NOTES DEL SEMINARI DE

22è ANY

FORMES MODULARS

DE SIEGEL

Vilanova i la Geltrú, 2008

17

Notes del Seminari de Teoria de Nombres
(UB-UAB-UPC)

FORMES MODULARS DE SIEGEL

Edició a cura de

A. Arenas J. Guàrdia

Amb contribucions de

F. Fité J. Nualart E. Nart
E. Torres A. Rio

A. Arenas
Facultat de Matemàtiques,
Universitat de Barcelona,
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona

J. Guàrdia
EPSEVG
Univ. Politécnica de Catalunya
Av. Víctor Balaguer s/n
08800 Vilanova i la Geltrú

Barcelona, 2008

Amb suport parcial de MTM 2006-04895,
MTM2006-15038-C02-02, MRTN-CT-2006-035495

ISBN: 978-84-934244-7-3

Índex

Presentació

Aquest volum conté les notes de les conferències sobre el tema *Formes Modulars de Siegel* presentades en la 22a edició del Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC), celebrat del 28 de gener a l'1 de febrer de 2008, a Vilanova i la Geltrú, a l'Escola Politècnica Superior d'Enginyeria.

El programa general fou elaborat per A. Arenas i J. Guàrdia i les sessions foren dutes a terme per persones del seminari. La seva col·laboració en redactar el contingut de les exposicions ha fet possible l'edició d'aquest volum.

Les formes modulars de Siegel intervenen en la demostració de molts resultats rellevants obtinguts els darrers anys en teoria de nombres. En el seminari se'n tractaren diversos aspectes relatius en primer lloc a aspectes bàsics, relatius als desenvolupaments de Fourier de les formes modulars de Siegel, grup modular de Siegel i domini fonamental, sèries de Dirichlet associades a formes modulars de Siegel, àlgebra de Hecke; així com també aspectes aplicats, relatius a l'estructura de l'anell de formes modulars de Siegel per a gèneres 2 i 3.

A. Arenas   J. Guàrdia

Barcelona, 9 de Setembre de 2008

Capítol 1

Aspectes bàsics de les formes modulars de Siegel

E. Torres
Dept. de Matemàtica Aplicada IV
Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú
Av. Víctor Balaguer s/n
08800 Vilanova i la Geltrú

Introducció

L'objectiu d'aquest capítol es definir les formes modulars de Siegel, tot remarcant el principi de Koecher i les seves conseqüències. S'introdueixen els desenvolupaments de Fourier i el canvi de Siegel. A partir de l'operador de Siegel, del que també s'estudien les seves propietats bàsiques, es defineixen i s'aprofundeixen les formes parabòliques. Finalment es caracteritza l'anell graduat de formes modulars de Siegel de pes parell en gènere 2 i es mostra un mètode per a calcular els coeficients de les sèries d'Eisenstein de pes parell.

1.1 Formes modulars de Siegel

1.1.1 Definicions

Definició 1 *Una forma modular de Siegel de pes k respecte del grup* $\Gamma_n = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ *(gènere n) és una funció $f : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ que verifica:*

(i) *És holomorfa sobre $\mathbb{H}_n$*

(ii) *Per a tota matriu* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ *i per a tot* $Z \in \mathbb{H}_n$, *es té que* $f(M < Z >) = f((AZ + B)(CZ + D)^{-1}) = \det(CZ + D)^k f(Z)$

(iii) *Per a tot $y_0 > 0$, f està acotada en el domini $y \geq y_0$*

Com $\Gamma_n =< \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I_n & S \\ 0 & I_n \end{pmatrix}, S = S^t$ *entera* $>$, per a veure (2) només cal comprovar-ho en aquests tipus de matrius.
Sigui $f\, |_k \colon \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}, M \in \Gamma_n$ i definim $j(M, Z) := det(CZ + D) \in \mathbb{C}^*$. Aleshores,

$$\begin{aligned}(f\, |_k\, M)(Z) : \;& = f(M < Z >) j(M, Z)^{-k} \\ & = f((AZ + B)(CZ + D)^{-1}) det(CZ + D)^{-k}\end{aligned}$$

Per tant la condició (2) de la definició es transforma en $f\, |_k\, M = f$, amb $M \in \Gamma_n$, donant lloc a la següent definició equivalent:

Definició 2 *(Notació de Petersson): Una forma modular de Siegel de pes k respecte del grup Γ_n és una funció $f : \mathbb{H}_n \longrightarrow V$ que verifica:*

(i) *És holomorfa sobre $\mathbb{H}_n$*

(ii) $f\, |_k\, M = f, \quad M \in \Gamma_n$

(iii) *Per a tot $y_0 > 0$, f està acotada en el domini $y \geq y_0$*

Es pot comprovar sense dificultats que:

1) $j(MN,Z) = j(M, N < Z >)j(N,Z)$

2) $f\mid_k (MN) = (f\mid_k M)\mid_k N$

Finalment, generalitzar la noció de forma modular tal com la coneixem per a $g = 1$ suposa generalitzar el "factor d'automorfia" $(cz+d)^k$. Considerem una representació $\rho : GL(n,\mathbb{C}) \longrightarrow GL(V)$, on V és un espai vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensió finita.

Definició 3 *(Van der Geer): Una forma modular de Siegel de pes ρ respecte del grup $\Gamma_n = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})$ és una funció $f : \mathbb{H}_n \longrightarrow V$ que verifica:*

(i) *És holomorfa sobre $\mathbb{H}_n$*

(ii) $f(M < Z >) = \rho(CZ + D)f(Z) \quad M \in \Gamma_n$

(iii) *Per a tot $y_0 > 0$, f està acotada en el domini $y \geq y_0$*

$M_k(\Gamma_n)$ denotarà el conjunt de totes les formes modulars de pes k i gènere n. És directe comprovar que:

- $M_k(\Gamma_n)$ és un espai vectorial sobre $\mathbb{C}$.
- Si kn és senar, $M_k(\Gamma_n) = \{0\}$ ja que $f\mid_k (-M) = (-1)^{kn} f\mid_k (M)$
- $$\begin{array}{lll} M_k(\Gamma_n)\times & M_{k'}(\Gamma_n) & \longrightarrow M_{k+k'}(\Gamma_n) \\ & (f,g) & \longrightarrow fg \end{array}$$
- $f(Z + S) = f(Z)$, per a tota S entera i simètrica
- $f(-Z^{-1}) = det(Z)^k f(Z)$
- $f(Z[U]) = f(U^t Z U) = det(U)^k f(Z)$, per a tota $U \in GL(n,\mathbb{Z})$

1.1.2 Exemples

Exemple 1.1 *Siguin $S \in M_p(\mathbb{Z})$, $T \in M_q(\mathbb{Z})$ simètriques, $8 \mid p$, $S > 0$ parella (amb els elements de la diagonal principal parells), unimodular i $Z \in \mathbb{H}_n$. La funció θ generalitzada:*

$$\theta(S,Z) := \sum_{G \in M_{p\times q}(\mathbb{Z})} e^{\pi i \sigma(S[G]Z)} = \sum_{T \geq 0} A(S,T) e^{\pi i \sigma(TZ)}$$

$$on \quad A(S,T) := \sharp\{G \in M_{p\times q}(\mathbb{Z}) \mid \ S[G] = G^t S G = T\}$$

és una forma modular de pes $p/2$ sobre Γ_n, on σ designa la traça.

Recordem que aquesta sèrie convergeix absolutament i uniforme a les regions $Y \geq Y_0 > 0$ i per tant defineix una funció holomorfa de $\mathbb{H}_n$ en $\mathbb{C}$.

Exemple 1.2 *Sigui el Thetanullwerte*

$$\theta[m](Z) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i Z[g+a] + 2\pi i b^t g}$$

on $m = (a\, b)^t$, amb a,$b \in \{0, \frac{1}{2}\}^n$, $Z \in \mathbb{H}_n$
Per a cada theta-característica m, $\theta[m](Z)$ és una funció parella o senar segons la paritat de m, la qual ve definida per la paritat del signe $(-1)^{a^t.b}$. A més recordem que $\theta[m](Z) \equiv 0$ si $a^t.b$ és senar.
Qualsevol polinomi homogeni simètric en els $\{\theta_m^8\}_{m\ parella}$ és una forma modular. Més concretament,

$$\Delta^n(Z) := \prod_{m\ \ parella} \theta[m]^8(Z) \in M_{(2^n+1)2^{n+1}}(\Gamma_n)$$

Exemple 1.3 *Si volem precisar més, sigui*

$$k_g = \begin{cases} 8 & si\ g = 1, \\ 2 & si\ g = 2, \\ 1 & si\ g \geq 3. \end{cases}$$

Aleshores la funció $\Delta_g(Z) = \prod_{m \text{ parella}} \theta[m]^{k_g}(Z)$ *és una forma modular no nul·la de pes*

$$\begin{cases} 12 & si\ g = 1, \\ 10 & si\ g = 2, \\ (2^g+1)2^{g-2} & si\ g \geq 3. \end{cases}$$

Exemple 1.4 *Per a tot enter k parell, $k \geq n+1$ es defineix la sèrie d'Eisenstein E_k com:*

$$E_k(Z) := \sum_{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0 \backslash \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z})} \det(CZ+D)^{-k}$$

on el subgrup Γ_0 ve definit per $\Gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}) \right\}$.
E_k *és una forma modular de pes k.*

1.2 Desenvolupament de Fourier

Tota forma modular $f : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ verifica que $f(Z+T) = f(Z)$ per a tota T entera i simètrica. Per tant admet un desenvolupament en sèrie de Fourier de la forma:

$$f(Z) = \sum_T a(T) e^{\pi i \sigma(TZ)}$$

on T recorre totes les matrius enteres, simètriques i parelles.

$$a(T) = e^{\pi\sigma(TY)} \int_{-1 \leq x_{kl} \leq 1} f(X+iY) e^{\pi i \sigma(TX)}\, dX.$$

Aquest desenvolupament s'anomena *desenvolupament de Fourier* de f i $a(T)$ *coeficients de Fourier.* $f(Z)$ convergeix absolutament i uniforme a les regions $Y \geq Y_0 > 0$.

Lema 1.5 *Els coeficients de Fourier $a(T)$ d'una forma modular*

$$f(Z) = \sum_{T\ parella} a(T) e^{\pi i \sigma(TZ)}$$

satisfan que $a(T[U]) = (detU)^k a(T) \quad \forall\, U \in GL(n,\mathbb{Z})$.
En particular, $a(T[U]) = a(T) \quad \forall U \in SL(n,\mathbb{Z})$.

Dem: Ja havíem vist que $(detU)^k f(Z) = f(Z[U])$. Per una altra banda:

$$f(Z[U]) = \sum_{T\ parella} a(T[U]) e^{\pi i \sigma(TU^tZU)} = \sum_{U^tTU\ parella} a(T[U]) e^{\pi i \sigma(U^tTUZ)}$$

Per la unicitat dels coeficients de Fourier, $a(U^tTU) = (detU)^k a(T)\square$.

1.2.1 Principi de Koecher

Si $f : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfà:
(1) $f(Z+T) = f(Z) \quad \forall T$ simètrica i entera
(2) $f(Z[U]) = f(Z) \quad \forall U \in SL(n,\mathbb{Z})$
Aleshores en el cas $n > 1$, $f(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{\pi i \sigma(TZ)}$ i en particular $f(Z)$ està acotada a $Y \geq Y_0 > 0$.

Dem: En primer lloc veurem que les condicions (1) i (2) impliquen que $a(T) = 0\ si\ T < 0$.
Considerem $f(Z) = \sum_T a(T) e^{\pi i \sigma(TZ)}$ que convergeix absolutament a $\mathbb{H}_n$. En particular convergeix per a $Z = iId$. Per tant $\exists\, \alpha > 0$: $\mid a(T) \mid \leq \alpha e^{\pi \sigma(T)} \quad \forall T$ entera. Agafem $T < 0$ i $\exists\, v_1 \in \mathbb{Z}^n$ tal que $T[v_1] < 0$. Completem v_1 fins a una matriu unimodular v. Aplicant el lema, podem reemplaçar T per $T[v]$ i podem suposar que $t_{11} < 0$.
Agafem ara $U = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$ matriu unimodular:

$$\mid a(T) \mid = \mid a(T[U]) \mid \leq \alpha e^{\pi \sigma(T[U])}$$

on $\sigma(T[U]) = \sigma(T) + t_{11}m^2 + t_{12}m$. Com $\lim_{m\to\infty} \sigma(T[U]) = -\infty$, aleshores $\mid a(T) \mid= 0$.
En segon lloc veurem que $a(T) = 0$ *si* $T < 0$ implica que $f(Z)$ acotada en $Y \geq Y_0 > 0$. Ara podem considerar $f(Z) = \sum_{T\geq 0} a(T)e^{\pi i\sigma(TZ)}$.
Com $Y \geq Y_0 > 0$, $T \geq 0$, tenim que $\sigma(TY) \geq \sigma(TY_0)$ i

$$\mid f(Z) \mid\leq \sum_{T\geq 0} \mid a(T) \mid\mid e^{\pi i\sigma(TZ)} \mid = \sum_{T\geq 0} \mid a(T) \mid e^{-\pi\sigma(TY)} \mid \leq$$
$$\sum_{T\geq 0} \mid a(T) \mid e^{-\pi\sigma(TY_0)} \mid,$$ que convergeix.$\square$

1.3 Canvi de variables de Siegel

Siegel va proposar un canvi variables que existeix per qualsevol dimensió i que permet expressar qualsevol forma modular com una sèrie entera.

- Per a $n = 1$, $q = e^{\pi iz}$
- Per a $n = 2$:

Sigui $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2$ on $y_3 \geq y_1 \geq 2y_2 \geq 0$ (reduïda en sentit Minkowski)
Considerem les matrius $Q_1 = Id, Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ i $Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ que verifiquen les desigualtats. Tenim que $Q_k \geq 0$ $(k = 1, 2, 3)$. $Y = v_1Q_1 + v_2Q_2 + v_3Q_3$ on $y_1 = v_1 + 2v_2$, $y_2 = v_2$, $y_3 = v_1 + 2v_2 + v_3$. Els y_k són funcions linealment independents dels v_k. Definim z_k com aquestes mateixes funcions lineals de variables complexes w_k, $z_1 = w_1 + 2w_2$, $z_2 = w_2$, $z_3 = w_1 + 2w_2 + w_3$. $Z = w_1Q_1 + w_2Q_2 + w_3Q_3$ on $w_1 = z_1 - 2z_2$, $w_2 = z_2$, $w_3 = z_3 - z_1$. Per a tota matriu $T = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix} \geq 0$ entera i simètrica, tenim que $e^{\pi i\sigma(TZ)} = q_1^{t_1+t_3}q_2^{2(t_1+t_2+t_3)}q_3^{t_3}$, on $q_k = e^{\pi iw_k}$. Es compleix que $\mid q_k \mid\leq 1$ i els exponents $u_1 = t_1 + t_3$, $u_2 = 2(t_1 + t_2 + t_3)$, $u_3 = t_3 \in \mathbb{N}$.

Aplicant aquest canvi de Siegel per a dimensió 2 tenim el resultat següent:

Proposició 1.6 *En dimensió 2 tota forma modular admet un desenvolupament en sèrie de la forma següent:*

$$f(Z) = \sum_{u_3 \geq 0} \sum_{u_1 \geq u_3} \sum_{2(u_1 - \sqrt{u_3(u_1-u_3)}) \leq u_2 \leq 2(u_1 + \sqrt{u_3(u_1-u_3)}))} a(u_1, u_2, u_3) q_1^{u_1} q_2^{u_2} q_3^{u_3}$$

de manera que si $Z \in \mathcal{F}_2$, aleshores $\mid q_1 \mid, \mid q_2 \mid, \mid q_3 \mid \leq 1$.

- Per a n qualsevol:

$Z \in \mathcal{F}_n$ suposa que $\{L_1 \geq 0, \cdots, L_\mu \geq 0\}$ en les ν variables y_{kl} $(1 \leq k < l \leq n)$. Busquem λ solucions $Y = Q = (q_{kl})$, $Y \neq 0$ de un sistema format per $\nu - 1$ equacions linealment independents de les $\{L_i\}$. Aquestes $Q_1, \cdots, Q_\lambda$ tindran un grau de llibertat. Sigui $\mathcal{R} = \{Y \geq 0 \mid L_1 \geq 0, \cdots, L_\lambda \geq 0\}$. $Y = v_1 Q_1 + \cdots + v_\lambda Q_\lambda$. Observem que en el cas $n = 2$ $\lambda = \nu$; mentre que en el cas $n > 2$ $\lambda > \nu$ i les $v_1, \cdots, v_\lambda$ no estan unívocament determinades pels q_{kl}. Aleshores existeix un $c_k \neq 0$ tal que $c_1 Q_1 + \cdots + c_\lambda Q_\lambda = 0$ ja que $\nu + 1$ Q_k són linealment dependents. Podem canviar v_k per $v_k + c_k v$, $k = 1, \cdots, \lambda$ tot triant v de manera que $v_k + c_k v \geq 0$ $\forall\, k$ i que existeixi almenys un k tal que $v_k + c_k v = 0$. D'aquesta manera baixem de λ a $\lambda - \nu$ els coeficients v_i. Ens quedem amb ν matrius Q_i: $S_1, \cdots, S_\nu$. $Y = v_1 S_1 + \cdots + v_\nu S_\nu$ $v_k \geq 0$ (abús de notació: $v_k \to v_k + c_k v$). Observem que aquesta descomposició pot existir amb varis sistemes de matrius $\{S_1, \cdots, S_\nu\}$. Els y_{kl} són funcions linealment independents de $v_1, \cdots, v_\lambda$ amb coeficients enters. Definim z_{kl} com aquestes mateixes funcions lineals de variables complexes $w_1, \cdots, w_\lambda$, com a dimensió 2.
$Z = w_1 S_1 + \cdots + w_\lambda S_\lambda$ i la resta del raonament és anàleg al cas $n = 2$: per a cada matriu $T \geq 0$ $\sigma(TS_k) = g_k \in \mathbb{N}$ on $k = 1, \cdots, \nu$. $q_k = e^{\pi i w_k}$, $e^{\pi i \sigma(TZ)} = q_1^{g_1} . \cdots . q_\nu^{g_\nu}$. A més, com $Z \in \mathcal{F}_n$, $\mid q_k \mid \leq 1$ amb $k = 1, \cdots, \nu$.

Observació: En el cas $n = 2$ del sistema d'inequacions $y_3 \geq y_1 \geq 2y_2 \geq 0$ tenim que $\mu = 6$ i $\nu = 3$. Agafant sistemes de 3 equacions de totes les maneres possibles obtenim:

$Q_1 = Id, Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Q_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, Q_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $Q_7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Però Q_4, Q_5, $Q_7 < 0$ i $Q_6 > 0$ suposaria un canvi de variables totalment anàleg intercanviant els exponents de q_1 i q_3.

1.4 L'operador de Siegel

Si $n \geq 1$, es defineix l'operador de Siegel $\phi : M_k(\Gamma_n) \to M_k(\Gamma_{n-1})$ de manera que per

$$\text{si} \quad f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}, \quad \phi.f(\tau) = \lim_{t\to\infty} f \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}, \forall\, \tau \in \mathbb{H}_{n-1}$$

Notació: $\phi.f(\tau) = f \mid_\phi$

Observem que si $n = 1$, $\phi.f(\tau) = \lim_{t\to\infty} f(it)$.
Anem a veure ara que ϕ està ben definit. Com $T \geq 0$ podem fixar una regió $Y \geq Y_0 > 0$ on tenim convergència uniforme i per tant:

$$\phi.f(\tau) = \sum_{T\geq 0} a(T) e^{\pi i \lim_{t\to\infty} \sigma(T \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix})}$$

Tenim que:

$$\lim_{t\to\infty} e^{\pi i \sigma(T \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix})} = \lim_{t\to\infty} e^{\pi i (\sigma(T_1 \tau) + it.t_{nn})} = c. \lim_{t\to\infty} e^{-\pi t.t_{nn}}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t_{nn} > 0 \\ c & \text{si } t_{nn} = 0 \end{cases}$$

Si $T \geq 0$ i $t_{nn} = 0$, aleshores $t_{in} = 0$ ja que $t_{ii}.t_{nn} - t_{in}^2 \geq 0$. Aleshores $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on $T_1 = T^{(n-1)} \geq 0$.

Per tant el límit existeix i l'acció sobre els coeficients de Fourier és:

$$(\phi.f)(\tau) = \sum_{T=T^{(n-1)}\geq 0} a(\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})e^{\pi i \sigma(T_1\tau)}$$

Observem que per a $n = 1$ $(\phi.f)(\tau) = a(0)$.

Proposició 1.7

$\phi : M_k(\Gamma_n) \rightarrow M_k(\Gamma_{n-1})$ defineix una aplicació lineal i ϕ^{n-r}, la $(n-r)$ iteració de ϕ, representa una forma modular de pes k i grau r.

Dem: Sigui $M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_{n-1}$, i considerem les matrius $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \in \Gamma_n$.

Aleshores $M < \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} >= \begin{pmatrix} M_1 < \tau > & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}$ i $det(C\tau + D) = det(C_1\tau_1 + D_1)$.

Per tant, $f\begin{pmatrix} M_1 < \tau > & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} = j(M_1, \tau)^k.f\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} = det(C_1\tau_1 + D_1).f\begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}$ i quan $t \rightarrow \infty$, tenim que $f \mid \phi^{n-r}(M_1 < \tau >) = j(M_1, \tau)^k.f \mid \phi^{n-r}(\tau)\square$.

1.5 Formes parabòliques

Definició 4 *Una forma modular $f \in M_k(\Gamma_n)$ s'anomena parabòlica si pertany a $ker\phi$.*
$S_k(\Gamma_n) := \{f \in M_k(\Gamma_n) \mid f \mid \phi = 0\}$ denotarà l'espai de formes parabòliques de pes k i gènere n.

