  és una àlgebra de quaternions sobre  $\mathbb{Q}$ . A la forma en qüestió se li pot associar un ordre  $\Lambda = \Lambda(Q)$  de  $C(Q)$ . El nivell de  $\Lambda(Q)$  coincideix amb el nivell, en el sentit de Hecke, de la seva forma nòrmica. Aquesta propietat caracteritza, a més, tots els ordres associats a formes quadràtiques ternàries.  $C(Q)$  és definida si, i només si, la forma ternària de partida és definida positiva. En el cas definit, el nombre de tipus  $t(\Lambda)$  és igual al nombre de classes contingudes en el gènere de la forma quadràtica ternària (cf. [Pe69], [Kö87]).

## §2. Grups idèlics associats a àlgebres de quaternions

El grup multiplicatiu  $H^*$  és un grup algebraic reductiu sobre l'anell dels elements de  $F$  que són enters fora del discriminant  $D(H)$ . Podem considerar

el grup dels seus punts adèlics,  $H^*(\mathbb{A}_F)$ , així com també el grup dels seus punts racionals,  $H^*(F)$ . Aquest grup coincideix amb el grup multiplicatiu  $H \setminus \{0\}$ . Amb una mica més de precisió, caldria escriure  $H^*(\mathbb{A}_{F,D})$ . Notem que  $H^* = \mathbf{GL}(1, H)$ . De manera més general, també podríem considerar els grups algebraics  $\mathbf{GL}(m, H)$ .

### 2.1. Teorema.

i) El grup  $H^*(F)$  és un subgrup discret de  $H^*(\mathbb{A}_F)$ .

ii) L'espai homogeni

$$H^*(F) \backslash H^*(\mathbb{A}_F),$$

de les classes per la dreta d'ideles de  $H^*$ , és compacte si, i només si,  $H$  és una àlgebra de quaternions definida.

iii) L'espai homogeni

$$Z_\infty^+ H^*(F) \backslash H^*(\mathbb{A}_F)$$

admet una mesura finita que és  $H^*(\mathbb{A}_F)$ -invariant.

iv) L'espai homogeni

$$Z(\mathbb{A}_F) H^*(F) \backslash H^*(\mathbb{A}_F)$$

és compacte.

En el teorema,  $Z$  denota el centre de  $H^*$ . Recordem la notació

$$Z_\infty^+ := \left\{ \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

El lema elemental següent és útil a l'hora d'establir teoremes de finitud.

**2.2. Lema.** *Sigui  $G$  un grup localment compacte. Siguin  $D$  un subgrup discret i  $B$  un subgrup compacte de  $G$ . Aleshores, el conjunt de classes dobles  $D \backslash G / B$  és finit si, i només si, l'espai homogeni  $D \backslash G$  és compacte.*

En el que segueix, volem aclarir el concepte de *forma automorfa* respecte del grup  $H^* = \mathbf{GL}(1, H)$ . Més endavant posarem de manifest que, quan  $F$  és un cos de nombres, certes d'aquestes formes automorfes s'identifiquen amb formes automorfes respecte de  $\mathbf{GL}(2)$ .

**2.3. Subgrups compactes maximals.** Suposem que  $H$  és una àlgebra de quaternions sobre un cos de nombres  $F$ . Per a cada plaça  $\mathfrak{p}$  de  $F$  no ramificada a  $H$ , volem fixar un isomorfisme

$$\theta_{\mathfrak{p}} : H_{\mathfrak{p}} \rightarrow M(2, F_{\mathfrak{p}}).$$

Per a tal fi, escollim un ordre maximal  $\Lambda$  de  $H$ . Sigui  $\Lambda_{\mathfrak{p}} := \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \otimes \Lambda$ . Escollim  $\theta_{\mathfrak{p}}$  de manera que  $\theta_{\mathfrak{p}}(\Lambda_{\mathfrak{p}}) = M(2, \Lambda_{\mathfrak{p}})$ . L'elecció anterior permet la identificació  $H_{\mathfrak{p}}^* = \mathbf{GL}(2, F_{\mathfrak{p}})$ . Definim  $K_{\mathfrak{p}}$  per la condició

$$\theta_{\mathfrak{p}}(K_{\mathfrak{p}}) = \mathbf{GL}(2, \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}).$$

$K_{\mathfrak{p}}$  és aleshores un subgrup compacte maximal de  $H_{\mathfrak{p}}^*$ .