Lema 1.8 *Si $f \in M_k(\Gamma_n)$, f parabòlica $\Leftrightarrow$ $(a(T) \neq 0 \Rightarrow T > 0)$*

__**Dem**__: A partir de la definició de l'operador de Siegel, tenim que $(\phi.f)(\tau) = \sum_{T_1 \geq 0} a \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{\pi i \sigma(T_1 \tau)}$. Per tant, deduïm que f és una forma parabòlica si i només si $a(T) = 0$ per a tota $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si $T \geq 0$ és una matriu singular, existeix una matriu unimodular U de manera que $T[U] = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i viceversa $(a(T) = \pm a(T[U]))$. Per tant, f és parabòlica si i només si $a(T) = 0$ per a qualsevol T singular.
Observació: Si $a = (\tilde{a}, a_n),\ b = (\tilde{b}, b_n)$ són matrius enteres, aleshores:

$$\theta_{(a,b)} \mid \phi = \begin{cases} (-1)^{\frac{a_n b_n}{2}}.\theta_{(\tilde{a},\tilde{b})} & \text{si } a_n \text{ parell} \\ 0 & \text{si } a_n \text{ senar.} \end{cases}$$

Per exemple $\theta_{(a,b)} \mid \phi = 0 \quad$ per a,$b = (1\,0 \cdots 0\,1)^t$.

Corol·lari 1.9 *La forma* $\Delta^n(Z) := \prod_{m \ \ parella} \theta[m](Z)^8$ *és parabòlica i* $\Delta^n(Z) \neq 0$.

Lema 1.10 *Per a tota* $f \in M_k(\Gamma_n)$, $g(Z) := det(Y)^{1/2}. \mid f(Z) \mid$ *és* Γ_n*-invariant. A més, si* $f \in S_k(\Gamma_n)$*, aleshores* $g(Z)$ *té un màxim absolut a* $\mathbb{H}_n$.

__**Dem**__: La invariància de $g(Z)$ és directe a partir de les conegudes fórmules de transformació pel grup modular. Si $f \in S_k(\Gamma_n)$, per la Γ_n-invariància de $g(Z)$ és suficient demostrar que $g(Z)$ té un màxim a $\mathcal{F}_n$. Però per a tota constant $c > 0$, $\mathcal{F}_n(c) := \{Z \in \mathcal{F}_n \mid detY \leq c\}$ és compacte. Aleshores, és suficient veure que $\lim_{detY \to \infty} g(Z) = 0$ si $Z \in \mathcal{F}_n$. A partir de les desigualtats vistes per a la reducció de Minkowski, tenim que: $(detY)^{k/2}.e^{-\pi\sigma(TY)} \leq c \prod_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\epsilon}{2} t_\nu y_\nu}$ on $c = c(n)$, $\epsilon = \epsilon(n)$ són constants.

També $g(Z) \leq c. \sum_{T>0} e^{-\frac{\epsilon}{2}\sigma(T\tilde{Y})}$ on $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$. A més, $\frac{1}{2}\sigma(T\tilde{Y}) \geq \sigma(T\tilde{Y})$. Però si Y és reduïda en sentit Minkowski, quan $detY \to \infty \;\Rightarrow\; y_n \to \infty \;\Rightarrow \sigma(Y) \to \infty$. Si $detY \to \infty \;\Rightarrow$ $\sigma(T\tilde{Y}) \to \infty$, $g(Z) \to 0$ i la sèrie $g(Z)$ convergeix uniformement a $\mathcal{F}_n\square$.

Corol·lari 1.11 *$S_0(\Gamma_n) = \{0\}$, $M_0(\Gamma_n) = \mathbb{C}$, i $k < 0 \Rightarrow M_k(\Gamma_n) = \{0\}$.*

Dem: $f \in S_0(\Gamma_n) \;\Rightarrow\; g(Z) =\mid f(Z) \mid$ té un màxim absolut a $\mathbb{H}_n$ i pel principi del màxim, $f = c \;\Rightarrow\; f = 0$.
$f \in M_0(\Gamma_n) \;\Rightarrow\; f \mid \phi = c$ perquè $f \mid \phi \in M_0(\Gamma_{n-1}) = \mathbb{C} \;\Rightarrow$
$f - c \in S_0(\Gamma_n) \;\Rightarrow\; f = c$.
Finalment, $f \in M_{-k}(\Gamma_n)$ agafem $f^{k_0}.g^k \in M_0(\Gamma_n) \cap S_0(\Gamma_n)$ on $g = \Delta^{(n)} \;\Rightarrow\; f^{k_0} \equiv 0 \;\Rightarrow\; f \equiv 0$.

1.6 Teoremes de finitud

Lema 1.12 *Sigui $f \in S_k(\Gamma_n)$, $f \neq 0$ i $z_0 \in \mathcal{F}_n$ un punt on $det(y)^{k/2}$ pren el seu màxim absolut. Siguin $N \geq 1$ enter i $S \geq 0$ matriu entera $n \times n$, de manera que:*

$$a_m := \sum_{\sigma(ST)=2m} a(T) e^{\pi i \sigma(TZ_0)} = 0 \qquad \forall m < N$$

Aleshores $\sigma(SY_o^{-1}) \geq \frac{4\pi N}{k}$ on $Z_0 = X_0 + iY_0$, amb f,N,S donades.

Proposició 1.13 *A partir d'aquest lema:*

$$\textbf{(1)} \qquad S_k(\Gamma_n) = \{0\} \quad si \quad \begin{cases} n = 1 & i \quad k < 1, \\ n = 2 & i \quad k < 9, \\ n = 3 & i \quad k < 8, \\ n = 4 & i \quad k < 6, \\ n = 5 & i \quad k < 5. \end{cases}$$

$$\textbf{(2)} \qquad f \in S_k(\Gamma_n) \quad amb \quad a(T) = 0 \quad \forall \sigma(T) \leq \tfrac{kn}{2\pi\epsilon_n} \Rightarrow f \equiv 0$$

En particular, $dimS_k(\Gamma_n) < \sharp\{T > 0 \;\mid\; \sigma(T) \leq \frac{kn}{2\pi\epsilon_n} = k\mu_n\}$

(3) *dim* $M_k(\Gamma_n) \leq A_n.k^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *on* A_n *només depèn de* n

(4) *gr tr* $(\oplus_{k\geq 0} M_k(\Gamma_n)) \leq \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$

(5) *gr tr* $(K(\Gamma_n)) \leq \frac{n(n+1)}{2}$ *on* $K(\Gamma_n)$ *és el cos de funcions modulars format per les* $\varphi : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ *meromorfa,* $\Gamma_n -$ *invariant,* $\varphi = f/g$ *amb* f, g *formes modulars del mateix pes* $k,\ k \neq 0$.

Dem:

(1) Veurem que si $f \in S_k(\Gamma_n),\ f \neq 0$, aleshores $k \geq \frac{2\pi\sqrt{3}}{(\frac{4}{3})^{n-1}}$.
Apliquem el lema per a $N = 1,\ S > 0$ i recordem que si $f \in S_k(\Gamma_n) \Rightarrow a(T) = 0$ si $T \leq 0 \Rightarrow a_0 = 0$. Per una altra banda, si $S = S^t\ \exists m(S) = \min\{S[g] :\ g \in \mathbb{Z}^n - \{0\}\}$; i si $S, T > 0$, aleshores $\sigma(ST) > 0$. Tenim que $m(Y_0)^{-1} = Y_0^{-1}[g] = \sigma(g^t Y_0^{-1} g) = \sigma(g^t g Y_0^{-1}) = \sigma(S Y_0^{-1}) \geq \frac{4\pi}{k}$. A més, $Z \in \mathcal{F}_n \Rightarrow m(Y) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Aplicant la desigualtat de Hermite ($m(Y) \leq (\frac{4}{3})^{\frac{n-1}{2}}.det(Y)^{1/n}$), obtenim que $\frac{4\pi}{k}.\frac{\sqrt{3}}{2} \leq m(Y_0)^{-1} m(Y) \leq (\frac{4}{3})^{n-1}$, d'on es dedueix que $k \geq \frac{2\pi\sqrt{3}}{(\frac{4}{3})^{n-1}}$.
D'aquí obtenim (1) per a $n = 1, 2, 3$. Pels casos $n = 4, 5$ es coneixen cotes millors que la de la desigualtat de Hermite, com per exemple: $m(Y) \leq h_n.(detY)^{1/n}$ $h_4 = \sqrt[2]{2}$, $h_5 = \sqrt[5]{8}$, a partir de les quals queda demostrat (1).

(2) Sigui $f \in S_k(\Gamma_n)$ i prenem N mínim tal que $\frac{kn}{2\pi\epsilon_n} < 2NiS = Id$. Si $m > N$, $\sigma(ST) = \sigma(T) = 2m \Rightarrow \sigma(T) \leq \frac{kn}{2\pi\epsilon_n} \Rightarrow a(T) = 0 \Rightarrow a_m = 0$. Podem aplicar el lema per aquesta N mínima i $S = Id$, obtenint $\sigma(Y_0^{-1}) \geq \frac{4kN}{k}$. Per tant, $Y_0 \geq \epsilon_n.Id \Leftrightarrow Y_0^{-1} \leq \epsilon_n^{-1}.Id \Rightarrow \sigma(Y_0^{-1}) \leq \epsilon_n^{-1}.n$ i $\frac{4kN}{k} \leq \sigma(Y_0^{-1}) \leq \frac{n}{\epsilon_n} \Rightarrow \frac{kn}{2\pi\epsilon_n} \geq 2N$, que és una contradicció i per tant $f = 0$.

A partir d'aquí: $\begin{array}{llll} S_k & (\Gamma_n) & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{\sharp\{T>0\ \mid\ \sigma(T)\leq\frac{kn}{2\pi\epsilon_n}\}} \\ & f & \to & (a(T))_{\sigma(T)\leq\frac{kn}{2\pi\epsilon_n}} \end{array}$

A més, $\dim S_k(\Gamma_n) < \sharp\{T > 0\ \mid\ \sigma(T) \leq \frac{kn}{2\pi\epsilon_n}\}$.

(3) A partir de $\phi : M_k(\Gamma_n) \to M_k(\Gamma_{n-1})$, tenim que la $\dim M_k(\Gamma_n) \leq \dim S_k(\Gamma_n) + \dim M_k(\Gamma_{n-1})$. Cal veure que $\dim S_k(\Gamma_n) = \mathcal{O}(k^{\frac{n(n+1)}{2}})$

i dim$M_k(\Gamma_{n-1}) = \mathcal{O}(k^{\frac{n(n-1)}{2}})$, per la qual cosa és suficient demostrar que $\sharp\{T > 0 \mid \sigma(T) \leq \frac{kn}{2\pi\epsilon_n} = k.\mu_n\} = \mathcal{O}(k^{\frac{n(n+1)}{2}})$. Per a construir però T simètrica, només he d'omplir $\frac{n(n+1)}{2}$ entrades. T ha de verificar $t_{ij}^2 \leq t_{ii}.t_{jj}$ per $1 \leq i < j \leq n$. Com $0 < t_{ii} \leq \sigma(T)^2 \leq k^2.\mu_n^2$, tenim que $\mid t_{ij} \mid \leq k.\mu_n$ i $\sharp\{T > 0 \mid \sigma(T) \leq k.\mu_n\} = (2k\mu_n + 1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Per tant, dim$S_k(\Gamma_n) = \mathcal{O}(k^{\frac{n(n+1)}{2}})$ quan $k \to \infty$. Anàlogament es demostra que dim $M_k(\Gamma_{n-1}) = \mathcal{O}(k^{\frac{n(n-1)}{2}})$.

(4) Siguin $f_0, f_1, \cdots, f_m$ formes modulars que tenen de pesos respectius $k_0, k_1, \cdots, k_m$ i són algebraicament independents. Agafem $N = k_0 k_1 \cdots k_m$ un enter, $F_i = f_i^{N/k_i} \in M_N(\Gamma_n)$. Aquestes $F_0, F_1, \cdots, F_m$ també són algebraicament independents. Per a tot $k = (n_0 + n_1 + \cdots + n_m)N$, $n_i \geq 0$, les $\{F_0^{n_0} F_1^{n_1} \cdots F_m^{n_m} \in M_k(\Gamma_n)\}_{(n_0, n_1, \cdots, n_m)}$ són linealment independents. El número de monomis d'aquest tipus serà igual al número de solucions enteres positives de $\{n_0 + n_1 + \cdots + n_m = k/N\} = \mathcal{O}((\frac{k}{N})^m)$. Quan $k \to \infty$, $m \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Per a obtenir les igualtats a (4) i (5), es fan servir sèries de Poincaré.

1.7 Sèries de Poincaré

Hem vist fins ara que només es poden construir formes modulars a partir de sèries theta. A continuació definirem les sèries de Poincaré que ens permetran construir formes modulars d'una altra manera.

Definició 5 *Sigui* $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ *holomorfa,* $n > 1$*. Considerem:*

$$F := \sum_{M \in \Gamma_n} f \mid_k M = \sum_{M \in \Gamma_n} f(M < Z >) det(CZ + D)^{-k}$$

- F té pes k
- $F \mid_{M_0} = \sum_{M \in \Gamma_n} f \mid_k MM_0 = \sum_{M \in \Gamma_n} f \mid_k M$ ja que MM_0 recorre també tot Γ_n

- Agafant $M_0 = \frac{1}{\sqrt{2}i}\begin{pmatrix} Id & -iId \\ Id & iId \end{pmatrix}$, es passa al disc unitat D_n on F convergeix absolutament i uniforme.

1.8 Sèries d'Eisenstein

Teorema 1.14 *Si k parell, $k > 2n$, aleshores* $M_k(\Gamma_n) \overset{\phi}{\twoheadrightarrow} M_k(\Gamma_{n-1})$

Dem: Es prova que ϕ^{n-j} és exhaustiu per inducció sobre j

Cal aplicar ϕ reiteradament l'operador de Siegel: $f \mid_{\phi^{n-j}} (Z) = \lim_{t\to\infty} f(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & itId^{n-j} \end{pmatrix})$ i els dos lemes següents:

Lema 1.15 $S_k(\Gamma_j) \subseteq \phi^{n-j}(M_k(\Gamma_n))$ $0 \leq j < n$

Dem: Es tracta d'associar a cada $f \in S_k(\Gamma_j)$ una $E_f \in M_k(\Gamma_n)$ tal que $f = E_f \mid \phi^{n-j}$. Per això definim $F : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ a partir de $f \in S_k(\Gamma_j)$ tal que $F(Z) := f(Z_1)$, amb $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$ i $f = F_f \mid \phi^{n-j}$. Però F no serà modular (excepte en casos trivials). Aleshores, considerem la sèrie de Poincaré $\sum_{M\in\Gamma_n} F \mid_k M$ però no convergeix ja que $\exists \Gamma_{n,j} \subseteq \Gamma_n$ tal que $F \mid_k M = F$ $\forall M \in \Gamma_{n,j}$. Anem a veure com és aquest subgrup $\Gamma_{n,j}$ i com Siegel va "retocarl·la sèrie de Poincaré perquè convergeixi:

Lema 1.16 *Sigui* $0 \leq j < n$ $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$ *i* $D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$ *amb* $A_1, B_1, C_1, D_1 \in M_{j\times j}(\mathbb{R})$.

Considerem $\Omega_{n,j} := \{M \in Sp(n,\mathbb{R}) \mid M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_2 \\ A_3 & A_4 & B_3 & B_4 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_2 \\ 0 & 0 & 0 & D_4 \end{pmatrix}\}$.
Aleshores:

(i) $\Omega_{n,j}$ *és un subgrup de* $Sp(n,\mathbb{R})$
(ii) L'aplicació $\Omega_{n,j} \to Sp(j,\mathbb{R})$ *que a cada* $M \in \Omega_{n,j}$ *li fa correspondre* $M_1 := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ *és exhaustiva.*
(iii) $M \in \Omega_{n,j} \Rightarrow M < Z >= \begin{pmatrix} M_1 < Z_1 > & * \\ * & * \end{pmatrix}$,
on $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$

Definició 6 *Es defineix* $\Gamma_{n,j} := \Omega_{n,j} \cap \Gamma_n$ *on* $F \mid_k M = F, \forall M \in \Gamma_{n,j}$ *i la sèrie d'Eisenstein* $E_k(Z,f) := \sum_{M \in \Gamma_{n,j} \backslash \Gamma_n} (F \mid_k M)$.

Teorema 1.17 *Sigui* $0 \leq j < n, k$ *parell,* $k > n+1+j$ $f \in S_k(\Gamma_j)$. *Aleshores:*

$$E_{n,j}(Z,f) := \sum_{M \in \Gamma_{n,j} \backslash \Gamma_n} F(M < Z >).det(CZ+D)^{-k}$$

convergeix absolutament i uniforme a les regions

$$\omega(\delta) = \{Z \in \Gamma_n \mid \sigma(x^2) \leq \delta^{-1},\ Y \geq \delta Id,\ \delta > 0\} \quad i$$

$$E_{n,j}(-,f) \mid \phi^{n-j} = f$$

Cas particular: Si $j = 0,\ f \equiv 1$

$$E_k(Z) := \sum_{M \in \Gamma_{n,0} \backslash \Gamma_n} (CZ+D)^{-k} \text{on } \Gamma_{n,0} = \{M \in \Gamma_n \mid C = 0\}$$

Quan $n = 1$, $E_{n,j}(Z,f)$ coincideix amb la forma modular d'Eisenstein clàssica:

$$E_k(z) = \sum_{(c,d)=1} (cz+d)^{-k}$$

$(c,d) = 1 \Rightarrow \exists a,b$ tal que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2,\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) = \Gamma_1$. Existeix una bijecció entre $\Gamma_{1,0}\backslash\Gamma_1$ i $\{(c,d)$ coprimers$\}$. A més, $\Gamma_{1,0} = \{\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}_{m\in\mathbb{Z}}$.

1.9 Formes modulars de gènere 2

Tenim 10 Thetanullwerte parells $\theta[m](Z) := \sum_{g\in\mathbb{Z}^n} e^{\pi i Z[g+a]+2\pi i b^t g}$, on $m = (a\,b)^t$, amb $a,b \in \{0, \frac{1}{2}\}^n$, $(-1)^{a^t b} = 1$.

$$[m] = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\}$$

Considerem ara $\Theta(Z) := \prod_{m \text{ parella}} \theta[m](Z)$. Aleshores, $\Theta^8 = \Delta^{(2)} \in S_{40}(\Gamma_2)$.

Lema 1.18 *Existeix un caràcter no trivial $v : \Gamma_2 \to \pm 1$ tal que:*

$$\Theta(M < Z >) = v(M) j(M,Z)^5 \Theta(Z) \;\forall Z \in \mathbb{H}_2, \forall M \in \Gamma_2$$

tot verificant que $v = \begin{pmatrix} U^t & 0 \\ 0 & U^{-1}1 \end{pmatrix}$ *per a* $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Notació:

$M_k(\Gamma_2, v) = \{f : \mathbb{H}_2 \to \mathbb{C}$ holomorfa $\mid f(M < Z >) = v(M) j(M,Z)^k f(Z)\}$

Observem que $\Theta \in M_5(\Gamma_2, v) \Rightarrow \Theta^2 \in S_{10}(\Gamma_2)$.

Dem:

Si agafem $M = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}$, a partir de la relació

$\theta_{a,b}(-Z^{-1}) = (-1)^{\frac{a^t b}{2}} det(-iZ)^{\frac{1}{2}} \theta_{b,a}(Z)$, es verifica que
$\Theta(-Z^{-1}) = -det(-iZ)^5 \Theta(Z) = det(Z)^5 \Theta(Z) = j(M,Z)^5 \Theta(Z)$.
Amb un raonament anàleg, en el cas de $M = \begin{pmatrix} Id & T \\ 0 & Id \end{pmatrix}$, a partir de $\theta^2_{\tilde{a},\tilde{b}}(Z+T) = e^{\frac{1}{4}\pi i T[a]} \theta_{a,b}(Z)$, amb $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on $(\tilde{a},\tilde{b}) := M \left\{ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right\} = M^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (C^t D)_0 \\ (A^t B)_0 \end{pmatrix}$ (mòd 2), tenim que

$$\Theta(Z+T) = \prod_{(a,b)\ parella} e^{\frac{1}{4}\pi a_1} \Theta(Z) = (e^{\frac{1}{4}\pi a_1})^4 \Theta(Z) = -\Theta(Z)\Box.$$

Observacions:

1. Si $n = 1$, $\Theta(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{H}_1$

2. Si $n > 2, \exists Z \in \mathbb{H}_2$ on $\Theta(Z) = 0$. (Si $\Theta(Z) \neq 0 \forall Z \in \mathbb{H}_2 \Rightarrow 1/\Theta^2 holomorfa \Rightarrow \Theta^{-2} \in S_{-10}(\Gamma_n) = \{0\} \Rightarrow \Theta^{-2} \equiv 0$).

3. En canvi, per a $n = 1 \Delta(z) \neq 0$ i $1/\Delta(z)$ és holomorfa en $\mathbb{H}_1$, però com $\Delta(\infty) = 0$, $1/\Delta(z)$ no està afitada en $Y \geq Y_0 > 0$.

Lema 1.19 *Sigui* $\mathcal{N} := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2 \right\}$ *subvarietat analítica de* $\mathbb{H}_2$*. Si* $f \in M_k(\Gamma_2)$ *o* $f \in M_k(\Gamma_2, v)$ *amb* k *senar, aleshores* f *s'anul·la sobre* $\mathcal{N}$*.*

Dem:
Sigui $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} U^t & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \in \Gamma_2$.
A partir de $M < \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} >= UZU^{-1} = \begin{pmatrix} z_1 & -z_3 \\ -z_3 & z_2 \end{pmatrix}$, $j(M,Z) = detU = -1$ i $v(M) = 1$, tenim que:

$$f(\begin{pmatrix} z_1 & -z_3 \\ -z_3 & z_2 \end{pmatrix}) = v(M) j(M,Z) f \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix}.$$

En particular, si $z_3 = 0$ f s'anul·la sobre $\mathcal{N}$.$\Box$

Proposició 1.20 *El conjunt de zeros de* $\Theta(Z)$ *és* $\bigcup\limits_{M\in\Gamma_2} M(\mathcal{N})$ *i els zeros són tots simples.*

Corol·lari 1.21 *(1) Si* $f \in M_k(\Gamma_2)$ *o* $f \in M_k(\Gamma_2, v)$ *amb* k *senar, aleshores* f/Θ *és holomorfa i* $f/\Theta \in M_{k-5}(\Gamma_2, v) of \in M_{k-5}(\Gamma_2)$ *respectivament.*
(1') Multiplicar per Θ *dóna isomorfismes lineals de:*

$$M_{2k}(\Gamma_2) \rightarrow M_{2k+5}(\Gamma_2, v)$$

$$M_{2k}(\Gamma_2, v) \rightarrow M_{2k+5}(\Gamma_2)$$

(2) $f \in M_{2k}(\Gamma_n)$ *tal que* $f(\mathcal{N}) = 0 \Rightarrow f/\Theta \in M_{2k-5}(\Gamma_2, v)$
$Rightarrow f/\Theta^2 \in M_{2k-10}(\Gamma_2) \Rightarrow f \in S_{2k}(\Gamma_2)$

L'objectiu és descriure completament les aplicacions
$F : \mathbb{H}_1 \times \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ que s'obtenen per restricció de $f \in M_k(\Gamma_2)$:

$$F(z_1, z_2) = f\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$$

Lema 1.22 $F(z_1, z_2) = \sum\limits_{i=1}^{l} g_i(z_1)g_j(z_2)$ *amb* $g_i \in M_k(\Gamma_2)$*. Recordem que:*

- $M_4(\Gamma_1) = < G_4 >$, $M_6(\Gamma_1) = < G_6 >$
- $\oplus_{k\geq 0} M_k(\Gamma_1) = \mathbb{C}[G_4, G_6]$ *on* G_4, G_6 *són linealment independents*
- *Podem agafar* $G_4 = E_4$ *i* $G_6 = E_6$*, en canvi prenem*
  $G_4 = \theta^8_{0,0} + \theta^8_{0,1} + \theta^8_{1,0}$, $G_6 = (\theta^4_{0,0} + \theta^4_{1,0})(\theta^4_{0,0} + \theta^4_{0,1})(\theta^4_{1,0} - \theta^4_{1,0})$

Lema 1.23 *Sigui* $f \in M_k(\Gamma_2) k \equiv 0$ *(mòd 2). La funció* $F(z_1, z_2) = f\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}$ *s'expressa com a un polinomi isobàric de pes* k *en:*
$F_4 := G_4(z_1)G_4(z_2)$, $F_6 := G_6(z_1)G_6(z_2)$ *i* $F_{12} := G^3_4(z_1)G^2_6(z_2) + G^2_6(z_1)G^3_4(z_2)$.

Corol·lari 1.24 *$\forall f \in M_k(\Gamma_2), \exists P(F_4, F_6, F_{12})$ un polinomi isobàric de manera que $(f - P(F_4, F_6, F_{12})) \mid_{\mathcal{N}} = 0$.*

Lema 1.25 *Existeixen $f_k \in M_k(\Gamma_2)$ tals que $F_k = f_k \mid_{\mathcal{N}}$, per a $k = 4$, 6 i 12. Per exemple:* $f_4 = \sum_{m parella} \theta[m]^8$, $f_6 = E_6$, $f_{12} = \sum_{m\ parella} \theta[m]^{24}$

Teorema 1.26 *Existeixen $f_k \in M_k(\Gamma_2), k = 4, 6, 10, 12$ de manera que $\oplus_{k\geq 0} M_{2k}(\Gamma_2) = \mathbb{C}[f_4, f_6, f_{10}, f_{12}]$, on aquestes f_i són algebraicament independents i $f_{10} := \Theta^2$.*

<u>**Dem**</u>: Sigui $f \in M_{2k}(\Gamma_2)$ i prenem $F := f \mid_{\mathcal{N}} = P(F_4, F_6, F_{12}) \mid_{\mathcal{N}}$. Aleshores $(f - P) \mid_{\mathcal{N}} = 0$ i $(f - P) \in M_{2k}(\Gamma_2)$. Per tant, $(f - P)\Theta^{-1} \in M_{2k-5}(\Gamma_2, v)$ i $(f - P)\Theta^{-2} \in M_{2k-10}(\Gamma_2)$. Per a $2k - 10 = 0$, $(f - P)\Theta^{-2} = ctt. \Rightarrow f = Q(F_4, F_6, F_{12}, \Theta^2)$; mentre que si $2k - 10 < 0$, $f - P = 0 \Rightarrow f = P$. Per a k alts es fa per inducció. Com sabem que el gr tr≤ 4 i F_4, F_6, F_{10}, F_{12} són linealment independents, ja tenim demostrat el teorema $\square$.

Teorema 1.27 *El cos de funcions modulars $K(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\frac{f_4 f_6}{f_{10}}, \frac{f_6^2}{f_{12}}, \frac{f_4^5}{f_{10}^2}]$.*

Notem que tenim perfectament identificada la dimensió:

$\dim M_{2k}(\Gamma_2) = \sharp\{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}_{2k}^4 \mid 4n_1 + 6n_2 + 10n_3 + 12n_4 = 2k\}$.

Corol·lari 1.28

1. *Si $2k < 10$ $\dim M_{2k}(\Gamma_2) \leq 1$*
2. *$\dim M_{10}(\Gamma_2) = 2$*
3. *$M_{10}(\Gamma_2) = < \Theta^2, f_4 f_6 >_{\mathbb{C}}$*

Igusa formula aquests mateixos teoremes en els següents termes:

Teorema 1.29 *L'anell graduat $\oplus_{k\geq 0} M_{2k}(\Gamma_2) = \mathbb{C}[E_4, E_6, E_{10}, E_{12}]$ on les sèries d'Eisenstein E_i són linealment independents.*

Teorema 1.30 $K(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\frac{E_4 E_6}{E_{10}}, \frac{E_4^3}{E_{12}}, \frac{E_6^2}{E_{12}}]$.

1.10 Els coeficients de Fourier de les E_i de gènere 2

1.10.1 Mètode de càlcul (Maaβ)

Existeixen relacions lineals entre els coeficients de Fourier de les sèries d'Eisenstein de gènere 2 i $k \leq 12$, relacions que ens donen un algoritme recursiu per a calcular aquests coeficients.

-Si $\det T = 0$, mitjançant ϕ l'operador de Siegel, ens podem reduir al cas de dimensió 1 calcular els coeficients de Fourier de la manera següent:

$$a\begin{pmatrix} t_1 & t_2 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix} = -\frac{2k}{B_k}\,\sigma_{k-1}(\mathrm{mcd}(t_1,t_3))$$

-Si $\det T \neq 0$:

Teorema 1.31 *Sigui E_k la sèrie d'Eisenstein de gènere 2 i pes k i a(T) el seu coeficient de Fourier, $T \geq 0$ simètrica. Es defineixen els racionals:*

$$A_0(E_k,h) = a_k(1)(a_k(h)+b_k(h))$$

$$A_2(E_k,h) = \frac{a_k(1)}{k}\,[h(a_k(h)+b_k(h))+d_k(h)] on a_k(h) = -\frac{2k}{B_k}\,\sigma_{k-1}(h)$$

$$b_k(h) = \begin{cases} 2^{10}.3^5.5^2.7^2.131^{-1}.593^{-1}.691^{-1}.\tau(h) & si\ k=12, \\ 0 & si\ k\neq 12. \end{cases}$$

$$d_k(h) = \begin{cases} 2^{10}.3^5.19.43867^{-1}.\tau(h) & si\ k=10, \\ 0 & si\ k\neq 10. \end{cases}$$

on $\tau(h)$ és la funció de Ramanujan i $\sigma_{k-1}(h)$ és la suma de potències k-èssimes dels divisors de h.

Aquí $a_k(h) = a_k\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $g_k(z) = \sum_{h=0}^{\infty} a_k(h)e^{2\pi i h z}$ és la sèrie d'Eisenstein normalitzada de gènere 1 i pes k.

Es tenen les relacions:

$$A_0(E_k,h)=a\begin{pmatrix}1&0\\0&h\end{pmatrix}+2\sum_{0<t\leq\sqrt{h}}\begin{pmatrix}1&0\\0&h-t^2\end{pmatrix}+2\sum_{0\leq t\leq\frac{-1+\sqrt{1+4h}}{2}}\begin{pmatrix}1&1/2\\1/2&h-t(t+1)\end{pmatrix}$$

$$A_2(E_k,h)=\sum_{0<t\leq\sqrt{h}}\begin{pmatrix}1&0\\0&h-t^2\end{pmatrix}(2t)^2+2\sum_{0\leq t\leq\frac{-1+\sqrt{1+4h}}{2}}\begin{pmatrix}1&1/2\\1/2&h-t(t+1)\end{pmatrix}(2t+1)^2$$

-$A_0(E_k,h)$, $A_2(E_k,h)$ es calculen fàcilment i a partir d'ells s'obtenen successivament tots els coeficients:

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&h\end{pmatrix}\text{ i }a\begin{pmatrix}1&1/2\\1/2&h\end{pmatrix}\text{ amb }h\geq 0$$

Es poden obtenir la resta de coeficients en virtut del lema (ja vist) i teorema següents:

Lema 1.32 $a(T[U])=a(U^tTU)=a(T)\forall U\in SL(n,\mathbb{Z})$. *És a dir,* $a(T)$ *és una funció de la classe d'equivalència unimodular de* T *i només depèn de* $4\mid t_1t_3-t_2^2\mid$ *i de* $e(T)=mcd(t_1,2t_2,t_3)$.

-Es poden calcular els coeficients $a(T)$ per $e(T)=1$ i els que falten mitjançant:

Teorema 1.33 $a_k\begin{pmatrix}t_1&t_2\\t_2&t_3\end{pmatrix}=\sum_{d|e(T),\,d>0}d^{k-1}a_k\begin{pmatrix}1&\frac{t_2}{d}\\\frac{t_2}{d}&\frac{t_1t_3}{d^2}\end{pmatrix}$ *per* $T>0$

Finalment veiem els primers coeficients dels desenvolupaments en sèrie de les sèries d'Eisenstein de pesos parells, desenvolupaments als que ja se'ls ha aplicat prèviament el canvi de Siegel:

1.10.2 Exemples

$$E_4(\tau) = 1 + 240q_1q_2^2 + 240q_1q_2^2q_3 + 240q_1^2q_2^2q_3 + 13440q_1^2q_2^3q_3 + 2160q_1^2q_2^4 +$$

$$30240q_1^2q_2^4q_3 + 2160q_1^2q_2^4q_3 + 13440q_1^2q_2^5q_3 + 30240q_1^3q_2^4q_3 + \cdots$$

$$E_6(\tau) = 1 - 504q_1q_2^2 - 504q_1q_2^2q_3 - 504q_1^2q_2^2q_3 + 4435q_1^2q_2^3q_3 - 16632q_1^2q_2^4 +$$

$$166320q_1^2q_2^4q_3 - 16632q_1^2q_2^4q_3 + 44352q_1^2q_2^5q_3 + 166320q_1^3q_2^4q_3 + \cdots$$

$$E_8(\tau) = 1 + 480q_1q_2^2 + 480q_1q_2^2q_3 + 480q_1^2q_2^2q_3 + 26880q_1^2q_2^3q_3 + 61920q_1^2q_2^4 +$$

$$175680q_1^2q_2^4q_3 + 61920q_1^2q_2^4q_3 + 26880q_1^2q_2^5q_3 + 175680q_1^3q_2^4q_3 + \cdots$$

$$E_{10}(\tau) = 1 - 264q_1q_2^2 - 264q_1q_2^2q_3 - 264q_1^2q_2^2q_3 + \tfrac{227244864}{43867}q_1^2q_2^3q_3 -$$

$$135432q_1^2q_2^4 + \tfrac{2626026480}{43867}q_1^2q_2^4q_3 - 135432q_1^2q_2^4q_3 + \cdots$$

$$E_{12}(\tau) = 1 + \tfrac{65520}{691}q_1q_2^2 + \tfrac{65520}{691}q_1q_2^2q_3 + \tfrac{65520}{691}q_1^2q_2^2q_3 + \tfrac{22266840960}{53678953}q_1^2q_2^3q_3 -$$

$$+\tfrac{1342500480}{691}q_1^2q_2^4 + \tfrac{456798756960}{53678953}q_1^2q_2^4q_3 + \tfrac{1342500480}{691}q_1^2q_2^4q_3 + \cdots$$

Bibliografia

[Fr 83] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*. GMW 254. Springer, 1983.

[Ga 00] P. Gaudry, *Algotithmique des courbes hyperelliptiques et applications a la cryptologie*, tesi doctoral 2000.`http://www.loria.fr/~gaudry/papers.html`.

[Ig 62] J. I. Igusa, 'On Siegel modular forms of genus two', *Amer. J. Math.* 84 (1962), pp. 175-200.

[Ig 81b] J. I. Igusa, 'On the nullwerte of Jacobians of odd theta functions', *Symp. Math.* vol. XXIV (1979), pp. 83-95.

[Kli 90] H. Klingen, *Introductory lectures on Siegel modular forms*. Cambridge Studies in Adv. Math. 20. CUP, 1990.

[Maa 71] H. Maaβ, *Siegel Modular Forms and Dirichlet series*. Lecture Notes in Math. 216. Springer-Verlag, 1971.

[Maa 78] H. Maaβ, 'Lineare relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades', *Math. Ann.* 232 (1978), pp. 163-175.

[Ru 95] B. Runge, 'On Siegel modular forms II', *Nagoya Math. J.* 138 (1995), pp. 179-197.

[Sie 55] C. Siegel, 'Zur Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades'. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 8 (1955), pp. 677-681.

[vdG 07] G. van der Geer, 'Siegel modular forms', preprint, 2007.

Capítol 2

El grup modular. Domini fonamental

A. Rio

Departament de Matemàtica Aplicada II

Universitat Politècnica de Catalunya

Edifici Omega. Jordi Girona, 1–3. E-08034, Barcelona

ana.rio@upc.edu

Introducció

Les anomenades formes modulars de Siegel van ser investigades per Carl Ludwig Siegel durant la dècada 1930-40 amb el propòsit d'estudiar formes quadràtiques de manera analítica. Les propietats de les sèries theta de formes quadràtiques enteres definides positives porten a considerar el conjunt de funcions que tenen propietats similars i així s'arriba al conjunt de formes modulars. En aquest volum les presentarem com a generalització de les formes modulars clàssiques, que constitueix el cas $1-$dimensional. Així doncs, haurem de començar per trobar generalitzacions adients tant per al grup modular $SL(2,\mathbb{Z})$ com per al semiplà superior $\mathbb{H}$. La connexió entre ambdós objectes s'obté en considerar els elements del grup com a transformacions analítiques del semiplà; és a dir, pel fet que el grup $SL(2,\mathbb{R})$ opera sobre el semiplà superior com a grup de transformacions biholomorfes

$$z \longrightarrow \gamma\, z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

2.1 El grup simplèctic

El grup simplèctic sobre $\mathbb{R}$ és un subgrup del grup lineal definit per unes equacions algebraiques, cosa que ens fa veure'l de manera natural com a grup algebraic.

2.1.1 Matrius simplèctiques

Una matriu M, de dimensió $2n \times 2n$, a coeficients en un anell unitari commutatiu, és una matriu simplèctica si

$$M^T \Omega M = \Omega$$

on Ω és una matriu *antisimètrica invertible* fixada.

A l'apartat següent veurem que ens podem restringir a la forma estàndard

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix},$$

amb I_n la matriu identitat $n \times n$. Així doncs, d'ara en endavant considerarem fixada aquesta matriu Ω, que compleix $\det \Omega = 1$ i $\Omega^{-1} = -\Omega = \Omega^T$.

Si considerem el cas $n = 1$, aleshores

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

i tenim

$$M^T \Omega M = \begin{pmatrix} 0 & ad-bc \\ bc-ad & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, les matrius 2×2 simplèctiques són exactament les matrius de determinant 1.

Proposició. 2.1.1 *Si M és una matriu simplèctica, aleshores*

i) M és invertible i M^{-1} també és simplèctica.

ii) M^T és simplèctica.

Si M i N són matrius simplèctiques, aleshores MN és simplèctica

Demostració: Es comprova de manera immediata que la matriu M té inversa $M^{-1} = \Omega^{-1}M^T\Omega$. I, fent servir la notació M^{-T} per indicar la matriu $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$, tenim

$$M^{-T}\Omega M^{-1} = M^{-T}\Omega(\Omega^{-1}M^T\Omega) = \Omega.$$

Per tant, la matriu M^{-1} és simplèctica. D'altra banda, la igualtat

$$M\Omega M^T = M\Omega(\Omega M^{-1}\Omega^{-1}) = -MM^{-1}(-\Omega) = \Omega$$

prova que la transposada M^T és també una matriu simplèctica. Finalment, si tant M com N són simplèctiques, aleshores

$$(MN)^T\Omega MN = N^TM^T\Omega MN = \Omega$$

i el seu producte és novament una matriu simplèctica. □

Si considerem la descomposició de M en blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

amb A, B, C, D matrius $n \times n$, aleshores obtenim la caracterització següent:

$$M \text{ simplèctica } \Leftrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} D^T & -B^T \\ -C^T & A^T \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A^TD - C^TB = \mathrm{I}_n \\ A^TC = C^TA \\ D^TB = B^TD \end{cases}$$

Amb aquesta caracterització podem reconèixer fàcilment dues importants famílies de matrius simplèctiques:

Translacions: Si S és una matriu $n\times n$ *simètrica*, aleshores $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & S \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ és simplèctica.

Rotacions: Si V és una matriu $n\times n$ *invertible*, aleshores $\begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V^{-T} \end{pmatrix}$ és simplèctica.

2.1.2 Espais vectorials simplèctics

Un *espai vectorial simplèctic de dimensió finita* és (E,ω), on E és un espai vectorial de dimensió parell i ω és una forma bilineal antisimètrica no degenerada definida sobre E.

Un endomorfisme $L : E \to E$ és simplèctic si conserva la forma bilineal ω:

$$\omega(Lu, Lv) = \omega(u, v)\,.$$

El conjunt de tots els endomorfismes simplèctics formen un grup de Lie, anomenat grup simplèctic i denotat per $Sp(E)$ o $Sp(E,\omega)$.

Fixant una base de E, la condició de preservació de la forma ω s'expressa matricialment en la forma $M^T\Omega M = \Omega$, amb Ω matriu antisimètrica invertible. Una versió modificada del mètode de Gram-Schmidt mostra que tot espai vectorial simplèctic de dimensió finita té una *base de Darboux* (cf. [2], Teorema 8.22), és a dir, una base en la qual la matriu associada a la forma ω és la estàndard

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Així doncs, podem limitar-nos a l'estudi de les matrius simplèctiques tal com les hem considerat a l'apartat anterior.

2.1.3 El grup simplèctic

Sigui R un anell commutatiu unitari. A la proposició 2.1.1 hem provat que

$$Sp(n, R) = \left\{M \in M_{2n}(R) \mid M^T\Omega M = \Omega\right\} \subseteq \mathrm{GL}(2n, R)$$

és un grup tancat per transposició. El subgrup $Sp(n,\mathbb{Z})$ s'anomena **grup modular de Siegel**.

Ja hem observat que $Sp(1,R) = \mathrm{SL}(2,R)$ i, en conseqüència, $Sp(1,\mathbb{Z})$ coincideix amb el grup modular clàssic $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Així mateix, si R és un cos, aleshores $Sp(n,R)$ pot interpretar-se com el grup dels endomorfismes simplèctics de R^{2n}. En aquesta línia podem esmentar algun dels fets més rellevants relatius als *grups de Lie* $Sp(n,\mathbb{R})$ i $Sp(n,\mathbb{C})$:

(i) $Sp(n,\mathbb{R})$ és un grup de Lie real de dimensió $n(2n+1)$.

(ii) $Sp(n,\mathbb{C})$ és un grup de Lie complex de dimensió $n(2n+1)$.

(iii) Ambdós grups són connexos però no compactes.

(iv) $Sp(n,\mathbb{C})$ és simplement connex. $Sp(n,\mathbb{R})$ té grup fonamental isomorf a $\mathbb{Z}$.

(v) L'*àlgebra de Lie* del grup $Sp(n,\mathbb{R})$ està formada per les matrius $P \in M_{2n}(\mathbb{R})$ tals que $P^T\Omega + \Omega P = 0$. És a dir, per les matrius que s'expressen en blocs $n \times n$ en la forma

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \qquad \text{amb } B, C \ \text{ simètriques.}$$

En particular, es tracta de matrius de traça zero i, per tant, d'una subàlgebra de l'àlgebra de Lie del grup especial lineal.

2.1.4 Generadors

Teorema 2.1 *El grup simplèctic $Sp(n,\mathbb{R})$ està generat per les matrius*

- $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$.

- $T(S) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & S \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ *amb $S \in M_n(\mathbb{R})$ simètrica.*

- $U(V) = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & V^{-T} \end{pmatrix}$ *amb* $V \in GL_n(\mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓ: Considerem

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{simplèctica.}$$

Sabem que mitjançant transformacions elementals de files i columnes podem trobar matrius V i V' tals que

$$V A V' = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on r és el rang de la matriu A. Les matrius V, V' són productes de matrius elementals $n \times n$, de manera que ambdues pertanyen a $GL_n(\mathbb{R})$. Així, substituint M per $U(V)\, M\, U(V')$ podem suposar

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Amb aquesta matriu A, la condició $A^T C = C^T A$ implica que

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

amb C_1 matriu $r \times r$ simètrica. A més, atès que les columnes de M són linealment independents, $\det C_4 \neq 0$.

Quan fem el producte $T(\lambda \mathrm{I}_n)\, M$ obtenim una matriu que té com a primer bloc

$$A + \lambda C = \begin{pmatrix} I_r + \lambda C_1 & 0 \\ \lambda C_3 & \lambda C_4 \end{pmatrix}.$$

Podem triar $\lambda \in \mathbb{R}$ de manera que el rang d'aquesta matriu sigui n. Aleshores, pel mateix raonament d'abans podem suposar $A = \mathrm{I}_n$ i, llavors, C simètrica.

Finalment, considerem el producte

$$\Omega^{-1}\, T(C)\, \Omega\, M = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}.$$

Atès que aquesta matriu ha d'ésser simplèctica, tindrem que B_1 és simètrica i $D_1 = \mathrm{I}_n$. Es tracta, doncs, del generador $T(B_1)$ i això finalitza la demostració. Observem que aquesta demostració proporciona un mètode efectiu per escriure qualsevol matriu simplèctica en termes d'aquests generadors. $\square$

Observació 2.2 *Si considerem coeficients enters en lloc de reals, també* $\{\Omega,\ T(S),\ U(V)\}$ *és un conjunt de generadors per al grup modular de Siegel* $Sp(n, \mathbb{Z})$.