Si  $\mathfrak{p}$  és una plaça de  $F$  ramificada a  $H$ , l'àlgebra de quaternions  $H_{\mathfrak{p}}$  té un únic ordre maximal,

$$\Lambda_{\mathfrak{p}} = \{x \in H_{\mathfrak{p}} \mid |\mathrm{Nr}(x)|_{\mathfrak{p}} \leq 1\}.$$

El subgrup

$$K_{\mathfrak{p}} := \{x \in H_{\mathfrak{p}} \mid |\mathrm{Nr}(x)|_{\mathfrak{p}} = 1\}$$

és un subgrup compacte maximal de  $H_{\mathfrak{p}}^*$ .

Globalment, considerarem el subconjunt compacte de  $H^*(\mathbb{A}_F)$

$$K := \prod_{\mathfrak{p} \in P} K_{\mathfrak{p}}.$$

**2.4. Àlgebres de Hecke locals i l'àlgebra de Hecke global.** Donada una plaça  $\mathfrak{p}$  de  $F$  no ramificada a  $H$ , definim l'àlgebra de Hecke

$$\mathcal{H}(H_{\mathfrak{p}}^*)$$

com l'antiimatge per  $\theta_{\mathfrak{p}}$  de l'àlgebra de Hecke de  $\mathbf{GL}(2, F_{\mathfrak{p}})$ .

Donada una plaça  $\mathfrak{p}$  de  $F$  ramificada a  $H$ , definim l'àlgebra de Hecke  $\mathcal{H}(H_{\mathfrak{p}}^*)$  com l'àlgebra de les funcions complexes localment constants i amb suport compacte definides a  $H_{\mathfrak{p}}^*$ .

Sigui  $\mathcal{H}(H^*(\mathbb{A}_F))$  l'espai complex generat per totes les funcions  $\otimes f_{\mathfrak{p}}$ , per a  $f_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{H}(H_{\mathfrak{p}}^*)$  i on  $f_{\mathfrak{p}}$  és la funció característica de  $K_{\mathfrak{p}}$  q.p.t. L'espai

$\mathcal{H}(H^*(\mathbb{A}_F))$  té, de fet, estructura d'àlgebra sobre  $\mathbb{C}$ .  $\mathcal{H}(\mathbb{H}^*(\mathbb{A}_F))$  és l'àlgebra de Hecke global de  $H^*$ . Pot interpretar-se com una àlgebra de mesures, amb suport compacte, definides sobre  $H^*(\mathbb{A}_F)$ .

Si  $\phi$  és una funció contínua sobre  $H^*(\mathbb{A}_F)$  i  $\mu \in \mathcal{H}(H^*(\mathbb{A}_F))$ , es defineix

$$\rho(\mu)\phi(h) = \int \phi(hg)d\mu(g).$$

En particular, si un element  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{H}^*(\mathbb{A}_F))$  és de la forma  $\otimes f_p$ , i s'identifica amb la funció  $f(g) = \prod f_p(g_p)$  definida sobre  $H^*(\mathbb{A}_F)$ , aleshores

$$\rho(f)\phi(h) = \int \phi(hg)f(g)dg.$$

**2.5. Diccionari adèlic.** En el que segueix,  $\Lambda$  denota un ordre maximal, o bé un ordre d'Eichler d'una àlgebra de quaternions  $H$  sobre un cos de nombres  $F$ . Quan parlem d'ideals els suposarem sempre localment principals. En molts casos, però, les mateixes consideracions es podrien fer per a ordres més generals, sempre que els ideals que es consideressin fossin localment principals. (Un anell es diu que és hereditari quan tots els seus ideals són localment principals.)

Donat un ordre  $\Lambda$ , denotem per  $\Lambda^*(\mathbb{A}_F)$  el grup dels punts adèlics del seu grup multiplicatiu  $\Lambda^*$ . És el grup de les unitats de  $\mathbb{A}_F \otimes \Lambda$ . Denotem per  $W(\Lambda^*(\mathbb{A}_F))$  el normalitzador de  $\Lambda^*(\mathbb{A}_F)$  en  $H^*(\mathbb{A}_F)$ .