Observem que totes les matrius de l'esmentat conjunt de generadors de $Sp(n, \mathbb{R})$ són matrius de determinant 1 i, per tant, deduïm:

Corol·lari 2.3

$$Sp(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

2.2 El semispai superior de Siegel

Si n és un enter positiu, el semispai superior de Siegel en dimensió n és el conjunt de totes les matrius $n \times n$ a coeficients complexos, simètriques i amb part imaginària definida positiva:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_n &= \{Z \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{Im}\, Z > 0\} \\ &= \{X + iY \mid X, Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad Y > 0\}\ . \end{aligned}$$

Per a $n = 1$, es tracta del semiplà superior complex

$$\mathbb{H}_1 = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, \tau > 0\}\, .$$

Si considerem $Z \to (z_{jk})_{j \leq k}$ podem identificar $\mathbb{H}_n$ amb un obert de $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$, o bé amb $Z \to (x_{jk}, y_{jk})_{j \leq k}$ identificar $\mathbb{H}_n$ amb un obert de $\mathbb{R}^{n(n+1)}$.

Proposició. 2.2.1 $\mathbb{H}_n$ *és un domini convex de* $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$.

Demostració: Si $Z_1 = X_1 + iY_1$ i $Z_2 = X_2 + iY_2$ pertanyen a $\mathbb{H}_n$ i $0 \leq \lambda \leq 1$, aleshores $\lambda Z_1 + (1 - \lambda) Z_2$ és una matriu simètrica. Per veure que la seva part imaginària és definida positiva considerem un vector $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Llavors

$$v^T(\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2)v = \lambda v^T Y_1 v + (1-\lambda)v^T Y_2 v > 0\,.$$

$\square$

2.2.1 Acció del grup simplèctic

L'acció del grup simplèctic real $Sp(n,\mathbb{R})$ sobre el semispai superior de Siegel es realitza mitjançant el que s'anomenen *transformacions de Möbius generalitzades*:

$$\begin{array}{rcl} Sp(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{H}_n & \longrightarrow & \mathbb{H}_n \\ \left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Z\right) & \mapsto & M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \end{array}$$

Clarament, $\mathrm{I}_{2n}\langle Z\rangle = Z$, i per provar que es tracta efectivament d'una acció de grup haurem de provar que $M\langle Z\rangle$ està ben definit, atès que $CZ+D$ és una matriu invertible, i pertany a $\mathbb{H}_n$, i que es compleix $M_1M_2\langle Z\rangle = M_1\langle M_2\langle Z\rangle\rangle$.

Lema 2.4 *Siguin* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R})$ *i* $Z \in \mathbb{H}_n$. *Definim* $E := AZ+B$ *i* $F := CZ+D$, *de manera que* $M\langle Z\rangle = E\,F^{-1}$ *i*

$$M\begin{pmatrix} Z \\ \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$$

pot considerar-se com a "model projectiu de l'acció" anterior.

i) $E^T F = F^T E$.

ii) $-\dfrac{1}{2i}(E^* F - F^* E) > 0$, *on* * *indica la conjugada hermítica.*

iii) F *és invertible.*

DEMOSTRACIÓ:

i) $$E^T F - F^T E = (E^T \;\; F^T)\,\Omega \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = (Z^T \;\; \mathrm{I}_n)\, M^T \Omega M \begin{pmatrix} Z \\ \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

$$= (Z^T \;\; \mathrm{I}_n)\,\Omega \begin{pmatrix} Z \\ \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = Z^T - Z = 0.$$

ii) $$-\frac{1}{2i}(E^* F - F^* E) = -\frac{1}{2i}(Z^* \;\; \mathrm{I}_n)\, M^T \Omega M \begin{pmatrix} Z \\ \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2i}(Z^* \;\; \mathrm{I}_n)\,\Omega \begin{pmatrix} Z \\ \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2i}(Z - Z^*) > 0$$

iii) Si $v \in \mathbb{C}^n$,

$$Fv = 0 \;\Rightarrow v^* F^* = 0 \;\Rightarrow v^*(E^* F - F^* E)v = 0 \;\Rightarrow v = 0.$$

□

Amb els resultats d'aquest lema tenim que $M\langle Z\rangle = EF^{-1}$ és una matriu simètrica:

$$E^T F = F^T E \Rightarrow (E\,F^{-1})^T = F^{-T} E^T = F^{-T}(F^T E\,F^{-1}) = E\,F^{-1}\,,$$

i que la seva part imaginària és definida positiva:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i}(E^* F - F^* E) > 0 \quad &\Rightarrow -\frac{1}{2i} F^*((F^{-1})^* E^* - EF^{-1})F > 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2i}(EF^{-1} - (EF^{-1})^*) > 0. \end{aligned}$$

Observació 2.5 *Si $Y = \operatorname{Im} Z$, aleshores la part imaginària de $M\langle Z\rangle$ és*

$$Y^\star = (C\bar{Z} + D)^{-T}\, Y (CZ + D)^{-1}$$

i es compleix

$$\det Y^\star = |\det(CZ + D)|^{-2} \det Y.$$

Hem completat doncs la prova de $M\langle Z\rangle \in \mathbb{H}_n$ i només ens falta veure que si $M_1, M_2 \in Sp(n,\mathbb{R})$ i $Z \in \mathbb{H}_n$, llavors

$$M_1\langle M_2\langle Z\rangle\rangle = M_1M_2\langle Z\rangle.$$

Això és fàcil de comprovar directament de la definició de $M\langle Z\rangle$ i immediat si utilitzem el model projectiu, atès que només es tracta de l'associativitat del producte de matrius.

Proposició. 2.2.2 *L'acció del grup simplèctic $Sp(n,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}_n$ és transitiva.*

DEMOSTRACIÓ: Vegem que $X + iY \in \mathbb{H}_n$ està a l'òrbita de $i\,\mathrm{I}_n$. Considerem en primer lloc la translació $M_1 = T(X) = \begin{pmatrix} Id & X \\ 0 & Id \end{pmatrix}$. D'altra banda, atès que Y és una matriu simètrica real amb tots els valors propis estrictament positius, existeix una matriu invertible P tal que $Y = P^{-1}DP$, on D és una matriu diagonal real amb tots els elements diagonals estrictament positius. Definim $\sqrt{Y} = P^{-1}\sqrt{D}P$. Si considerem la rotació $M_2 = U(\sqrt{Y}) = \begin{pmatrix} \sqrt{Y} & 0 \\ 0 & \sqrt{Y}^{\,-1} \end{pmatrix}$, tenim

$$M_1M_2\begin{pmatrix} i\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{Y} + X\sqrt{Y}^{\,-1} \\ \sqrt{Y}^{\,-1} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad M_1M_2\langle i\,\mathrm{I}_n\rangle = X + iY\,.$$

□

Com sempre que tenim una acció d'un grup sobre un conjunt, fixar un element del grup proporciona una bijecció del conjunt. En aquest cas, per a cada matriu simplèctica M tenim una bijecció

$$\begin{array}{rcl} \varphi_M : \mathbb{H}_n & \longrightarrow & \mathbb{H}_n \\ Z & \rightarrow & M\langle Z\rangle\,. \end{array}$$

Aquestes transformacions simplèctiques són holomorfes, atès que són racionals, i biholomorfes, atès que la transformació inversa de φ_M és $\varphi_{M^{-1}}$.

Proposició. 2.2.3

$$\begin{array}{rcl} Sp(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Bihol}(\mathbb{H}_n) \\ M & \rightarrow & \varphi_M \end{array}$$

és morfisme de grups de nucli $\{\pm \mathrm{I}_{2n}\}$.

Demostració: Pel fet de tenir una acció, aquesta aplicació és un morfisme de grups. Un element del nucli serà una matriu simplèctica

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

que operi a $\mathbb{H}_n$ com la identitat. Aleshores, $M\langle i\mathrm{I}_n\rangle = i\mathrm{I}_n$ i d'aquí es dedueix $D = A,\ C = -B$. Prenent per exemple $Z = \mathrm{I}_n + i\mathrm{I}_n$ com a punt fix, deduïm que $B = 0$. Però la matriu

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

opera com la identitat si, i només si, $AX = XA$ per a tota matriu simètrica real X. Aquesta condició ens dóna $A = \lambda\mathrm{I}_n$ amb $\lambda \in \mathbb{R}$. Atès que $1 = \det M = (\det A)^{2n} = (\lambda)^{2n}$, ha d'ésser $\lambda = \pm 1$. És a dir, $M = \pm \mathrm{I}_{2n}$. □

Observació 2.6 *Siegel va demostrar (cf. [7]) que el grup projectiu simplèctic és, de fet, isomorf al grup de biholomorfismes*

$$Sp(n, \mathbb{R})/\{\pm\mathrm{I}_n\} \simeq \mathrm{Bihol}(\mathbb{H}_n).$$

2.2.2 Model de $\mathbb{H}_n$ com a espai homogeni

Atès que l'acció de $Sp(n, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}_n$ és transitiva, si fixem un punt, aleshores $\mathbb{H}_n$ és la seva òrbita i, per tant, s'identifica amb el conjunt de classes mòdul l'estabilitzador.

Fixem el punt $Z = i\mathrm{I}_n \in \mathbb{H}_n$. Una matriu simplèctica M estabilitza $i\mathrm{I}_n$ si, i només si,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

amb $A^T A + B^T B = \mathrm{I}_n$ i $A^T B$ simètrica. És a dir, si, i només si, la matriu simplèctica M és també ortogonal. Definim

$$K_n = Sp(n, \mathbb{R}) \cap O(2n, \mathbb{R})$$

i tenim, doncs, una estructura d'espai homogeni donada per

$$\mathbb{H}_n \simeq Sp(n, \mathbb{R})/K_n.$$

K_n és un subgrup compacte maximal de $Sp(n, \mathbb{R})$ (cf. [5]) i

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \to A + iB$$

estableix un isomorfisme amb el grup unitari

$$K_n \cong U_n = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M^*M = \mathrm{I}_n\},$$

atès que $(A - iB)^T(A + iB) = A^TA + i(A^TB - B^TA) + B^TB = \mathrm{I}_n$.

D'aquesta interpretació (cf. [8]) també s'obté per a $\mathbb{H}_n$ una estructura de varietat complexa de dimensió complexa $n(n + 1)/2$.

2.2.3 Transformació de Cayley. Model de $\mathbb{H}_n$ com a domini simètric fitat

Definim el *disc unitat*

$$\mathbb{D}_n = \left\{W \in Sym_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{I}_n - W\overline{W} > 0\right\}.$$

Observem que $\mathrm{I}_n - W\overline{W}$ és una matriu hermítica i, d'acord amb la notació anterior, $\mathrm{I}_n - W\overline{W} > 0$ indica que és definida positiva.

Aquest disc $D_n \subseteq \mathbb{C}^{n(n+1)/2}$ és un domini simètric fitat. La paraula simètric fa referència a la involució $W \to -W$.

La transformació de Cayley generalitzada

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{H}_n & \longleftrightarrow & \mathbb{D}_n \\ Z & \to & (Z - i\mathrm{I}_n)(Z + i\mathrm{I}_n)^{-1} \\ i(\mathrm{I}_n + W)(\mathrm{I}_n - W)^{-1} & \leftarrow & W \end{array}$$

és biholomorfa. Estableix, doncs, l'equivalència analítica de $\mathbb{H}_n$ i D_n.

Si prenem

$$L = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{i}\,\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{i}\,\mathrm{I}_n \end{pmatrix},$$

el subgrup $\Phi_n = L\,Sp(n,\mathbb{R})L^{-1}$ de $GL(n,\mathbb{C})$ actua de la mateixa manera al disc unitat $\mathbb{D}_n$ que el grup simplèctic al semispai superior de Siegel. Considerant la involució $W \to -W$ i atesa la transitivitat de l'acció, per a cada punt existeix una involució del grup d'automorfismes biholomorfs que té aquest punt com a únic punt fix.

2.2.4 Acció de $Sp(n,\mathbb{Z})$

$Sp(n,\mathbb{Z})$ subgrup discret de $Sp(n,\mathbb{R})$ i actua de manera pròpiament discontínua en $\mathbb{H}_n$, és a dir, per a cada $Z \in \mathbb{H}_n$ existeix un entorn obert U de Z tal que el conjunt $\{M \in Sp(n,\mathbb{R}) \mid M\langle U\rangle \cap U \neq \emptyset\}$ és finit. En particular, els estabilitzadors són finits.

El quocient $Sp(n,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}_n$ parametritza classes d'isomorfisme de varietats abelianes de dimensió n principalment polaritzades.

2.3 Domini fonamental de Siegel

Siegel va construir un domini fonamental per a l'acció de $Sp(n,\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}_n$. Per analogia amb el cas $n = 1$, la noció d'altura d'un punt $Z = X + iY$ correspon a $\det Y$ i es tracta de buscar en cada òrbita punts d'altura maximal. Però ara, a més de les translacions $T(S)$ tenim les rotacions $U(V)$, amb $V \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, que deixen invariant l'altura.

Si considerem l'espai de les matrius reals simètriques definides positives:

$$\mathrm{P}_n = \{Y \in Sym_n(\mathbb{R}) \mid Y > 0\}\,,$$

l'acció de $Sp(n,\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{H}_n$ restringida al subgrup de les rotacions $U(V)$ indueix l'acció $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \times \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_n$ donada per

$$(V,Y) \mapsto V\,Y\,V^T\,.$$

La connexió entre ambdues accions també és vàlida per als subgrups aritmètics: el grup modular de Siegel $Sp(n,\mathbb{Z})$ i el grup unimodular $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$. Així doncs, podem fer ús de la teoria de reducció de Minkowski.

2.3.1 Domini reduït de Minkowski

Hermann Minkowski va publicar l'any 1905 la seva teoria de reducció de formes quadràtiques definides positives, que consisteix a determinar un representant de cadascuna de les òrbites de l'acció del grup unimodular imposant certes condicions de minimalització.

Si A és una matriu $n \times n$ amb coeficients enters i determinant $\neq 0$, existeix una correspondència bijectiva entre les matrius unimodularment equivalents a A (matrius B tals que $A = UB$ amb $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$) i les bases del $\mathbb{Z}-$mòdul generat per les files de A. Així, la reducció equival a la selecció d'una base canònica per al mòdul de files de A; mòdul que pot pensar-se com una xarxa de $\mathbb{R}^n$. La idea bàsica de Minkowski consisteix en triar una matriu de cada classe d'equivalència, amb files el més *curtes* possible, segons una determinada noció de longitud.

Sigui R_n el conjunt de les matrius $Y \in \mathrm{P}_n$ tals que

1. si $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}^n$ satisfà $\gcd(g_k, \ldots, g_n) = 1$ ($1 \leq k \leq n$), llavors
$$g^T Y g \geq y_{kk}$$
2. $y_{k,k+1} \geq 0$ per a $1 \leq k \leq n-1$.

La demostració dels dos resultats que destaquem a continuació es pot trobar a la secció 2 del primer capítol de [6], dedicat a una completa descripció de la teoria de reducció de Minkowski i de les propietats del domini reduït R_n.

Proposició. 2.3.1 (Desigualtat de Minkowski) *Si $Y = (y_{ij})$ pertany al conjunt R_n, aleshores*

$$y_{11} y_{22} \ldots y_{nn} \leq c_n \det Y \,,$$

on c_n és una constant que només depèn de n. Per exemple, si $n = 2$ podem prendre $c_2 = 4/3$ i aquest valor és minimal.

Teorema 2.7 *El conjunt R_n és un domini fonamental per a l'acció del grup $GL(n, \mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}_n\}$ sobre P_n. És a dir, les imatges de R_n pels elements de $GL(n, \mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}_n\}$ recobreixen P_n sense solapaments.*

En la referència citada es prova també que $R_n \subseteq \mathrm{P}_n \subseteq \mathbb{R}^{n(n+1)}$ és una piràmide convexa fitada per un nombre finit d'hiperplans.

2.3.2 Domini fonamental per a $\mathbb{H}_n/Sp(n,\mathbb{Z})$

Considerem el conjunt F_n format pels elements $Z \in \mathbb{H}_n$ tals que

(i) $|\det(CZ+D)| \geq 1$ per a tot C, D tal que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z})$

(ii) $Y = ImZ$ pertany al *domini reduït de Minkowski*

(iii) $X = (x_{ij}), \quad |x_{ij}| \leq \dfrac{1}{2}$

Si acceptem la teoria de la reducció de Minkowski com a punt de partida i observem que mitjançant translacions sempre podem aconseguir la tercera condició, aleshores és clar que la primera és la condició que cal investigar més detingudament. En primer lloc, caracteritzem com són els parells (C, D) a que fa referència aquesta condició.

Proposició. 2.3.2 *Sigui (C,D) un parell de matrius $n \times n$ amb coeficients enters. Aleshores, les condicions següents són equivalents:*

(i) Existeixen matrius A i B tals que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z})$,

(ii) $C^T D = D^T C$ i per a tota matriu $n \times n$ la condició GC i GD matrius enteres implica G entera.

Direm que un parell en aquestes condicions és un parell simètric coprimer*.*

DEMOSTRACIÓ: Si
$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

és simplèctica, llavors M^T també ho és, d'on es dedueix $C^TD = D^TC$. D'altra banda, tenim que $AD^T - CB^T = \mathrm{I}_n$ i

$$G = G(AD^T - CB^T)^T = ((AD^T - CB^T)G^T)^T = (GD)A^T - (GB)C^T.$$

Per tant, si GC i GD són matrius enteres, aleshores també ho és G.

Suposem ara certa la segona condició de l'enunciat per a (C, D). Observem en primer lloc que llavors per a tota

$$M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z})$$

el parell

$$(C, D)M' = (CA' + DC', CB' + DD')$$

també compleix aquesta condició.

Si calculem $(CA' + DC')(CB' + DD')^T$, de la simetria de $A'B'^T$ i $C'D'^T$ deduïm que els sumands $CA'B'^TC^T$ i $DC'D'^TD^T$ són matrius simètriques. D'altra banda,

$$\begin{aligned} DC'B'^TC^T + CA'D'^TD^T &= D(D'A'^T - \mathrm{I}_n)C^T + CA'D'^TD^T \\ &= DD'A'^TC^T + CA'D'^TD^T - DC^T\,. \end{aligned}$$

En primer terme tenim una matriu de la forma $X + X^T$, i DC^T és simètrica per hipòtesi.

Si suposem que $GCA' + GDC'$ i $GCB' + GDD'$ són enteres, aleshores

$$(GCA' + GDC')D'^T - (GCB' + GDD')C'^T = GC \cdot \mathrm{I}_n + GD \cdot 0$$

i

$$(GCB' + GDD')A'^T - (GCA' + GDC')B'^T = GC \cdot 0 + GD \cdot \mathrm{I}_n$$

també són enteres, d'on deduïm que G és entera.

Fet això, ara provem que existeix $M' \in Sp(n, \mathbb{Z})$ de manera que

$$(C, D)M' = (\mathrm{I}_n, 0)\,.$$

Considerem f_1 la primera fila de (C, D). Atès que les matrius són coprimeres, no pot ser la fila zero, i existirà $M_0 \in Sp(n, \mathbb{Z})$ tal que $M_0 f_1^T = (\alpha, 0, \cdots, 0)$ (cf. lema 2.9). Aleshores, $(C, D)M_0^T = (C', D')$, amb

$$C' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ c'_{21} & & & \\ \vdots & & C'' & \\ c'_{n1} & & & \end{pmatrix} \qquad D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ d'_{21} & & & \\ \vdots & & D'' & \\ d'_{n1} & & & \end{pmatrix}$$

De la simetria de $C'^T D'$ es dedueix $c'_{21} = \cdots = c'_{n1} = d'_{21} = \cdots = d'_{n1} = 0$ i $C_1^T D_1$ simètrica. Atès que (C', D') és coprimer, es dedueix $\alpha = 1$ i (C'', D'') coprimer.

Per inducció, podem suposar que existeix

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \in Sp(n-1, \mathbb{Z})$$

tal que $(C'', D'')M_1 = (\mathrm{I}_{n-1}, 0)$. Sigui

$$\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \\ & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Aleshores, $(C, D)M_0^T \hat{M}_1 = (\mathrm{I}_n, 0)$ i

$$(C, D) = (\mathrm{I}_n, 0)\hat{M}_1^{-1} M_0^{-T} = (0, \mathrm{I}_n)\Omega \hat{M}_1^{-1} M_0^{-T}\,.$$

Així hem construït la matriu simplèctica de la qual C, D és *segona fila*: $M = \Omega \hat{M}_1^{-1} M_0^{-T}$. $\square$

Lema 2.8 *Si $n \geq 2$ i $t_1, \dots, t_n$ són enters, existeix $V \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ tal que*

$$V \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

amb $d = \gcd(t_1, \dots, t_n)$.

DEMOSTRACIÓ: Usar la identitat de Bézout per al cas $n = 2$ i la inducció per al cas general. □

Lema 2.9 *Si $n \geq 1$ i $t_1, \ldots, t_{2n}$ són enters, existeix $M \in Sp(n, \mathbb{Z})$ tal que*

$$M \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

amb $d = \gcd(t_1, \ldots, t_{2n})$.

DEMOSTRACIÓ: Volem veure en primer lloc que hi ha algun transformat $(t'_1, \ldots, t'_{2n})$ tal que o bé les n primeres components són nul.les o bé ho són les n segones. (De fet, n'hi ha prou amb una condició, perquè Ω intercanvia aquests conjunts de components). Si no fós així, podríem triar a' i c' de manera que $a' = gcd(t'_1, \ldots, t'_n)$, $c' = gcd(t'_{n+1}, \ldots, t'_{2n})$ amb la condició $a'c'$ minimal i $a' \geq c'$ (si cal, multipliquem per Ω la matriu de transformació). Segons el lema anterior, usant una rotació $U(V)$ podem suposar $(t'_{n+1}, \ldots, t'_{2n}) = (c', 0, \ldots, 0)$. Aleshores, usant una translació $T(S)$ tindrem el transformat $(t'_1 + c's_{11}, \ldots, t'_n + c's_{n1}, c', 0, \ldots, 0)$ i podem aconseguir que les n primeres components siguin $< c'$. Però això contradiu la minimalitat de l'elecció de a', c'.