**2.6. Lema.** (cf. [Vi 80 p. 87])

i) *El conjunt dels ideals per l'esquerra d'un ordre maximal  $\Lambda$ , o bé d'un ordre d'Eichler, està en correspondència bijectiva amb el conjunt*

$$\Lambda^*(\mathbb{A}_F) \backslash H^*(\mathbb{A}_F).$$

ii) *El conjunt dels ideals per la dreta d'un ordre maximal  $\Lambda$ , o bé d'un ordre d'Eichler, està en correspondència bijectiva amb el conjunt*

$$H^*(\mathbb{A}_F) / \Lambda^*(\mathbb{A}_F).$$

iii) *El conjunt dels ideals bilaterals d'un ordre maximal  $\Lambda$ , o bé d'un ordre d'Eichler, està en correspondència bijectiva amb el conjunt*

$$W(\Lambda^*(\mathbb{A}_F)) / \Lambda^*(\mathbb{A}_F).$$

- iv) Fixem un ordre d'Eichler  $\Lambda$  de nivell  $N$ . El conjunt dels ordres d'Eichler de nivell  $N$  de  $H$  està en correspondència bijectiva amb el conjunt

$$H^*(\mathbb{A}_F)/W(\Lambda^*(\mathbb{A}_F)).$$

- v) Fixem un ordre d'Eichler  $\Lambda$  de nivell  $N$ . El conjunt de tipus d'ordres d'Eichler de nivell  $N$  de  $H$  està en correspondència bijectiva amb el conjunt

$$H^*(F)\backslash H^*(\mathbb{A}_F)/W(\Lambda^*(\mathbb{A}_F)).$$

- vi) El conjunt de classes d'ideals per l'esquerra d'un ordre maximal  $\Lambda$ , o bé d'un ordre d'Eichler, està en correspondència bijectiva amb el conjunt

$$\Lambda^*(\mathbb{A}_F)\backslash H^*(\mathbb{A}_F)/H^*(F).$$

- vii) El conjunt de classes d'ideals per la dreta d'un ordre maximal  $\Lambda$ , o bé d'un ordre d'Eichler, està en correspondència bijectiva amb el conjunt

$$H^*(F)\backslash H^*(\mathbb{A}_F)/\Lambda^*(\mathbb{A}_F).$$

- viii) El conjunt de classes d'ideals bilaterals d'un ordre maximal  $\Lambda$ , o bé d'Eichler, està en correspondència bijectiva amb el conjunt

$$H^*(F) \cap W(\Lambda^*(\mathbb{A}_F)) \backslash W(\Lambda^*(\mathbb{A}_F)) / \Lambda^*(\mathbb{A}_F).$$

DEMOSTRACIÓ. El subgrup de  $H^*(\mathbb{A}_F)$  format per les adeles  $x$  tals que  $x_{\mathfrak{p}}$  és una unitat de  $\Lambda_{\mathfrak{p}}$  per a tot  $\mathfrak{p}$  finit és, precisament,  $H^*_{\infty} \prod_{\mathfrak{p} \in P} K_{\mathfrak{p}}$ . D'altra banda, per a cada  $x \in H^*(\mathbb{A}_F)$ , existeix un ideal per l'esquerra de  $\Lambda$ , unívocament determinat,  $L$ , tal que  $L_{\mathfrak{p}} = \Lambda_{\mathfrak{p}} x_{\mathfrak{p}}$ . Si representem aquest ideal  $L$  com  $\cap \Lambda_{\mathfrak{p}} x_{\mathfrak{p}}$ , l'aplicació

$$x \rightarrow \cap \Lambda_{\mathfrak{p}} x_{\mathfrak{p}}$$

estableix la bijecció que cal considerar en els enuncisats.  $\square$

**2.7. Teorema.** (Brandt-Eichler) *Sigui  $\Lambda$  un ordre maximal de  $H$ .*



- i) El nombre de classes d'equivalència de  $\Lambda$ -ideals per la dreta i el nombre de classes d'equivalència de  $\Lambda$ -ideals per l'esquerra són finits i coincideixen.
- ii) Aquest nombre no depèn de l'elecció de l'ordre maximal  $\Lambda$ . S'anomena el nombre de classes de  $H$  i es representa per  $h(H)$ .
- iii) Si  $H$  és una àlgebra de quaternions indefinida, aleshores  $h(H) = h(F)$ , on  $h(F)$  denota el nombre de classes d'ideals de  $F$  en el sentit restringit.

Fórmules per al càlcul d'aquests nombres de classes es troben en treballs clàssics.

**2.8. Teorema.** (Brandt-Eichler) *Sigui  $\Lambda$  un ordre d'Eichler de nivell  $N$  en una àlgebra de quaternions de discriminant  $D = d(H)$ .*

- i) *El nombre de classes d'equivalència d'ideals bilaterals de  $\Lambda$  és finit. Aquest nombre és el mateix per als ordres d'Eichler conjugats.*
- ii) *El nombre  $h(N, D)$  de classes d'equivalència d'ideals per l'esquerra en un ordre d'Eichler de nivell  $N$  de  $H$  és finit. Aquest nombre és el mateix per als ordres d'Eichler d'un mateix nivell.*
- iii) *Si  $S$  compleix la condició d'Eichler, el nombre de classes  $h(N, D)$  coincideix amb  $h(F)$*

Si  $H$  és totalment definida, els nombres anteriors poden calcular-se per mitjà de les matrius de Brandt-Eichler.

**2.9. Proposició.** (cf. [Vi80 p. 88]) *Sigui  $t = t(N, D)$  el nombre de tipus d'ordres d'Eichler de nivell  $N$  continguts en una àlgebra de quaternions de discriminant  $D$ . Sigui  $h'_i(N, D)$  el nombre de classes d'ideals bilaterals d'un ordre d'Eichler  $\Lambda_i$ . Agafem els ordres  $\Lambda_i$  de manera que recorrin un sistema complet de representants dels diferents tipus d'ordres d'Eichler de  $H$  de nivell  $N$ . Aleshores,*

$$h(N, D) = \sum_{i=1}^t h'_i(N, D),$$

*on, com abans,  $h(N, D)$  denota el nombre de classes d'ideals per l'esquerra continguts en un ordre d'Eichler de nivell  $N$  de  $H$ .*

Passem a enunciar un teorema d'aproximació en aquest context.

**2.10. Teorema.** (D'aproximació forta) *Suposem que  $H$  és una àlgebra de quaternions sobre  $\mathbb{Q}$  indefinida. Aleshores, se satisfà que*

$$H^*(\mathbb{A}) = H^*(\mathbb{Q})(H_\infty^*)^0 \prod_{p \in P} K_p,$$

on  $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ .

**DEMOSTRACIÓ.** Donat que  $H_\infty^* = \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ , es té que el component connex d'aquest grup és  $(H_\infty^*)^0 = \mathbf{GL}^+(2, \mathbb{R})$ . L'afirmació resulta del teorema de Brandt-Eichler i del fet que els ordres maximals contenen unitats de norma  $-1$ .  $\square$

Suposem que  $H$  és una àlgebra de quaternions sobre  $\mathbb{Q}$  indefinida. Sigui

$$\Gamma := H^*(\mathbb{Q}) \cap (H_\infty^*)^0 \prod_{p \in P} K_p.$$

El grup  $\Gamma$  és el grup format pels elements de norma 1 d'un ordre maximal de l'àlgebra de quaternions  $H$ .  $\Gamma$  és un grup fucsià que opera en el semiplà superior; té un domini fonamental compacte. A més,

$$Z_\infty^+ H^*(\mathbb{Q}) \backslash H^*(\mathbb{A}) / \prod_{p \in P} K_p \simeq \Gamma \backslash \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}).$$

**2.11. Remarca.** Els ordres maximals de  $H$  són ordres d'Eichler de nivell 1. El grup  $\Gamma$  que hem introduït correspon a  $\Gamma(1, D)$ , on  $D = D(H)$ . Treballant amb ordres d'Eichler de nivell  $N$ , es defineixen els grups  $\Gamma(N, D)$ . El grup  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$  correspon a  $\Gamma(1, 1)$ .

### §3. Teoria analítica global de les formes automorfes associades a àlgebres de quaternions

Estem ara en condicions de definir el concepte de forma automorfa per al grup  $H^*$ .

**3.1. Formes automorfes.** Siguin  $H$  una àlgebra de quaternions sobre un cos  $F$  i  $\psi$  un quasicaràcter del grup de classes d'ideles  $F^* \backslash \mathbb{A}_F^*$ . Una *forma automorfa* amb quasicaràcter  $\psi$  per a  $H^*$  és una funció contínua sobre les classes d'ideles

$$\phi : H^*(F) \backslash H^*(\mathbb{A}_F) \rightarrow \mathbb{C}$$

que satisfà les condicions següents:

- i)  $\phi$  és  $K$ -finita per la dreta. Això vol dir que l'espai de funcions generat pels traslladats de  $\phi$  per a  $k \in K$  és un  $\mathbb{C}$ -espai vectorial de dimensió finita.

- ii) Per a tot idempotent simple  $\xi$  de l'àlgebra de Hecke  $\mathcal{H}(H^*(\mathbb{A}_F))$ , l'espai

$$\{\rho(\xi f)\phi \mid f \in \mathcal{H}(H^*(\mathbb{A}_F))\}$$

té dimensió finita.