Així doncs, hi haurà un transformat que tindrà les segones n components nul.les. Aleshores, apliquem un altre cop el lema anterior i amb una rotació adient tindrem el transformat $(d, 0, \ldots, 0)$. □

Dos parells (C, D) i (C', D') simètrics coprimers són *equivalents* si existeix una matriu $U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ tal que

$$(C', D') = (UC, UD).$$

Usant la proposició anterior es comprova que

$$(C, D),\ (C', D') \text{ equivalents } \iff CD'^T = DC'^T.$$

El lema següent proporciona bons representants per a les classes d'equivalència del conjunt de parells simètrics coprimers.

Lema 2.10 *Si* (C, D) *és simètric coprimer amb* $\operatorname{rang} C = r$*, aleshores és equivalent a un parell de la forma*

$$\left(\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^T, \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} U_1^{-1} \right) ,$$

on $U_1 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ *i* (C_1, D_1) *és un parell simètric coprimer de matrius* $r \times r$ *amb* $\operatorname{rang} C_1 = r$*.*

Dos parells d'aquesta forma, associats a C_1, D_1, U_1 *i* C_2, D_2, U_2 *respectivament, són equivalents si, i només si,*

$$U_2 = U_1 \begin{pmatrix} V & B \\ 0 & V' \end{pmatrix} ,$$

amb $V \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$*, i els parells* (C_1, D_1) *i* $(C_2 V^T, D_2 V^{-1})$ *són equivalents.*

Demostració: Atès que C té rang r, existeixen matrius unimodulars U', U_1 tals que

$$U'C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^T$$

on C_1 és una matriu $r \times r$ de rang r. Sigui

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} = U'DU_1 ,$$

amb D_1 matriu $r \times r$. El parell $(U'C, U'D)$ és simètric i coprimer. El parell $\left(\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} \right)$ també ho és. Per tant, (C_1, D_1) és un parell simètric, $D_3 = 0$ i $D_4 \in \mathrm{GL}(n - r, \mathbb{Z})$. Definim

$$U = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & -D_2 D_4^{-1} \\ 0 & D_4^{-1} \end{pmatrix} U' \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$$

i tenim

$$UC = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^T , \quad UD = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} U_1^{-1} .$$

D'aquí es dedueix que (C_1, D_1) és coprimer.

Per provar la segona part, farem només una implicació perquè l'altra es comprova fàcilment. Suposem que els parells associats a C_1, D_1, U_1 i C_2, D_2, U_2 són equivalents. Aleshores

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_1^T U_2^{-T} \begin{pmatrix} D_2^T & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} U_1^{-1} U_2 \begin{pmatrix} C_2^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Posem

$$U_1^T U_2^{-T} = \begin{pmatrix} W & H' \\ H & W' \end{pmatrix} , \quad U_1^{-1} U_2 = \begin{pmatrix} V & B \\ B' & V' \end{pmatrix} ,$$

amb W i V matrius $r \times r$. La igualtat anterior s'escriu

$$\begin{pmatrix} C_1 W D_2^T & C_1 H' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 V C_2^T & 0 \\ B' C_2^T & V' \end{pmatrix} ,$$

de manera que $C_1 W D_2^T = D_1 V C_2^T$ i $B' = 0$, atès que C_2 és no singular. En particular,

$$U_2 = U_1 \begin{pmatrix} V & B \\ 0 & V' \end{pmatrix}$$

A més $W = V^{-T}$ i $C_1 (D_2 V^{-1})^T = D_1 (C_2 V^T)^T$. Per tant, el parell $(C_2 V^T, D_2 V^{-1})$ és equivalent a (C_1, D_1). □

Un cop tenim ben descrit el conjunt de parells (C, D) que apareixen en la primera condició de definició del conjunt F_n, ens ocupem de la condició en sí, és a dir, $|\det(CZ + D)| \geq 1$, que s'interpreta com una condició d'altura maximal dins de l'òrbita.

Per a $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$, definim l'*altura*

$$h(Z) = \det Y.$$

Com hem vist anteriorment, si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z})$, aleshores

$$h(M\langle Z \rangle) = |\det(CZ + D)|^{-2}\, h(Z).$$

Proposició. 2.3.3 *Cada òrbita de l'acció de $Sp(n\mathbb{Z})$ sobre $\mathbb{H}_n$ conté punts Z d'altura maximal. Aquests punts són els que satisfan*

$$|\det(CZ+D)| \geq 1$$

per a tot parell (C,D) simètric coprimer.

Demostració: La fórmula de transformació i la proposició 2.3.2, ens diuen que si $h(M\langle Z\rangle) \leq h(Z)$ per a tot $M \in Sp(n,\mathbb{Z})$, aleshores $|\det(CZ+D)| \geq 1$ per a tot parell (C,D) simètric coprimer, i recíprocament. Per tant, només hem de veure que en cada òrbita hi ha algun punt d'altura maximal i per fer-ho és suficient veure que si fixem $Z = X+iY \in \mathbb{H}_n$, llavors la desigualtat $|\det(CZ+D)| < 1$ només té un nombre finit de solucions en el conjunt de parells simètrics coprimers, mòdul equivalència.

Sigui $r = \operatorname{rang} C$. Considerem el parell equivalent del lema anterior i escrivim $U_1 = (Q, Q')$, amb Q matriu $n \times r$. Aleshores,

$$CZ+D = \left(\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^T \\ Q'^T \end{pmatrix} Z \begin{pmatrix} Q & Q' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}\right) U_1^{-1}$$

És a dir,

$$CZ+D = \begin{pmatrix} C_1Q^TZQ + D_1 & C_1Q^TZQ' \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix} U_1^{-1}$$

i

$$|\det(CZ+D)| = |\det C_1||\det(Q^TZQ+P)|,$$

amb $P = C_1^{-1}D_1$. Aquesta matriu P és una matriu simètrica $r \times r$ amb coeficients racionals que determina la classe d'equivalència del parell (C_1, D_1):

$$C_1^{-1}D_1 = C_2^{-1}D_2 \iff C_1^{-1}D_1 = (C_2^{-1}D_2)^T \iff C_1D_2^T = D_1C_2^T.$$

Substituint Q per QV amb $V \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, podem suposar que Q^TYQ pertany al domini reduït de Minkowski. Posem $T = Q^TYQ$ i $S = Q^TXQ + P$. Són matrius reals $r \times r$ i tenim

$$\det(Q^TZQ+P) = \det(S+iT).$$

Atès que S és simètrica i T és definida positiva, existeix una matriu $F \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{R})$ tal que $F^T T F = \mathrm{I}_r$ i $F^T S F = H = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_r)$. Aleshores,

$$\begin{aligned} \det(S + iT) &= \det(F^{-T}(H + i\mathrm{I}_r)F^{-1}) = \frac{1}{(\det F)^2} \det(H + i\mathrm{I}_r) \\ &= \det T \cdot \prod_{\alpha=1}^{r} (h_\alpha + i) \end{aligned}$$

i hem de considerar, doncs, la desigualtat

$$|\det C_1| \cdot \det T \cdot \prod_{\alpha=1}^{r} (1 + h_\alpha^2)^{1/2} < 1.$$

D'aquí es dedueix $\det T < 1$. Atès que la matriu $T = (q_\alpha^T Y q_\beta)$, on $q_1, \cdots, q_r$ indiquen les columnes de Q, és reduïda en el sentit de Minkowski, existeix una constant c tal que

$$\prod_{\alpha=1}^{r} q_\alpha^T Y q_\alpha \leq c \det T < c$$

D'altra banda, per a tot α,

$$q_\alpha^T Y q_\alpha \geq \lambda \, q_\alpha^T \, q_\alpha \geq \lambda \,,$$

on λ és el menor dels valors propis de Y. Així doncs, $q_\alpha^T Y q_\alpha < \lambda^{1-r} c$ per a tot α i, en conseqüència, totes les columnes de les possibles Q estan contingudes en un conjunt finit de columnes enteres. Així hem provat que hi ha un nombre finit de matrius Q en les condicions anteriors. Per tant, $\det T = \det Q^T Y Q$ també està limitat a un conjunt finit de valors. Però llavors, els valors $|\det C_1|$ i $h_1, \ldots, h_r$ estan fitats. Aleshores, atès que $T = F^{-T} F^{-1}$, els coeficients de F^{-1} han d'estar fitats. I el mateix passa per a $S = F^{-T} H F^{-1}$ i per a $P = S - Q^T X Q$. Observem que els denominadors dels elements de P divideixen $\det C_1$ i, per tant, estan fitats. Així, P és una matriu racional fitada i amb els denominadors dels seus coeficients també fitats. Deduïm que hi ha un nombre finit de possibles matrius P, cosa que ens dóna un nombre finit de parells (C_1, D_1). Tenint present el lema anterior, això completa la demostració. $\square$

Teorema 2.11 *F_n és un domini fonamental per a l'acció del grup modular de Siegel $Sp(n,\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ sobre el semispai superior de Siegel $\mathbb{H}_n$. És a dir, les imatges de F_n pels elements de $Sp(n,\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ recobreixen $\mathbb{H}_n$ sense solapaments essencials.*

DEMOSTRACIÓ: Amb una rotació

$$\begin{pmatrix} V^T & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} \langle Z \rangle = V^T Z V = V^T X V + i V^T Y V$$

l'altura no canvia i podem aconseguir situar la part imaginària al domini fonamental de Minkowski.

Amb una translació

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & S \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \langle Z \rangle = Z + S = (X + S) + iY$$

l'altura no canvia i podem aconseguir $|x_{ij}| \leq 1/2$.

Atès que en cada òrbita hi ha algun punt d'altura maximal, hem provat que en cada òrbita hi ha algun punt de F_n.

Suposem ara que Z, Z' són punts de F_n tals que

$$Z' = M\langle Z \rangle \text{ amb } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z})\,.$$

Aleshores, $h(Z') = h(Z)$ i $|\det(CZ + D)| = 1 = |\det(-C^T Z' + A^T)|$. Si $C \neq 0$, aquestes equacions són no trivials i Z, Z' estan a la frontera de F_n. Si $C = 0$, aleshores

$$M = T(S)U(V^T) \;\text{ i }\; Z' = X' + iY' = V^T X V + S + i V^T Y V.$$

Atès que Y i Y' estan al domini reduït de Minkowski i $Y' = V^T Y V$, o bé Y, Y estan a la frontera de R_n o bé $V = \pm\,\mathrm{I}_n$. En aquest darrer cas, $X' = X + S$. Llavors, o bé $|x_{ij}| = |x'_{ij}| = 1/2$ o bé $S = 0$. En resum, hem obtingut que si Z, Z' no estan a la frontera de F_n, aleshores $M = \pm \mathrm{I}_{2n}$. $\square$

Per finalitzar aquest capítol, recopilem en el teorema següent alguns resultats addicionals relatius al domini fonamental F_n, per a la demostració dels dos primers ens referim novament al primer capítol de [6], i per al càlcul del volum al llibre de Siegel [7].

Teorema 2.12 *(i) F_n no és compacte .*

(ii) F_n és un tancat de $\mathbb{H}_n$ fitat per un nombre finit de superfícies algebraiques.

(iii) La mètrica de Poincaré del semiplà superior també es generalitza a $\mathbb{H}_n$. La corresponent forma de volum ve donada per

$$(\det Y)^{-(n+1)} \prod_{i \leq j} dX_{ij} dY_{ij} \,.$$

El volum del domini fonamental és

$$\mathrm{Vol}(F_n) = 2\pi^{-n(n+1)/2} \prod_{k=1}^{n} (k-1)! \zeta(2k) \,.$$

Bibliografia

[1] Andrianov, A.N.: Quadratic Forms and Hecke Operators. *Grundlehren der mathematishcen Wissenschaften*, 286. Springer-Verlag, 1987.

[2] Baker, A.: Matrix Groups. Springer-Verlag, 2002.

[3] Donaldson, John L.: Minkowski reduction of integral matrices. *Math. Comp.* 33 (1979), no. 145, 201–216.

[4] Freitag, E,: Siegelsche Modulfunktionen. Springer-Verlag, 1983.

[5] Helgason, S.: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. *Pure and applied mathematics*, 80. Academic Press, 1978.

[6] Klingen, H: Introductory lectures on Siegel modular forms. Cambridge University Press, 1990.

[7] Siegel, C.L.: Symplectic geometry. *Amer. J. Math.* 65 (1943), 1–86.

[8] Warner, F.W.: Foundations of differentiable Manifolds and Lie Groups. Springe-Verlag, 1983.

Capítol 3

Operadors de Hecke

E. Nart
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
Edifici C
E-08193 Bellaterra

El contingut d'aquesta part del seminari s'ha extret íntegrament del Capítol IV del llibre de E. Freitag *Siegelsche Modulfunktionen*, publicat per Springer-Verlag el 1983.

3.1 Àlgebra de Hecke

Continuem denotant $\Gamma = \Gamma_g = \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z})$. Submergim el grup $\Gamma = \Gamma_g$ dins d'un grup $\Delta = \Delta_g$ de matrius racionals similars a les simplèctiques:

$$\Delta := \Delta_g := \bigcup_{m \in \mathbb{Q}^+} \Delta(m), \qquad \Delta(m) := \{M \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Q}) \mid J[M] = mJ\}.$$

Direm que els elements de $\Delta(m)$ tenen *grau* m. El grau d'un producte és el producte dels graus, de manera que Δ és un grup graduat. Si $M \in \Delta(m)$ tenim

$$\det M = m^g, \qquad m^{-1/2}M \in \mathrm{Sp}(g,\mathbb{R}).$$

La segona propietat ens fa veure que M opera sobre $\mathbb{H}_g$ i sobre les funcions de $\mathbb{H}_g$ (amb un pes k prefixat) per les fórmules usuals

$$M\langle Z\rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \qquad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

$$(f\,|_k\,M)(Z) = f(M\langle Z\rangle)\det(CZ+D)^{-k}.$$

De fet, si denotem per $\tilde{M} = m^{-1/2}M$ la transformació simplèctica naturalment associada a M tenim:

$$M\langle Z\rangle = \tilde{M}\langle Z\rangle, \qquad f\,|_k\,M = m^{gk/2}(f\,|_k\,\tilde{M}).$$

Quin interès tenen aquestes matrius, si donen lloc a les mateixes transformacions biholomorfes de $\mathbb{H}_g$? Resposta: la seva acció sobre les formes modulars!

Si f és una forma modular de pes k, la funció $f\,|_k\,M$ depèn només de la classe per l'esquerra $\Gamma_g M$; per tant, si $\mathfrak{m} \subseteq \Delta$ és unió finita de classes per l'esquerra respecte de Γ, posem $\mathfrak{m} = \cup_i \Gamma M_i$, aleshores podem definir un operador $T_{\mathfrak{m}}$ via

$$f\,|_k\,T_{\mathfrak{m}} := \sum_i f\,|_k\,M_i.$$

Si a més a més, $\mathfrak{m}\Gamma = \mathfrak{m}$, aleshores $f\,|_k\,T_{\mathfrak{m}}$ torna a ser una forma modular. En efecte, per a qualsevol $N \in \Gamma$ tenim $\mathfrak{m} = \cup_i \Gamma M_i N$, de manera que el conjunt de classes per l'esquerra $\Gamma M_i N$ és una permutació del conjunt de classes per l'esquerra ΓM_i.

Així doncs, podem fabricar operadors a partir de famílies $\mathfrak{m} \subseteq \Delta$ que descomponguin com unió finita de classes per l'esquerra i que siguin invariants per la multiplicació per la dreta per Γ. Els candidats naturals són les dobles classes $\mathfrak{m} = \Gamma M \Gamma$ d'elements $M \in \Delta$.

Lema 3.1 *Sigui m un enter positiu. El conjunt $\Delta(m)_{\mathbb{Z}} := \Delta(m) \cap M_{2g}(\mathbb{Z})$ és reunió d'un nombre finit de classes per l'esquerra, parametritzades per:*

$$\Delta(m)_{\mathbb{Z}} = \bigcup_{A,B} \Gamma \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

on $A = (a_{ij})$ *recorre totes les matrius triangulars superiors enteres satisfent*

$$a_{ii} > 0, \quad 0 \leq a_{ij} < a_{jj},\ 1 \leq i \leq j \leq g, \quad mA^{-1} \text{ } \textit{entera};$$

per a cada A *fixada,* D *està determinada per* $A'D = m\mathbf{1}$ *i* B *recorre un sistema de representants de*

$$\{B \in M_g(\mathbb{Z}) \mid AB' \textit{ simètrica}\} \pmod D,$$

on $B \equiv B^* \pmod D$ *vol dir que* $(B - B^*)D^{-1}$ *és entera.*

Teorema 3.1 (Divisors elementals simplèctics) *Sigui* m *un enter positiu i* $M \in \Delta(m)_{\mathbb{Z}}$*. A la doble classe* $\Gamma M \Gamma$ *hi ha una única matriu de la forma* $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_g, d_1, \ldots, d_g)$ *tal, que*

$$a_j > 0,\ a_j d_j = m,\ 1 \leq j \leq g; \qquad a_j | a_{j+1},\ 1 \leq j < g; \qquad a_g | d_g.$$

Definició 3.2 *Definim l'*àlgebra de Hecke $\mathcal{H}(\Gamma, \Delta) = \mathcal{H}(\Gamma_g, \Delta_g)$ *com el* $\mathbb{C}$*-espai vectorial que té per base els símbols* $\Gamma M \Gamma$ *amb* $M \in \Delta$*. Els seus elements els anomenem* operadors de Hecke.

Notació. Sigui m un enter positiu. Si $a_1 | \cdots | a_g$ és una successió d'enters positius tals que $a_g^2 | m$, denotem

$$T_m(a_1, \ldots, a_g) := \Gamma \,\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_g, \frac{m}{a_1}, \ldots, \frac{m}{a_g})\, \Gamma.$$

Denotem per T_m l'operador de Hecke suma de totes les dobles classes contingudes a $\Delta(m)_{\mathbb{Z}}$, i.e.

$$T_m := \sum_{a_1 | \cdots | a_g,\ a_g^2 | m} T_m(a_1, \ldots, a_g),$$

amb els a_i enters positius.

Pel teorema dels divisors elementals simplèctics tenim clarament:

$$T_p = T_p(1, \ldots, 1) = \Gamma \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & p\mathbf{1} \end{pmatrix} \Gamma.$$

Mentre que $T_{p^2} = T_{p^2}^{(0)} + T_{p^2}^{(1)} + \cdots + T_{p^2}^{(g)}$, amb

$$T_{p^2}^{(i)} := T_{p^2}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, p, \ldots, p) = \Gamma\,\mathrm{diag}(\mathbf{1}_i, p\mathbf{1}_{g-i}, p^2\mathbf{1}_i, p\mathbf{1}_{g-i})\,\Gamma.$$

Per descomptat, aquesta àlgebra de Hecke que acabem d'introduir admet un producte. Per definir-lo és convenient submergir l'àlgebra de Hecke dins de l'espai vectorial $\mathcal{L}(\Gamma, \Delta)$ que té per base les classes per l'esquerra ΓM amb $M \in \Delta$. Definim

$$j\colon \mathcal{H}(\Gamma, \Delta) \longrightarrow \mathcal{L}(\Gamma, \Delta), \quad \Gamma M \Gamma = \cup_i \Gamma M_i \mapsto \sum_i \Gamma M_i.$$

A l'espai $\mathcal{L}(\Gamma, \Delta)$ tenim una acció de Γ per la dreta, que consisteix simplement en multiplicar: $(\Gamma M) \cdot N := \Gamma M N$.

Lema 3.2 *L'aplicació j és injectiva i la seva imatge són precisament els vectors invariants per l'acció de Γ per la dreta.*

Identificarem $\mathcal{H}(\Gamma, \Delta)$ amb la seva imatge per j sense fer-ne esment. Podem definir ja el producte de dues dobles classes $\Gamma M \Gamma = \cup_i \Gamma M_i$, $\Gamma M \Gamma = \cup_j \Gamma N_j$ com:

$$(\Gamma M \Gamma) \cdot (\Gamma N \Gamma) := \sum_{i,j} \Gamma M_i N_j.$$

Es comprova ràpidament que aquest element de $\mathcal{L}(\Gamma, \Delta)$ és invariant per la dreta per Γ, i per tant és una combinació lineal de dobles classes:

$$(\Gamma M \Gamma) \cdot (\Gamma N \Gamma) = \sum_{i,j} \Gamma M_i N_j = \sum_{\Gamma P \Gamma \subseteq \Gamma M \Gamma N \Gamma} c_P\, \Gamma P \Gamma.$$

Exemples.

(i) $(\Gamma M \Gamma) \cdot (\Gamma a \mathbf{1} \Gamma) = \Gamma a M \Gamma$, per a tot $a \in \mathbb{Q}^+$.

(ii) Si N, $M \in \Delta$ són enteres i $\gcd(\det N, \det M) = 1$, aleshores

$$(\Gamma M \Gamma) \cdot (\Gamma N \Gamma) = \Gamma M N \Gamma.$$

(iii) Si $g = 1$,

$$T_{p^2}(1) = (T_p)^2 - (p+1)T_{p^2}(p),$$
$$T_{p^n}(1) = T_p \cdot T_{p^{n-1}}(1) - pT_{p^2}(p)\cdot T_{p^{n-2}}(1), \qquad \text{si } n > 2.$$

Proposició 3.3 *Aquest producte dota $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta)$ d'una estructura de $\mathbb{C}$-àlgebra commutativa, amb unitat $\Gamma = \Gamma\mathbf{1}\Gamma$. L'aplicació natural*

$$\mathcal{H}(\Gamma,\Delta) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_k(\Gamma))$$

és un homomorfisme de $\mathbb{C}$-àlgebres per a tot k.

3.2 Estructura de $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta)$

Per a cada nombre primer p considerem

$$\Delta_p := \Delta_{g,p} := \Delta \cap \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}[1/p])$$

el subgrup format per les matrius de Δ amb entrades que tenen denominador una potència de p, i el determinant és també una potència de p (amb exponent enter).

La subàlgebra $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta_p) \subseteq \mathcal{H}(\Gamma,\Delta)$ és anomenada la *p-component local* de l'àlgebra de Hecke.

Proposició 3.4 $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta) = \bigotimes_p \mathcal{H}(\Gamma,\Delta_p)$.

Dem. Per l'exemple 2 i el teorema dels divisors elementals, cada element de la base de $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta)$ descompon de manera única en producte d'un nombre finit d'elements, cadascun de la base d'un $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta_{p_i})$ per a primers p_i diferents.

$$T_m(a_1,\dots,a_g) = T_{(m)_{p_1}}((a_1)_{p_1},\dots,(a_g)_{p_1})\cdots T_{(m)_{p_r}}((a_1)_{p_r},\dots,(a_g)_{p_r}),$$

on $(a)_p$ denota $p^{v_p(a)}$ per a qualsevol nombre racional a. □

L'objectiu és, doncs, determinar l'estructura de les p-components locals $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta_p)$. Veiem que ens podem limitar a treballar amb matrius enteres.

Lema 3.5 *Sigui* $\check{\mathcal{H}}(\Gamma,\Delta_p)$ *la subàlgebra de* $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta_p)$ *generada per les dobles classes de matrius enteres de* Δ_p*. Denotem per simplicitat:*

$$T := T_{p^2}(p,\dots,p) = T_{p^2}^{(0)} = \Gamma(p\mathbf{1})\Gamma \in \check{\mathcal{H}}(\Gamma,\Delta_p).$$

Aleshores, $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta_p) = \check{\mathcal{H}}(\Gamma,\Delta_p)[T^{-1}]$.

Dem. Per a qualsevol element de la base de $\mathcal{H}(\Gamma,\Delta_p)$ tenim (exemple 1)

$$T_{p^r}(p^{r_1},\dots,p^{r_g})\,T^e = T_{p^{r+2e}}(p^{r_1+e},\dots,p^{r_g+e}),$$

i aquest element caurà dins $\check{\mathcal{H}}(\Gamma,\Delta_p)$ per a e prou gran. □

Determinarem l'estructura de $\check{\mathcal{H}}(\Gamma,\Delta_p)$ per un argument d'inducció sobre g. A tal fi, considerem l'aplicació lineal

$$\varphi\colon \check{\mathcal{H}}(\Gamma_g,\Delta_{g,p}) \longrightarrow \check{\mathcal{H}}(\Gamma_{g-1},\Delta_{g-1,p})$$

determinada per

$$T_{p^r}(p^{r_1},\dots,p^{r_g}) \mapsto \begin{cases} T_{p^r}(p^{r_2},\dots,p^{r_g}), & \text{si } r_1 = 0,\\ 0, & \text{si } r_1 > 0.\end{cases}$$

Es comprova fàcilment que aquesta aplicació φ determina un epimorfisme de $\mathbb{C}$-àlgebres amb nucli l'ideal principal generat per l'operador $T = T_{p^2}^{(0)}$ del lema anterior.

Teorema 3.3 *L'àlgebra* $\check{\mathcal{H}}(\Gamma,\Delta_p)$ *està generada pels* $g+1$ *operadors*

$$T_p, \quad T_{p^2}^{(0)}, \ \dots, \ T_{p^2}^{(g-1)},$$

i aquests operadors són algebraicament independents.

El fet que aquests operadors generen l'àlgebra es comprova molt fàcilment per inducció. Per a $g=1$ és conseqüència de l'exemple 3. Si suposem el resultat cert per a $g-1$, es dedueix automàticament per a g, ja que

(i) φ és epimorfisme,

(ii) Els generadors de $\check{\mathcal{H}}(\Gamma_{g-1}, \Delta_{g-1,p})$ són la imatge per φ de g dels nostres pretesos generadors:

$$T_p \mapsto T_p, \quad T_{p^2}^{(1)} \mapsto T_{p^2}^{(0)}, \quad \ldots, \quad T_{p^2}^{(g-1)} \mapsto T_{p^2}^{(g-2)},$$

(iii) L'altre operador, $T = T_{p^2}^{(0)}$, genera el nucli de φ.

En canvi, la demostració de que aquests operadors són algebraicament independents ocupa deu pàgines del llibre de Freitag.

3.3 Commutació d'operadors de Hecke amb l'operador de Siegel

Fixem un pes k i considerem l'aplicació a nivell de classes per l'esquerra,

$$(\ )^*\colon \mathcal{L}(\Gamma_g, \Delta_g) \longrightarrow \mathcal{L}(\Gamma_{g-1}, \Delta_{g-1}),$$

determinada per:

$$L = \Gamma_g M,\ M \in \Delta_g \quad \mapsto \quad L^* := d^{-k}\, \Gamma_{g-1} M_1,\ M_1 \in \Delta_{g-1},$$

on (recordeu el Lemma 3.1)

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} * & * \\ * & B_1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ * & D_1 \end{pmatrix}. \tag{3.3.1}$$

Es comprova fàcilment que en aquesta situació, $M_1 := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ pertany a Δ_{g-1} i té el mateix grau que M.

Teorema 3.4 *Aquesta aplicació indueix un epimorfisme de $\mathbb{C}$-àlgebres*

$$(\ )^*\colon \mathcal{H}(\Gamma_g, \Delta_g) \longrightarrow \mathcal{H}(\Gamma_{g-1}, \Delta_{g-1})$$

amb la propietat

$$(f\,|_k\, T)\,|\,\phi = (f\,|\,\phi)\,|_k\, T^*, \quad \forall f \in M_k(\Gamma),\ \forall T \in \mathcal{H}(\Gamma_g, \Delta_g).$$

Corol·lari 3.6 *(i) Els espais de formes parabòliques $S_k(\Gamma)$ són estables per l'acció de l'àlgebra de Hecke.*

(ii) Si $f \in M_k(\Gamma)$ és forma pròpia de tots els $T \in \mathcal{H}(\Gamma_g, \Delta_g)$, aleshores $f \mid \phi$ és també forma pròpia de tots els $\mathcal{H}(\Gamma_{g-1}, \Delta_{g-1})$.

Càlcul de T_p^*

Acabem aquest paràgraf amb un càlcul explícit de T_p^*. Aquest càlcul és essencialment equivalent a un recompte del nombre de classes per l'esquerra contingudes a $T_p = \Gamma\,\mathrm{diag}(\mathbf{1}_g, p\mathbf{1}_g)\Gamma$.

Sigui $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ un representant d'una classe per l'esquerra de T_p satisfent les condicions del Lemma 3.1. La matriu $A = (a_{ij})$ tindrà n 1's i $g-n$ p's a la diagonal, per a algun $0 \le n \le g$. Recordem que per a tot parell $i < j$ tenim

$$a_{ij} = 0, \quad \text{si } a_{jj} = 1; \quad 0 \le a_{ij} < p, \quad \text{si } a_{jj} = p.$$

Siguin $1 \le i_1 < \cdots < i_n \le g$ les posicions amb 1's a la diagonal i considerem la matriu $P \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ que té les files $i_1, \ldots, i_n$ de la matriu identitat com a primeres n files, i les restants files de la identitat com a darreres $g-n$ files, respectant els seu ordre. Sigui $Q \in \mathrm{GL}_g(\mathbb{Z})$ la matriu obtinguda de manera anàloga permutant les columnes de la matriu identitat. Tenim

$$PAQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & * \\ 0 & X \end{pmatrix},$$

on $X \in M_{g-n}(\mathbb{Z})$ és una matriu triangular superior, amb p's a la diagonal i enters positius menors que p per damunt de la diagonal . Ara, pA^{-1} és una matriu entera; per tant, $p(PAQ)^{-1}$ és una matriu entera, i per tant, pX^{-1} és una matriu entera. Això obliga a que $X = p\mathbf{1}_{g-n}$ (exercici); hem vist doncs que $a_{ij} = 0$ sempre que $a_{ii} = a_{jj} = p$.

Lema 3.7 *Les matrius $B = (b_{ij}) \in M_g(\mathbb{Z})$ que són simètriques i satisfan*

$$b_{ij} = 0 \ \ \text{si } \{i,j\} \nsubseteq \{i_1, \ldots, i_n\}, \qquad 0 \le b_{ij} < p \ \ \text{si } \{i,j\} \subseteq \{i_1, \ldots, i_n\}$$

són un sistema de representants del conjunt de classes d'equivalència de
$\{B \in M_g(\mathbb{Z}) \mid AB'$ simètrica$\}$ per la relació d'equivalència d'esser congruents mòdul D.

Dem. Denotem $\mathcal{B}(A) = \{B \in M_g(\mathbb{Z}) \mid AB' \text{ simètrica}\} \pmod D$, per a qualsevol matriu entera A. Es comprova fàcilment que les matrius $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ amb $B_1 = (b_{ij})$ simètrica tal que $0 \le b_{ij} < p$ per a tot i, j, són un sistema de representants de $\mathcal{B}(PAQ)$ per a la matriu $PAQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n & * \\ 0 & p\mathbf{1}_{g-n} \end{pmatrix}$.

D'altra banda, tenim una bijecció evident

$$\mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(PAQ), \qquad B \mapsto PB(Q')^{-1} = PBQ,$$

ja que $Q' = Q^{-1}$. Això prova el lemma. $\square$

Corol·lari 3.8 *Sigui $\mathcal{L}(g)$ el conjunt de classes per l'esquerra de T_p en gènere g. Considerem la partició $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_p$ determinada pel fet que una classe $L = \Gamma_g M \in \mathcal{L}$, amb $M \in \Delta_g$ satisfent (3.3.1) tingui $a = 1$ o $a = p$. Aleshores, la correspondència $L = \Gamma_g M \mapsto \Gamma_{g-1} M_1 = d^k L^*$ estableix una bijecció entre $\mathcal{L}_p$ i $\mathcal{L}(g-1)$, i determina una aplicació exhaustiva entre $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}(g-1)$, on cada element de $\mathcal{L}(g-1)$ té p^g antiimages.*

Dem. Si $a = a_{11} = p$ tenim $A = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$. Clarament A_1 recorre totes les possibles submatrius superiors esquerra de les classes de $\mathcal{L}(g-1)$ i B_1 recorre tot $\mathcal{B}(A_1)$.

Si $a = a_{11} = 1$ tenim $A = \begin{pmatrix} 1 & A_0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & B_0 \\ B_0' & B_1 \end{pmatrix}$. Com abans, A_1, B_1 recorren totes les possiblitats d'objectes semblants en gènere $g-1$, però A_0 té $g-n$ entrades "lliures" (allà on hi ha p a la diagonal de A), B_0 té $n-1$ entrades lliures (allà on hi ha 1 a la diagonal de A), i tenim encara llibertat per al valor de b. En total, tenim p^g parelles (A, B) que donen lloc a la mateixa parella (A_1, B_1). $\square$

Corol·lari 3.9 *El nombre de classes per l'esquerra de T_p és*

$$(p^g + 1)(p^{g-1} + 1) \cdots (p + 1).$$

Dem. Per a $g = 1$ tenim $p + 1$ classes per l'esquerra representades per les matrius

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & p \end{pmatrix}, \ 0 \le a < p. \tag{3.3.2}$$

D'altra banda, pel corol·lari anterior tenim $|\mathcal{L}(g)| = (p^g+1)|\mathcal{L}(g-1)|$. $\square$

Corol·lari 3.10 $T_p^* = (1 + p^{g-k})T_p$

Dem. Retoquem la demostració del Corol·lari 3.8. Si $a = p$ tenim $d = 1$ i la correspondència $L \mapsto L^*$ transforma la suma de les classes per l'esquerra de $\mathcal{L}_p$ en T_p. Si $a = 1$ tenim $d = p$ i la correspondència $L \mapsto L^*$ transforma la suma de les classes per l'esquerra de $\mathcal{L}_1$ en $p^{g-k}T_p$. $\square$

3.4 Formes pròpies de l'àlgebra de Hecke

Com a exemple més significatiu d'una tal forma pròpia tenim les sèries d'Eisenstein.

Proposició 3.11 *Si k és un enter parell, $k > g+1$, la sèrie d'Eisenstein E_k és foma pròpia de tots els operadors de Hecke.*

La demostració és un joc directe (i senzill) amb els coeficients de la sèrie d'Eisenstein.

Lema 3.12 *Siguin m un enter positiu i $\mathfrak{m} \subseteq \Delta(m)_{\mathbb{Z}}$ una unió finita de dobles classes. Suposem que $0 \neq f \in M_k(\Gamma)$ és forma pròpia de $T_{\mathfrak{m}}$ amb valor propi $\lambda \in \mathbb{C}$. Aleshores,*

(i) Si el coeficient 0-èsim de Fourier de f és no nul, tenim forçosament

$$\lambda = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma\backslash\mathfrak{m}} \det(D)^{-k}.$$

En particular, per a $\mathfrak{m} = T_p$ tenim $\lambda = \prod_{n=1}^{g}(1 + p^{n-k})$.

(ii) Si f és parabòlica, tenim $|\lambda| \leq m^{-gk/2}|\Gamma\backslash\mathfrak{m}|$.

Dem. Posem $\mathfrak{m} = \cup_i \Gamma M_i$, amb $M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ 0 & C_i \end{pmatrix}$ satisfent les condicions del Lemma 3.1.

Sigui $a_0 \neq 0$ el coeficient 0-èsim de Fourier de f. El coeficient 0-èsim de Fourier de $f\,|_k\, T_{\mathfrak{m}} = \lambda f$ és doncs λa_0. Comprovem amb un càlcul directe que és $a_0 \sum_i \det(D_i)^{-k}$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} (f\,|_k\, T_{\mathfrak{m}})(it\mathbf{1}) &= \sum_i \det(D_i)^{-k} \lim_{t\to\infty} f(M_i\langle\, it\mathbf{1}\,\rangle) \\ &= \sum_i \det(D_i)^{-k} \lim_{t\to\infty} f(m^{-1}(it\mathbf{1})[A_i'] + B_i A_i') \\ &= a_0 \sum_i \det(D_i)^{-k}.\end{aligned}$$

Suposem ara $\mathfrak{m} = \Gamma\,\mathrm{diag}(\mathbf{1}_g, p\mathbf{1}_g)\Gamma$. Denotem per λ_g el valor propi de T_p en gènere g. Si $g = 1$ deduim de (3.3.2) que $\lambda_1 = 1 + p \cdot p^{-k} = 1 + p^{1-k}$. Si $g > 1$, el Teorema 3.4 i el Corol·lari 3.10 mostren que $\lambda_g = (1 + p^{g-k})\lambda_{g-1}$. Això acaba de provar l'ítem 1.

Si f és parabòlica la funció $f(Z)\det(Y)^{k/2}$ té un màxim absolut Z_0 a $\mathbb{H}_g$:

$$|f(Z)| \leq \left(\frac{\det(Y_0)}{\det(Y)}\right)^{k/2} |f(Z_0)|, \qquad \forall Z \in \mathbb{H}_g.$$

Prenem $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}$ qualsevol i denotem $\tilde{M} = m^{-1/2}M \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$. Apliquem la desigualtat anterior a $Z = M\langle Z_0 \rangle = \tilde{M}\langle Z_0 \rangle$; com que

$$\det(Y) = \det(Y_0)|j(\tilde{M}, Z_0)|^{-2} = \det(Y_0)m^g \det(D)^{-2},$$

la desigualtat queda:

$$|f(M\langle Z_0 \rangle)| \leq m^{-gk/2} \det(D)^k |f(Z_0)|.$$

Finalment,

$$\begin{aligned} |\lambda f(Z_0)| = |(f\,|_k\, T_{\mathfrak{m}})(Z_0)| & \leq \textstyle\sum_i \det(D_i)^{-k} |f(M_i\langle Z_0 \rangle)| \\ & \leq m^{-gk/2} |\Gamma \backslash \mathfrak{m}| |f(Z_0)|. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.13 *Sigui p un nombre primer. Hi ha com a molt una forma modular $f \in M_k(\Gamma)$ que és forma pròpia de T_p i satisfà $a_0(f) = 1$.*

En particular, si k parell, $k > g + 1$, i f és una forma modular satisfent aquestes condicions, aleshores $f = E_k$.

Dem. Suposem que $f, g \in M_k(\Gamma)$ són dues formes pròpies de T_p i $a_0(f) = a_0(g) = 1$. Pel lema anterior, són formes pròpies del mateix valor propi $\lambda = \prod_{n=1}^{g}(1 + p^{n-k})$.

A la força tenim $f - g \in S_k(\Gamma)$. En efecte, si $g = 1$ és evident; si $g > 1$ les formes $f\,|\,\phi$, $g\,|\,\phi$ tornen a satisfer les mateixes condicions, i per un argument d'inducció tindrem $f\,|\,\phi = g\,|\,\phi$ i per tant $f - g$ és parabòlica. Si fos $f \neq g$, pel lema anterior tindríem

$$\prod_{n=1}^{g}(1 + p^{n-k}) \leq p^{-gk/2} \prod_{n=1}^{g}(1 + p^n),$$

i obtenim una contradicció. $\square$

Corol·lari 3.14 $E_k\,|\,\phi = E_k$.

Producte escalar de Petersson

Aquesta part imita amb tot detall el cas de gènere 1. Per completitud repetim els arguments.

Si $f, g \in M_k(\Gamma)$ i una almenys de les dues és parabòlica obtenim un aparellament

$$\langle f, g \rangle := I(f(Z)\overline{g(Z)}\det(Y)^k),$$

on I denota (ambiguament) una certa integral respecte de la forma de volum simplèctica. Aquest aparellament és hermític, definit positiu, i els operadors de Hecke són tots autoadjunts:

$$\langle f\,|_k\,T, g \rangle = \langle f, g\,|_k\,T \rangle, \qquad \forall T \in \mathcal{H}(\Gamma, \Delta).$$

Proposició 3.15 *(i)* $S_k(\Gamma)$ *admet una base de formes pròpies respecte de tota l'àlgebra de Hecke.*

(ii) $E_k(\Gamma) := S_k(\Gamma)^\perp \subseteq M_k(\Gamma)$ *és un subespai estable per l'acció de l'àlgebra de Hecke.*

(iii) $E_k \in E_k(\Gamma)$.

(iv) $M_k(\Gamma) = E_k(\Gamma) \oplus S_k(\Gamma)$.

(v) L'operador de Siegel determina una immersió $\phi\colon E_k \hookrightarrow M_k(\Gamma_{g-1})$.

Dem. Els ítems 1 i 2 són conseqüència immedita del fet que l'aparellament és hermític, definit positiu, i els operadors de Hecke són autoadjunts.

Posem $E_k\,|_k\,T = \lambda_T E_k$ per a tot $T \in \mathcal{H}(\Gamma, \Delta)$. Considerem una forma pròpia simultània $0 \neq g \in S_k(\Gamma)$ i posem $g\,|_k\,T = \mu_T g$ per a tot $T \in \mathcal{H}(\Gamma, \Delta)$. Tenim

$$\lambda_T \langle E_k, g \rangle = \langle E_k\,|_k\,T, g \rangle = \langle E_k, g\,|_k\,T \rangle = \mu_T \langle E_k, g \rangle.$$

Si $\lambda_{T_p} = \mu_{T_p}$, el Lemma 3.13 mostra que $E_k - g = E_k$, d'on $g = 0$. Per tant, $\lambda_{T_p} \neq \mu_{T_p}$ i necessàriament $\langle E_k, g \rangle = 0$. Com que g pot recorrer una base de $S_k(\Gamma)$ tenim $E_k \in E_k(\Gamma)$. Això prova l'ítem 3.

En ser l'aparellament definit positiu tenim forçosament $E_k(\Gamma) \cap S_k(\Gamma) = \{0\}$. D'altra banda, l'aparellament defineix un isomorfisme canònic entre $S_k(\Gamma)$ i el seu espai dual; per tant, per a qualsevol $f \in M_k(\Gamma)$ la forma lineal $\left\langle -, f \right\rangle$ coincidirà amb la forma lineal $\left\langle -, g \right\rangle$ per a alguna $g \in S_k(\Gamma)$. Així doncs, $f - g \in E_k(\Gamma)$, de manera que $M_k(\Gamma) = E_k(\Gamma) + S_k(\Gamma)$. Això prova l'ítem 4.

L'ítem 5 és clar perquè el nucli de ϕ restringit a $E_k(\Gamma)$ és $E_k(\Gamma) \cap S_k(\Gamma) = \{0\}$. □

Teorema 3.5 *$M_k(\Gamma)$ admet una base de formes pròpies de tota l'àlgebra de Hecke.*

Dem. És suficient provar-ho per a $E_k(\Gamma)$. Per un argument d'inducció sabem que és cert per al subespai $\phi(E_k(\Gamma)) \subseteq M_k(\Gamma_{g-1})$; per tant, podem trobar una base E_i de $E_k(\Gamma)$ tal, que (aplicant el Teorema 3.4)

$$(E_i|T) \,|\, \phi = (E_i \,|\, \phi) \,|_k\, T^* = \lambda_{T^*,i}(E_i \,|\, \phi) = (\lambda_{T^*,i} E_i) \,|\, \phi,$$

per a tot $T \in \mathcal{H}(\Gamma, \Delta)$. Com que ϕ és injectiu, deduim que $E_i|T = \lambda_{T^*,i} E_i$ per a tot $T \in \mathcal{H}(\Gamma, \Delta)$. □

3.5 Formes singulars

Una forma modular $f \in M_k(\Gamma)$ diem que és *singular* si els seus coeficients de Fourier satisfan

$$a(T) \neq 0 \implies \det(T) = 0,$$

per a tota $T \geq 0$ parella (no confongueu la T amb un operador de Hecke ara).

En certa manera són l'antítesi de les formes parabòliques, que satisfan

$$a(T) \neq 0 \implies \det(T) \neq 0.$$

Si $g = 1$ les úniques formes singulars són les constants de pes zero, però per a $g > 1$ hi ha exemples no trivials.

Exemple. Sigui $1 \leq m < g$ i considerem una matriu $S > 0$ unimodular i parella. Aleshores $\theta_S \in M_{m/2}(\Gamma)$ és una forma modular singular.

En efecte, $a(T) = A(S,T) = \sharp\{G \in M_{m\times n}(\mathbb{Z}) \,|\, S[G] = T\}$. Per tant, $a(T) \neq 0$ implica que $G'SG = T$ per a alguna G i per tant $\det(T) = 0$, ja que $\mathrm{rang}(T) \leq \mathrm{rang}(S) = m$.

En certa manera, aquest és l'únic exemple possible.