- iii) Per a tot  $z \in \mathbb{A}_F^*$  i  $g \in H^*(\mathbb{A}_F)$ , se satisfà que  $\phi(zg) = \psi(z)\phi(g)$ .

- iv) Com a funció de  $H_\infty^*$ ,  $\phi$  és  $Z(\mathcal{U})$ -finita, on  $Z(\mathcal{U})$  denota el centre de l'àlgebra envoltent universal de la complexificació de l'àlgebra de Lie de  $H_\infty^*$ .

La condició iv) és la més física de totes, ja que ens posa de manifest que les formes automorfes són vectors propis d'operadors diferencials; o bé, si es prefereix, són solució d'equacions (o bé sistemes) d'EDP.

**3.2. Definició.** Denotem per  $\mathcal{A}(H^*(\mathbb{A}_F), \psi)$  l'espai vectorial complex format per les funcions anteriors. Els seus elements s'anomenen *formes automorfes* per a  $H^*$ , amb caràcter  $\psi$ .

Sigui  $\psi$  un caràcter del grup de classes d'ideles  $F^* \backslash \mathbb{A}_F^*$ . No és restrictiu limitar-nos només al cas de caràcters en lloc de quasicaràcters. Denotem per  $L_0^2(H^*(\mathbb{A}_F), \psi)$  l'espai de totes les funcions  $\phi$  sobre  $H^*(\mathbb{A}_F)$  que satisfan les condicions següents:

- i)  $\phi(z\gamma g) = \psi(z)\phi(g)$ , per a tot  $z \in \mathbb{A}_F^*$ ,  $\gamma \in H^*(F)$ ,  $g \in H^*(\mathbb{A}_F)$ .

- ii)  $|\phi(g)|$  és de quadrat integrable.

**3.3. Proposició.** *L'espai  $L_0^2(H^*(\mathbb{A}_F), \psi)$  és un espai de Hilbert. La translació per la dreta,  $R$ , defineix una representació unitària del grup adèlic  $H^*(\mathbb{A}_F)$  en l'espai  $L_0^2(H^*(\mathbb{A}_F), \psi)$ . L'espai complex de formes automorfes  $\mathcal{A}(H^*(\mathbb{A}_F), \psi)$  coincideix amb el subespai de  $L_0^2(H^*(\mathbb{A}_F), \psi)$  format per les funcions que són  $K$ -finites.*

**3.4. Observació.** Suposem que  $H$  és una àlgebra de quaternions sobre  $\mathbb{Q}$ , indefinida. Sigui  $U_\infty$  l'estabilitzador de  $i \in \mathbb{C}$  sota l'acció de  $H^*(\mathbb{R}) \simeq \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ . Per a cada subgrup compacte  $U \subseteq H^*(\mathbb{A})$ , l'espai

$$X_U = H^*(\mathbb{Q}) \backslash H^*(\mathbb{A}) / UU_\infty$$

es correspon amb els punts complexos de certes corbes, definides per Shimura, que tenen models canònics sobre  $\mathbb{Q}$ . Amb la definició que hem donat, les corbes  $X_U$  tenen diversos components.

# Bibliografia

- [Br 83] Brzezinski, J.: On orders in quaternion algebras, *Communications in Algebra* **11**, n. 5 (1983), 501–522.
- [Ge 75] Gelbart, S.S.: *Automorphic Forms on Adele Groups*, Annals of Math. Studies, Princeton, 1975.
- [Kö 87] Körner, O.: Traces of Eichler-Brandt matrices and type numbers of quaternion orders, *Proc. Indian Acad. Sci.* **97**, n. 1-3 (1987), 189–199.
- [Pe 69] Peters, M.: Ternäre und quaternäre quadratische Formen und Quaternionenalgebren, *Acta Arithmetica* **25** (1969), 329–365.
- [Pi 73] Pizer, A.K.: Type numbers of Eichler orders, *J. reine und angew. Math.* **264** (1973), 76–102.
- [Pi 76] Pizer, A.K.: On arithmetic of quaternion algebras, *Acta Arithmetica* **31** (1976), 61–89.
- [Shi 72] Shimizu, H.: Theta series and automorphic forms on  $\mathbf{GL}_2$ , *J. Math. Soc. Japan* **24** (1972), 638–683.
- [Vi 80] Vignéras, M.F.: *Arithmétique des Algèbres de Quaternions*, LNM, n. 800, Springer, 1980.