Definició. *Denotem per $M_k(\Gamma)_\theta$ el subespai de formes modulars que són combinació lineal de formes θ_S amb $S > 0$ unimodular i parella, de mida $2k$.*

Teorema 3.6 *Sigui $0 \neq f \in M_k(\Gamma)$ una forma singular. Aleshores, $g > 2k$, k és múltiple de 4 i $f \in M_k(\Gamma)_\theta$*

Definició. *Una forma modular $f \in M_k(\Gamma)$ diem que és* estable *si existeixen $\tilde{g} > g$ i $F \in M_k(\Gamma_{\tilde{g}})$ singular tals, que $f = F \,|\, \phi^{\tilde{g}-g}$. Denotem per $M_k(\Gamma)_{st}$ el subespai de formes modulars estables.*

Teorema 3.7 $M_k(\Gamma)_\theta = M_k(\Gamma)_{st}$.

Dem. Les θ_S satisfan $\theta_S \,|\, \phi = \theta_S$ i per a $\tilde{g} > 2k$ són singulars. Per tant, les θ_S són totes estables.

Recíprocament, suposem $f = F \,|\, \phi^{\tilde{g}-g}$ amb F singular; pel teorema anterior F és combinació lineal de θ_S's i per tant f també. □

Corol·lari 3.16 *El subespai $M_k(\Gamma)_\theta$ és estable per l'acció de l'àlgebra de Hecke.*

Recordeu que això implica que m és múltiple de 8.

La representació de les formes singulars com a combinació lineal de θ_S's és constructiva (demostració del Teorema 3.6, que hem omès). Això permet especificar l'acció del operadors de Hecke sobre les θ_S. Els resultats són molt farragosos; a tall d'exemple veiem únicament el cas de l'operador T_p.

Teorema 3.8 *Siguin g, m enters positius, m múltiple de 8. Sigui $S_1, \ldots, S_h$ un sistema de representants de les classes de matrius $S \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ simètriques, definides positives i parelles, sota la relació d'equivalència $S \sim S[U]$ per a $U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$. Aleshores,*

$$\theta_{S_i} \,|\, T_p = \beta(p, m, n) \sum_{j=1}^{h} \frac{A(S_i, pS_j)}{A(S_j, S_j)}\, \theta_{S_j},$$

on

$$\beta(p, m, n) = p^{g(g+1-m)/2} \begin{cases} \prod_{j=1}^{(m/2)-g} (1 + p^{j-1})^{-1}, & si\ g \leq m/2, \\ \prod_{j=1}^{g-(m/2)} (1 + p^{-j}), & si\ g \geq m/2. \end{cases}$$

Capítol 4

Sèries de Dirichlet associades a formes modulars de Siegel

F. Fité

Departament de Matemàtica Aplicada II

Universitat Politècnica de Catalunya

Edifici Omega. Jordi Girona, 1–3. E-08034, Barcelona

francesc.fite@upc.edu

4.1 Introducció

El que ens proposem en aquest capítol és associar sèries de Dirichlet a formes modulars de Siegel de gènere més gran que 1 que generalitzin la noció de $L-$sèrie d'una forma modular clàssica. Abans, però, fem un breu resum de les propietats més importants que tenim en gènere 1 per tal de remarcar quines d'elles admetran generalització i quines, no.

Sigui $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{2\pi i n z}$ una forma modular de pes k per a $SL_2(\mathbb{Z})$ (és a dir, de nivell 1) que és funció pròpia per tots els operadors de Hecke ($T_n f = \lambda_f(n) f$). Aleshores és un fet conegut que els seus coeficients satisfan la relació $a_n = \lambda_f(n) a_1$. Utilitzarem la notació $f^*(z) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{2\pi i n z}$.

A f li podem associar la $L-$sèrie

$$L(f,s) := \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}.$$

Aquesta $L-$sèrie convergeix per $Re(s) > k+1$ i satisfà les tres propietats següents fonamentals

(i) Admet un producte d'Euler

$$L(f,s) = a_1 \prod_p (1 - \lambda_f(p) p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Aquest fet es deu a la següent relació entre els valors propis dels operadors de Hecke

$$\lambda_f(p)\lambda_f(p^i) = \lambda_f(p^{i+1}) + p^{k-1}\lambda_f(p^{i-1}),\ i \geq 1.$$

En efecte,

$$L(f,s) = a_1 \sum_{n\geq 1} \lambda_f(n) n^{-s} = a_1 \prod_p \sum_{i\geq 0} \lambda_f(p^i) p^{-is}.$$

Si anomenem $L_p(f,s) = \sum_{i\geq 0} \lambda_f(p^i) p^{-is}$, gràcies a la relació de més amunt, és fàcil comprovar que se satisfà

$$\lambda_f(p) L_p(f,s) = \lambda_f(p) + p^s (L_p(f,s) - 1 - \lambda_f(p) p^{-s}) + p^{k-1-s} L_p(f,s),$$

d'on aïllant s'obté fàcilment que

$$L_p(f,s) = (1 - \lambda_f(p) p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

(ii) Admet prolongació meromorfa al pla complex. Es segueix del fet que la transformada de Mellin de f, definida com

$$\Lambda(f,s) := \int_0^\infty f^*(it) t^{s-1} dt,$$

és tal que la funció

$$\Lambda(f,s) + \frac{a_0}{s} + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} a_0}{k-s}$$

és holomorfa a $\mathbb{C}$ i per $Re(s) > k+1$ tenim la igualtat

$$\Lambda(f,s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s),$$

on $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$ és la funció gamma. Aleshores utilitzem aquesta darrera igualtat per prolongar $L(f,s)$ a una funció meromorfa a tot el pla complex.

(iii) $\Lambda(f,s)$ compleix l'equació funcional

$$\Lambda(s,f) = (-1)^{k/2}\Lambda(k-s,f).$$

Observació 4.1 *Si f és una forma modular parabòlica, aleshores $L(f,s)$ convergeix absolutament per $Re(s) > \frac{k}{2}+1$ i com que $a_0 = 0$, $\Lambda(f,s)$ és una funció entera.*

El que succeeix per formes modulars de gènere més gran que 1 és el reflex d'una situació més general en què a una mateixa forma automorfa se li pot associar tant una sèrie de Dirichlet per la qual la prolongació analítica es pot provar, però que no admet una expansió en producte d'Euler, com un producte d'Euler, pel qual no és clar com provar la prolongació analítica.

Així com en formes modulars de gènere 1 les dues sèries de Dirichlet esmentades es confonen en la noció habitual de $L-$sèrie, per a gèneres superiors les diferències es fan evidents i és per aquest motiu que a una forma modular de Siegel li associarem dues sèries de Dirichlet diferents.

En primer lloc, introduirem les sèries de Dirichlet de Maass, per les quals es pot provar la prolongació analítica a tot el pla complex i l'existència d'una equació funcional, però no tenen una expansió en producte d'Euler.

En segon lloc, presentarem les $L-$sèries d'Andrianov que tenen sempre producte d'Euler (de fet, per definició), i prolongació analítica i equació funcional almenys per gèneres 1 i 2.

Al llarg del capítol farem servir les notacions següents

- Si A és una matriu, A' indica la seva transposada i $\sigma(A)$, la seva traça.
- $\Gamma_n := Sp(n, \mathbb{Z}) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{Z}) | M'JM = J$, on $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}\}$
- $\mathbb{H}_n = \{Z \in M_n(\mathbb{C}) | Z' = Z, Im(Z) > 0\}$
- $P_n = \{Y \in M_n(\mathbb{R}) | Y' = Y, Y > 0\}$
- $R_n = \{Y \in P_n | Y$ és reduïda Minkowski$\}$
- $M_k(\Gamma_n)$ denota el $\mathbb{C}$-espai vectorial de les formes modulars de pes k i gènere n.
- $S_k(\Gamma_n)$ denota el $\mathbb{C}$-espai vectorial de les formes modulars parabòliques de pes k i gènere n.
- $\Phi : M_k(\Gamma_n) \to M_k(\Gamma_{n-1})$ denota l'operador de Siegel.

4.2 Sèries de Dirichlet de Maass

4.2.1 Definició

Sigui $f \in M_k(\Gamma_n)$ una forma modular de gènere n i pes parell k. Tenim un desenvolupament de Fourier

$$f(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)},$$

on el sumatori recorre les matrius semienteres simètriques semidefinides positives de dimensió n, $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$ i

$$a(T) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(Z) e^{-2\pi i \sigma(TZ)} dX$$

amb $dX = \prod_{k \leq l} dx_{kl}$.

Per T una matriu simètrica i definida positiva, definim

$$\varepsilon(T) := |\{U \in GL_n(\mathbb{Z}) | U'TU = T\}|.$$

Es demostra que $\varepsilon(T)$ és un nombre finit. Aleshores a $f \in M_k(\Gamma_n)$, li associem la sèrie de Dirichlet

$$D_n(f,s) := \sum_{\{T\}>0} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} (\det(T))^{-s},$$

on el sumatori recorre un sistema de representants de les classes de matrius simètriques semienteres definides positives mòdul l'acció de $GL_n(\mathbb{Z})$. Recordem que l'acció de $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ sobre una matriu T és $U'TU$.

Notem que per a $n = 1$, obtenim la relació $D_1(f,s) = \frac{1}{2}L(f,s)$.

4.2.2 Convergència

Per a estudiar la convergència de $D_n(f,s)$ ens bastaran els dos resultats de continuació.

Lema 4.2 *El nombre $\mu(d)$ de classes mòdul l'acció de $GL_n(\mathbb{Z})$ de matrius semienteres simètriques i definides positives i de determinant d és finit i polinòmic en d.*

DEMOSTRACIÓ: Vegeu [Fre83, Cap. 2, 2.7, pàg. 33]. El fet que $\mu(d)$ sigui polinòmic en d es deriva directament de la demostració. □

Aquest lema és conseqüència de la reducció de Minkowski i fita el nombre classes de matrius de determinant fixat que apareixen a la definició de $D_n(f,s)$. El següent resultat controla el creixement dels coeficients de Fourier de f.

Lema 4.3 *Si $f \in M_k(\Gamma_n)$, aleshores existeix una constant C tal que per a tota T semientera simètrica i definida positiva se satisfà*

$$|a(T)| \leq C(\det(T))^k.$$

Demostració: Vegeu [Kli90, Cap. VI, lemma 1, pàg. 143]. □

D'aquests dos resultats s'obté fàcilment la convergència de $D_n(f,s)$.

Proposició 4.4 *$D_n(f,s)$ és absolutament convergent per a $Re(s) > \sigma$, on σ és suficientment gran, i és una funció holomorfa en aquesta regió.*

Demostració:

$$|D_n(f,s)| \leq \sum_{\{T\}>0} \frac{|a(T)|}{\varepsilon(T)} |\det(T)|^{-Re(s)} \leq$$

$$\leq \sum_{\{T\}>0} C|\det(T)|^{k-Re(s)} = C \sum_{d>0} \mu(d) d^{k-Re(s)} < \infty$$

Notem que en el sumatori d recorre els valors dels determinants de matrius semienteres (no necessàriament enters). En qualsevol cas, és clar que per $Re(s)$ suficientment gran la sèrie de Dirichlet convergeix absolutament. □

4.2.3 Prolongació analítica i equació funcional

Tal i com es fa en gènere 1, obtindrem la prolongació analítica de $D_n(f,s)$, definint la transformada de Mellin de f, trobant l'equació que la lliga amb $D_n(f,s)$ i estenent $D_n(f,s)$ a través d'aquesta equació.

Donada $f \in M_k(\Gamma_n)$ denotem

$$f^*(Z) = \sum_{T>0} a(T) e^{2\pi i \sigma(TZ)}$$

la part del seu desenvolupament de Fourier, on el sumatori recorre només les matrius semienteres simètriques definides positives.

Definim la transformada de Mellin de f com

$$\Delta_n(f,s) := \int_{R_n} (\det(Y))^s f^*(iY) dV,$$

on $dV = (\det(y))^{-\frac{n+1}{2}} dY$ és l'element de volum de P_n, que és invariant respecte l'acció de $GL_n(\mathbb{Z})$.

Es té que $\Delta_1(f,s) = \Lambda(f,s)$.

Proposició 4.5 *La transformada de Mellin existeix si $Re(s) > k + \frac{n+1}{2}$ i és una funció holomorfa en aquesta regió.*

Demostració: Vegeu [Kli90, Cap. VI, Proposition 1, pàg. 146]. □

En la demostració de l'anterior proposició només s'utilitza que f admet un desenvolupament de Fourier i la fita $|a(T)| \leq C(\det(T))^k$ dels seus coeficients. És d'esperar, doncs, que utilitzant la modularitat de f, s'obtinguin resultats més precisos sobre la seva transformada de Mellin. En particular, si f és forma modular parabòlica tenim la següent

Proposició 4.6 *Si $f \in S_k(\Gamma_n)$, aleshores la funció $\Delta_n(f,s)$ és holomorfa a $\mathbb{C}$ i satisfà l'equació funcional*

$$\Delta_n(f,s) = (-1)^{\frac{nk}{2}} \Delta_n(f, k-s).$$

Demostració: Sigui $f \in S_k(\Gamma_n)$. Aleshores es té que $f = f^*$ i per tant

$$\Delta_n(f,s) = \int_{R_n} (\det(Y))^s f(iY) dV =$$

$$= \int_{R_n,\, \det(Y)\leq 1} (\det(Y))^s f(iY) dV + \int_{R_n,\, \det(Y)\geq 1} (\det(Y))^s f(iY) dV$$

Si en la igualtat

$$f(-Z^{-1}) = f(\begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix} \langle Z \rangle) = (\det(Z))^k f(Z),$$

prenem $Z = iY$, obtenim $f(iY^{-1}) = i^{nk}(\det(Y))^k f(iY)$. Per tant, el canvi de variable de Y per Y^{-1} en la primera de les dues integrals dóna lloc a

$$\begin{aligned}\Delta_n(f,s) = \quad & i^{nk}\int_{R_n,\,\det(Y)\geq 1}(\det(Y))^{k-s}f(iY)dV+\\ & \int_{R_n,\,\det(Y)\geq 1}(\det(Y))^{s}f(iY)dV.\end{aligned}$$

Finalment, es pot veure aquestes integrals representen funcions enteres de s, ja que es redueixen a integrals Eulerianes de segon tipus esteses de 1 fins a ∞, que són holomorfes en tot $\mathbb{C}$.

L'equació funcional és una conseqüència immediata de la darrera línia d'igualtats escrita per $\Delta_n(f,s)$. $\square$

Per a formes modulars no necessàriament parabòliques també tenim un resultat que assegura que la transformada de Mellin és meromorfa a tot $\mathbb{C}$ i que disposa d'una equació funcional. Abans d'enunciar-lo, introduïm la següent notació

$$q(n) = \begin{cases} \pi^{\frac{1}{2}-\frac{n(n+1)}{4}}\prod_{i=2}^{n}\zeta(i)\Gamma(\frac{i}{2}) & \text{si } n\geq 2\\ 1 & \text{si } n = 1\end{cases}$$

Teorema 4.7 *Sigui $f\in M_k(\Gamma_n)$ amb $k>2n$ i k parell. Aleshores $\Delta_n(f,s)$ és una funció meromorfa a $\mathbb{C}$ donada per*

$$\begin{aligned}\Delta_n(f,s) = \quad & \int_{R_n,\,\det(Y)\geq 1}((\det(Y))^{s}+(-1)^{\frac{nk}{2}}(\det(Y))^{k-s})f^*(iY)dV+\\ & +q(n)(f|\Phi^n)\left(\frac{(-1)^{\frac{nk}{2}}}{s-k}-\frac{1}{s}\right)+\\ & +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}q(n-i)\Delta_i(f|\Phi^{n-i},\frac{n}{2})\cdot\left(\frac{(-1)^{\frac{nk}{2}}}{s-k+\frac{i}{2}}-\frac{1}{s-\frac{i}{2}}\right)\end{aligned}$$

I per tant es té l'equació funcional

$$\Delta_n(f,s) = (-1)^{\frac{nk}{2}}\Delta_n(f,k-s).$$

Demostració: Vegeu [Kli90, Cap. VI, pàg. 156]. □

La primera demostració d'aquest teorema es deu a H. Maass. Posteriorment, T. Arakawa va proporcionar-ne una de més senzilla, demostrant el resultat per a sèries d'Eisenstein i deduint-ne la validesa per a formes modulars en general. En qualsevol cas, continua sent una demostració llarga i plena de càlculs.

Notem que per formes parabòliques, $f|\Phi = 0$ i recuperem el resultat que hem vist més amunt. Fent $n = 1$, retrobem els resultats que anunciàvem a la introducció.

Per acabar la secció, establim la igualtat que ens permet prolongar analíticament $D_n(f, s)$.

Proposició 4.8 *Sigui $f \in M_k(\Gamma_n)$, amb k parell. Per tot $s \in \mathbb{C}$ amb part real suficientment gran es compleix*

$$\Delta_n(f, s) = 2(2\pi)^{-ns} \prod_{r=1}^{n} \pi^{\frac{r-1}{2}} \Gamma(s - \frac{r-1}{2}) D_n(s, f).$$

Demostració:

$$\Delta(f, s) = \int_{R_n} (\det(Y))^s \sum_{T>0} a(T) e^{-2\pi\sigma(TY)} dV =$$

$$= \sum_{T>0} a(T) \int_{R_n} (\det(Y))^s e^{-2\pi\sigma(TY)} dV =$$

$$= \sum_{\{T\}>0} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \sum_{U \in GL_n(\mathbb{Z})} \int_{R_n} (\det(Y))^s e^{-2\pi\sigma(U'TUY)} dV =$$

$$= 2 \sum_{\{T\}>0} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \int_{P_n} (\det(Y))^s e^{-2\pi\sigma(TY)} dV.$$

Per acabar, es calcula per inducció sobre n que

$$\int_{P_n} (\det(Y))^s e^{-2\pi\sigma(TY)} dV = (2\pi)^{-ns} \prod_{r=1}^{n} \pi^{\frac{r-1}{2}} \Gamma(s - \frac{r-1}{2}) (\det(T))^s.$$

Observem la importància del factor $\varepsilon(T)$, que fins ara podia haver passat desapercebuda. □

Particularitzant per a $n = 1$, retrobem la fórmula esperada

$$\Delta_1(f, s) = (2\pi)^{-s}\Gamma(s)2D_1(f, s).$$

4.3 L-sèries d'Andrianov

4.3.1 Definició

Recordem que havíem definit

$$\Delta_n(\lambda) := \{M \in GL_{2n}(\mathbb{Q}) | M'JM = \lambda J\}, \qquad \Delta_n := \cup_{\lambda\in\mathbb{Q}^+}\Delta_n(\lambda).$$

Al $\mathbb{C}-$espai vectorial $\mathcal{H}(\Gamma_n, \Delta_n) = \langle\Gamma_n M\Gamma_n,\ M \in \Delta_n\rangle_{\mathbb{C}}$ se li dóna una estructura d'àlgebra commutativa tot definint un producte entre classes laterals dobles.

Si $l \in \mathbb{Z}^+$ i $M \in \Delta_n(l)_{\mathbb{Z}} := \Delta_n(l) \cap M_{2n}(\mathbb{Z})$, aleshores la classe lateral doble $\Gamma_n M\Gamma_n$ conté un únic representant de la forma

$$M = diag(a_1, \cdots, a_n, d_1, \cdots, d_n),$$

on $a_j > 0$, $a_j d_j = l$ per $1 \le j \le n$, $a_j | a_{j+1}$ per $1 \le j < n$ i $a_n | d_n$. Denotem $T(a_1, \cdots, a_n, d_1, \cdots, d_n)$ la classe corresponent.

Denotem per $T(l)$ la suma de totes les classes laterals dobles $\Gamma_n M\Gamma_n$ amb $M \in \Delta_n(l)_{\mathbb{Z}}$, que per la caracterització que acabem de veure són un número finit.

Es pot veure que la classe $\Gamma_n M\Gamma_n$, amb $M \in \Delta_n(l)_{\mathbb{Z}}$, descompon en un número finit de classes laterals per l'esquerra

$$\Gamma_n M\Gamma_n = \cup_{i=1}^{\mu}\Gamma_n M_i$$

i per cada k li podem associar un operador $T_k(\Gamma_n M\Gamma_n) : M_k(\Gamma_n) \to M_k(\Gamma_n)$ definit de la següent manera

$$T_k(\Gamma_n M\Gamma_n)f = l^{nk-\frac{n(n+1)}{2}}\sum_{i=1}^{\mu} f|_k M_i,$$

on recordem que

$$f|_k M_i(Z) = f(M_i\langle Z\rangle)\det(C_iZ + D_i)^{-k} \qquad \text{si } M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}.$$

Per cada k, per linealitat, associem a $T(l)$ un operador que actua sobre l'espai $M_k(\Gamma_n)$. Els operadors $T_k(l)$ coincideixen amb els operadors de Hecke clàssics per $n = 1$. Es té la propietat

$$T(n)T(m) = T(mn) \text{ per } (m, n) = 1.$$

Sigui $f \in M_k(\Gamma_n)$ una funció pròpia dels operadors de Hecke $T_k(m)$ amb $m \geq 1$

$$T_k(m)f = \lambda_f(m)f.$$

Li associem la sèrie de Dirichlet

$$\tilde{D}(f, s) := \sum_{m\geq 1} \frac{\lambda_f(m)}{m^s}.$$

A [And74] trobem la següent caracterització de la sèrie de Dirichlet definida.

Teorema 4.9 *Sigui $f \in M_k(\Gamma_n)$ una funció pròpia dels operadors de Hecke. Aleshores $\tilde{D}(f, s)$ és absolutament convergent per $Re(s) > \sigma$, amb σ suficientment gran i té una expansió en producte d'Euler*

$$\tilde{D}(f, s) = \prod_p (\sum_{i\geq 0} \lambda_f(p^i)p^{-is}) = \prod_p \tilde{D}_p(f, s).$$

Cadascun dels factors locals $\tilde{D}_p(f, s)$ és una fracció racional de p^{-s}

$$\tilde{D}_p(f, s) = \frac{P_p(f, p^{-s})}{Q_p(f, p^{-s})},$$

on $P_p(f, t)$ i $Q_p(f, t)$ són polinomis amb coeficients racionals de graus $2^n - 2$ i 2^n respectivament. El polinomi $Q_p(f, t)$ és de la forma

$$Q_p(f, t) = 1 - \lambda_f(p)t + \cdots + p^{2^{n-1}(nk - \frac{n(n+1)}{2})}t^{2^n}$$

i tots els seus coeficients són reals.

Demostració: Vegeu [And74, theorem 1.3.2, pàg. 62]. □

Donada $f \in M_k(\Gamma_n)$ funció pròpia dels operadors de Hecke definim

$$Z(f,s) := \prod_p \frac{1}{Q_p(f,p^{-s})}$$

i l'anomenem $L-$sèrie d'Andrianov de f.

Es pot veure que $Z(f,s)$ és absolutament convergent per $Re(s)$ prou gran i que és una funció holomorfa en aquest semiplà. És clar que per $n=1$ tenim $\tilde{D}(f,s) = Z(f,s)$ i $L(f,s) = a_1 Z(f,s)$, on a_1 és el corresponent coeficient de Fourier de f. L'estudi detallat del cas $n=2$ ens mostra que $Z(f,s)$ és la bona generalització (en el sentit que tenim prolongació analítica i equació funcional).

El següent teorema de Zharkovskaya dóna la relació existent entre la $L-$sèrie d'Andrianov associada a una forma modular de Siegel f i l'associada a la seva imatge per l'operador de Siegel $f|\Phi$.

Teorema 4.10 *Sigui $f \in M_k(\Gamma_n)$, amb $n > 1$ i $k > 0$, una funció pròpia dels operadors de Hecke. Aleshores $f|\Phi \in M_k(\Gamma_{n-1})$ és funció pròpia dels operadors de Hecke i si no és parabòlica (i.e., $f|\Phi \neq 0$), aleshores sobre el domini de convergència absoluta es té la relació*

$$Z(f,s) = Z(f|\Phi, s)Z(f|\Phi, s-k+n).$$

Demostració: Vegeu [Zha74]. □

A diferència del cas d'una variable, destaquem la manca de connexió entre els valors propis dels operadors de Hecke i els coeficients de Fourier de les seves funcions pròpies. Notem que una manera de donar aquest tipus de relacions seria donar relacions entre les sèries de Dirichlet de Maass i les $L-$sèries d'Andrianov.

Per $n=2$, Andrianov troba relacions explícites entre uns coeficients i altres, encara que força més complicades que en el cas clàssic. Vegeu [And74, theorem 2.4.1, pàg. 84].

4.3.2 Prolongació analítica i equació funcional

En el que ve a continuació ens centrarem en el cas $n = 2$. La finalitat és obtenir la prolongació analítica de $Z(f, s)$ i una equació funcional associada.

El següent teorema de Shimura determina tots els coeficients de $Q_p(f, t)$ quan $n = 2$.

Teorema 4.11 *Sigui p un primer i $f \in M_k(\Gamma_2)$ una funció pròpia dels operadors de Hecke. Aleshores tenim la igualtat*

$$\tilde{D}_p(f, t) = \sum_{i \geq 0} \lambda_f(p^i) t^i = \frac{1 - p^{2k-4} t^2}{Q_p(f, t)},$$

on

$$Q_p(f, t) = 1 - \lambda_f(p) t + (\lambda_f(p)^2 - \lambda_f(p^2) - p^{2k-4}) t^2 - \lambda_f(p) p^{2k-3} t^3 + p^{4k-6} t^4.$$

Demostració: Vegeu [Shi63]. □

Corol·lari 4.12 *Si $f \in M_k(\Gamma_2)$ és una funció pròpia dels operadors de Hecke, aleshores en el domini de convergència es té la següent relació entre les sèries $Z(f, s)$ i $\tilde{D}(f, s)$*

$$\tilde{D}(f, s) = \zeta(2s - 2k + 4)^{-1} Z(f, s),$$

on ζ és la funció zeta de Riemann.

Demostració:

$$\prod_p (1 - p^{2k-4} p^{-2s}) = \prod_p (1 - p^{-(2s-2k+4)}) = \zeta(2s - 2k + 4)^{-1}$$

□

Teorema 4.13 *Sigui $f \in M_k(\Gamma_2)$, amb $k \geq 0$, una funció pròpia dels operadors de Hecke. Considerem $\Psi(f, s) := (2\pi)^{-2s} \Gamma(s) \Gamma(s - k + 2) Z(f, s)$. Aleshores es tenen les següents afirmacions* *(i)* *La funció* $\Psi(f, s)$ *s'estén a tot el pla complex a una funció meromorfa (amb un nombre finit de pols).*

(ii) $\Psi(f, s)$ *satisfà l'equació funcional* $\Psi(f, 2k-2-s) = (-1)^k \Psi(f, s)$.

(iii) *Si* $f|\Phi \neq 0$, *aleshores* $\Psi(f, s) = c\Lambda(f|\Phi, s)\Lambda(f|\Phi, s - k + 2)$, *on* $\Lambda(f|\Phi, \cdot)$ *és la transformada de Mellin de la forma modular* $f|\Phi \in M_k(\Gamma_1)$ *i* c *és una constant. En particular,* $\Psi(f, s)$ *té quatre pols simples als punts* 0, k, $k-2$, $2k-2$ *si* $f|\Phi$ *no és parabòlica i és una funció entera si* $f|\Phi$ *és parabòlica.*

(iv) *Si* $f|\Phi = 0$, *aleshores* $\Psi(f, s)$ *té com a molt dos pols simples als punts* k, $k-2$. *Si* k *és senar, aleshores* $\Psi(f, s)$ *és una funció holomorfa.*

Demostració: Per al cas $f|\Phi \neq 0$ tot se segueix del teorema de Zharkovskaya i dels resultats clàssics en gènere 1 que hem vist recapitulats a la Introducció. Per al cas $f|\Phi = 0$ vegeu [And74, theorem 3.1.1, pàg. 87]. $\square$

4.4 Conjectura de Yoshida

Com en gènere 1, es poden definir subgrups Γ de congruència de $\Gamma_n = Sp(n, \mathbb{Z})$ i considerar els espais de formes modulars $M_k(\Gamma)$. Per exemple, per $n \geq 1$

$$\Gamma_n(N) := \{A \in \Gamma_n | A \cong 1_{2n} \mod (N)\}.$$

Yoshida [Yos80] desenvolupa un mètode per obtenir una forma modular de pes 2 i gènere 2 per $\Gamma_2(N)$, a partir de dues certes formes modulars parabòliques de pes 2 i gènere 1 per $\Gamma_0(N)$ (notació clàssica pel subíndex). Les dues formes modulars de partida no són arbitràries i, en particular, perquè el mètode doni lloc a una forma modular no nul·la cal que tinguin el mateix signe a l'equació funcional. A més, obté una relació entre les corresponents $L-$sèries.

En particular, en un exemple numèric a f_1, $f_2 \in S_2(\Gamma_0(31))$ els associa $F \in S_2(\Gamma_2(31))$. A més, comprova la relació

$$Z(F, s) = L(f_1, s)L(f_2, s).$$

Aleshores considera el model canònic C definit sobre $\mathbb{Q}$ de la corba modular $\Gamma_0(31)\backslash\mathbb{H}^*$, on $\mathbb{H}^*$ denota el semiplà de Poincaré havent-l'hi afegit les puntes. Com que $\dim S_2(\Gamma_0(31)) = 2$, la Jacobiana $J(C)$ de C és una varietat abeliana de dimensió 2. Yoshida observa que $Z(F,s)$ és igual (llevat dels factors locals 2 i 31) a la $L-$sèrie de $J(C)/\mathbb{Q}$.

A partir d'aquest exemple, proposa la Conjectura de Yoshida, que generalitza d'alguna manera la Conjectura de Shimura-Taniyama-Weil.

Conjectura 4.4.1 La $L-$sèrie $L(A,s)$ d'una varietat abeliana A de dimensió 2 definida sobre $\mathbb{Q}$ coincideix (llevat de en un nombre finit de factors locals) amb la $L-$sèrie d'Andrianov d'una forma modular de Siegel de gènere 2 i pes 2 per a algun subgrup de congruència de $Sp(2,\mathbb{Z})$, suposant que $L(A,s)$ té continuació analítica i satisfà una equació funcional amb signe $+1$.

Per acabar presentem algunes observacions al voltant d'aquesta conjectura

Observació 4.14 *La condició del signe $+1$ en l'equació funcional prové del fet que en el procediment de Yoshida s'obté la relació $Z(F,s) = L(f_1,s)L(f_2,s)$ amb f_1 i f_2 del mateix signe. Se'n segueix que $Z(F,s)$ té signe $+1$.*

Observació 4.15 *Aquesta condició ha estat vista per alguns com a poc essencial. De tota manera, no s'ha trobat una forma modular de Siegel, la L-sèrie d'Andrianov de la qual (llevat de en un nombre finit de factors) coincideixi amb la $L-$sèrie d'una superfície abeliana que admeti prolongació analítica i tingui signe -1 en l'equació funcional.*

Observació 4.16 *Les conjectures de Salvati-Manni i Top, demostrades recentment per Okazaki [Oka06], proporcionen candidats per a formes modulars de Siegel i superfícies abelianes per a alguns casos concrets.*

Bibliografia

[And74] A.N. Andrianov, *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus* 2, Uspekhi Mat. Nauk 29, 43-110, 1974.

[Fre83] H. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Kli90] H. Klingen, *Introductory lectures on Siegel modular forms*, Cambridge University Press, 1990.

[Maa71] H. Maass, *Siegel's modular forms and Dirichlet series*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 216. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[Oka06] T. Okazaki, *Proof of R. Salvati Manni and J. Top's conjectures on Siegel modular forms and abelian surfaces*, American Journal of Mathematics 128, 139-165, 2006.

[Shi63] G. Shimura, *Arithmetic of alternating forms and quaternion Hermitian forms*, J. Math. Soc. Japan 15, 33-65, 1963.

[ST93] R. Salvati Manni i J. Top, *Cuspforms of weight 2 for the group* $\Gamma(4, 8)$, American Journal of Mathematics 115, 455-486, 1993.

[Yos80] H. Yoshida, *Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms*, Inventiones Mathematicae 60, 193-248, 1980.

[Zha74] N.A. Zharkovskaya, *The Siegel operator and Hecke operators*, Funktsional. Analiz. i Prilozhen 8:2, 30-38, 1974.

Capítol 5

Estructura de l'anell de formes modulars de Siegel per a gèneres 2 i 3

J. Nualart
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes 585. E-08007, Barcelona
joan.nualart@ub.edu

En aquest capítol explicarem alguns resultats sobre l'estructura dels anells de formes modulars de gèneres 2 i 3. En primer lloc, comentarem els treballs d'Igusa [Igu62, Igu64b] per al cas de gènere 2 i donarem exemples explícits de formes, amb els corresponents desenvolupaments de Fourier. En segon lloc, veurem els resultats d'Igusa [Igu67] que relacionen l'anell de formes modulars de gènere g amb l'anell d'invariants projectius de formes binàries de grau $2g+2$. Finalment, explicarem els resultats de Tsuyumine [Tsu86a, Tsu86b, Tsu87] per al cas de gènere 3.

Amb finançament parcial d'una beca FPU del Ministerio de Educación y Ciencia i de MEC MTM2006-04895.

Notacions

Siguin g i l enters positius.

- $\Gamma_g = \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z})$, grup simplèctic enter;
- $\Gamma_g(l) = \{M \in \Gamma_g : M \equiv 1_{2g} \pmod{l}\} \subset \Gamma_g$, subgrup principal de congruència mòdul l;
- $\Gamma \subset \Gamma_g$ subgrup de congruència. $A(\Gamma)$ l'anell graduat de formes modulars respecte Γ;
- $\mathbb{H}_g$ semiespai superior de Siegel amb l'acció natural de Γ_g;
- $\Gamma_g/\Gamma_g(l)$ actua en l'espai de formes modulars per a $\Gamma_g(l)$ de pes k: donada una forma modular f de pes k per a $\Gamma_g(l)$ i un element $M \in \Gamma_g/\Gamma_g(l)$ l'acció de M sobre f és donada per $f|_k M$. En general no utilitzarem que aquesta correspondència defineix una acció i, per a abreujar, escriurem $Mf = f|_k M$;
- Per a un enter positiu parell $k > g+1$ i $\tau \in \mathbb{H}_g$ considerem la sèrie d'Eisenstein de pes k respecte Γ_g:

  $$\psi_k(\tau) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{g,0} \backslash \Gamma_g} \det(C\tau + D)^{-k} \in A(\Gamma_g),$$

  on $\Gamma_{g,0} = \{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)\} \subset \Gamma_g$.
- Siguin $\tau \in \mathbb{H}_g$ i ${}^t m = \left(\begin{smallmatrix} m' \\ m'' \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Z}^{2g}$, que en general tindrà entrades 0 i 1. Considerem la funció

  $$\theta_m(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i \left({}^t(n + \frac{1}{2}m')\tau(n + \frac{1}{2}m') + m''{}^t n \right)},$$

  que anomenarem Thetanullwerte (o constant theta) de característica (semientera) m. Direm que la característica m és parella (resp. senar) si ${}^t m' m''$ és un enter parell (resp. senar).
- Donada una $\mathbb{C}$-àlgebra graduada finitament generada

  $$A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k,$$

que en aquest capítol serà sempre un anell de formes modulars, anomenarem funció generatriu[1] de A a:

$$\sum_{k\geq 0} \dim_{\mathbb{C}}(A_k)T^k.$$

Finalment, pel que fa als Thetanullwerte, convé recordar-ne la fórmula de transformació i l'acció de Γ_g sobre aquests, ja que juguen un paper central en la construcció de formes modulars per a $g = 3$.

Teorema 5.1 (Fórmula de transformació de Thetanullwerte)

Siguin $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_g$, $\tau \in \mathbb{H}_g$, $m = {}^t\left(\begin{smallmatrix} m' \\ m'' \end{smallmatrix}\right)$. *Aleshores,*

$$\theta_{Mm}(M\tau) = v(M)e^{2\pi i\phi_m(M)}|C\tau + D|^{1/2}\theta_m(\tau),$$

on ${}^t(Mm) = \begin{pmatrix} D & -C \\ -B & A \end{pmatrix} {}^tm + \begin{pmatrix} (C^tD)_\Delta \\ (A^tB)_\Delta \end{pmatrix}$, $v(M)^8 = 1$, $\phi_m(M) = -\frac{1}{8}({}^tm'{}^tBDm' + {}^tm''{}^tACm'' - 2{}^tm'{}^tBCm'' - 2{}^t(A^tB)_\Delta(Dm' - Cm''))$ *i* $(\cdot)_\Delta$ *designa la diagonal de la matriu escrita com a vector columna.*

□

5.1 El cas clàssic

Començarem recordant molt breument alguns resultats sobre l'estructura de l'anell de formes modulars clàssiques (gènere 1), $A(\Gamma_1)$, i els seus generadors.

En primer lloc, l'anell $A(\Gamma_1)$ està generat per dues sèries d'Eisenstein algebraicament independents de pesos 4 i 6, ψ_4 i ψ_6; això és, $A(\Gamma_1) = \mathbb{C}[\psi_4, \psi_6]$.

Per tant, tenint en compte les descripcions explícites dels desenvolupaments de Fourier de les sèries d'Eisenstein clàssiques,

$$\begin{aligned}\psi_{2k}(w) &= 1 + \tfrac{(2\pi i)^{2k}}{\Gamma(2k)\zeta(2k)} \textstyle\sum_{t=1}^{\infty}(\sum_{d|t} d^{2k-1})e^{2\pi i t w} \\ &= 1 - \tfrac{4k}{B_{2k}} \textstyle\sum_{t=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(t)q^t,\end{aligned}$$

[1] Sovint aquesta funció també s'anomena sèrie de Hilbert o de Poincaré de A.

podem obtenir el desenvolupament de Fourier de qualsevol element de $A(\Gamma_1)$ a partir de la seva expressió com a polinomi en ψ_4 i ψ_6.

A més a més, aquestes dues funcions també tenen una interpretació mitjançant Thetanullwerte de característica semientera:

$$\begin{array}{rl} 2\psi_4 = & \sum_{m \text{ parell}} \theta_m^8, \\ 2\psi_6 = & \sum_{M \in \Gamma_1/\Gamma_1(2)} M(\theta_{00}^8 \theta_{01}^4) = (\theta_{00}^4 + \theta_{01}^4)(\theta_{00}^4 + \theta_{10}^4)(\theta_{01}^4 - \theta_{10}^4). \end{array}$$

Finalment, recordem que la forma parabòlica (no nul·la) de pes més baix és el discriminant modular Δ,

$$\frac{2^2}{3^3}\Delta = \frac{2^2}{3^3}(\psi_4^3 - \psi_6^2) = \prod_k \theta_k^8,$$

que té pes 12, i que el cos de funcions modulars és $\mathbb{C}(j)$, on

$$j = 1728 \frac{\psi_4^3}{\Delta}.$$

Per altra banda, donada una forma de grau 4, $a_0 X^4 + \cdots + a_4$, amb arrels $\xi_1, \ldots, \xi_4$, podem considerar els invariants projectius donats per les expressions irracionals:

$$\begin{array}{rl} I_2 = & a_0^2 \sum (12)^2 (34)^2, \\ I_3 = & a_0^4 \sum (12)^2 (34)^2 (13)(24), \\ I_6 = & a_0^6 \prod_{i<j} (ij)^2, \end{array}$$

on $(ij) = \xi_i - \xi_j$ i les sumes recorren totes les permutacions de les arrels que donen sumands diferents.

L'anell d'invariants projectius d'una forma quàrtica és $\mathbb{C}[I_2, I_3]$ i l'anell d'invariants absoluts, $\mathbb{C}(I_2^3/I_3^2) = \mathbb{C}(I_2^3/I_6)$.

Finalment, tenim la següent interpretació explícita de la funció j com un invariant absolut $j = 1728\psi_4^3/\Delta = 2^5 I_2^3/I_6$, amb la corresponent identificació entre $z \in \mathbb{H}_1$ i el polinomi de grau 4 que dóna un model de Weierstrass de la corba el·líptica associada.

El problema bàsic que tractarem en aquest capítol serà veure com aquesta relació entre funcions modulars i invariants absoluts s'estén a una relació entre formes modulars i invariants projectius.

5.2 Estructura de l'anell de formes modulars de gènere 2

A continuació comentarem els resultats d'estructura per a l'anell de formes modulars de gènere 2. Donarem generadors explícits d'aquest anell així com també del cos de funcions modulars i veurem la interpretació d'aquests últims com a invariants de corbes de gènere 2.

Teorema 5.1 (Igusa, 1961) *Siguin ψ_4, ψ_6, χ_{10} i χ_{12} formes modulars no nul·les en els espais 1-dimensionals $M_4(\Gamma_2)$, $M_6(\Gamma_2)$, $S_{10}(\Gamma_2)$ i $S_{12}(\Gamma_2)$, respectivament. Aleshores,*

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_{2k}(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\psi_4, \psi_6, \chi_{10}, \chi_{12}],$$

és a dir, les formes modulars ψ_4, ψ_6, χ_{10} i χ_{12} són algebraicament independents i generen l'anell graduat de formes modulars de Siegel de gènere 2 i pes parell. □

En el teorema anterior està clar que podem prendre ψ_4 i ψ_6 les sèries d'Eisenstein de pesos 4 i 6, tal com indica la notació. També podem definir formes parabòliques χ_{10} i χ_{12} a partir de sèries d'Eisenstein, com

$$\chi_{10} = -43867 \cdot 2^{-12}3^{-5}5^{-2}7^{-1}53^{-1}(\psi_4\psi_6 - \psi_{10})$$

i

$$\chi_{12} = 131 \cdot 593 \cdot 2^{-13}3^{-7}5^{-3}7^{-2}337^{-1}(3^2 7^2 \psi_4^3 + 2 \cdot 5^3 \psi_6^2 - 691\psi_{12}).$$

A partir d'ara suposarem fixades aquestes funcions.

En particular, com en el cas de gènere 1, l'anell de formes modulars de Siegel de gènere 2 (i pes parell) està generat per sèries d'Eisenstein.

Corol·lari 5.2 (Igusa, 1961) *L'anell graduat de formes modulars de pes parell està generat sobre $\mathbb{C}$ per les sèries d'Eisenstein ψ_4, ψ_6, ψ_{10} i ψ_{12}, que són algebraicament independents.* □

En particular, com a conseqüència del fet que les sèries d'Eisenstein s'apliquen a sèries d'Eisenstein mitjançant l'operador de Siegel, aquest operador defineix un morfisme exhaustiu $\Phi : A(\Gamma_2) \to A(\Gamma_1)$.

A més, de manera immediata a partir del teorema d'estructura, s'obté la funció generatriu de l'anell graduat de formes modulars i l'estructura i generadors del cos de funcions modulars.

Corol·lari 5.3 *La dimensió de l'espai de formes modulars de gènere* 2 *i pes* $2k$ *és*

$$\dim M_{2k}(\Gamma_2) = \#\{(p,q,s,t) \in \mathbb{Z}^4_{\geq 0} : 2k = 4p + 6q + 10s + 12t\}.$$

La funció generatriu de l'anell graduat de formes modulars de gènere 2 *i pes parell és*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M_{2k}(\Gamma_2) T^{2k} = \frac{1}{(1-T^4)(1-T^6)(1-T^{10})(1-T^{12})}. \quad \square$$

Corol·lari 5.4 *El cos de funcions modulars de gènere* 2 *és* $\mathbb{C}(g_1, g_2, g_3)$*, on*

$$g_1 = \psi_4 \psi_6 \psi_{10}^{-1}, \ g_2 = \psi_4^3 \psi_{12}^{-1}, \ g_3 = \psi_6^2 \psi_{12}^{-1}. \quad \square$$

En conseqüència, per a obtenir desenvolupaments de Fourier de qualsevol forma modular, basta conèixer els desenvolupaments de Fourier de les sèries d'Eisenstein de pesos 4, 6, 10 i 12. En el cas de gènere 1 tenim una fórmula explícita per a aquests coeficients; en el cas de gènere 2, utilitzant les fórmules recursives de Maass [Maa78], també podem calcular-los, vegeu [Tor08]. Així, per exemple, vistos com a elements de $\mathbb{C}[[q_1, q_2, q_3]]$ mitjançant el canvi de variables de

Siegel (cf. [Gau00], [Tor08]), obtenim que

$$\begin{aligned}
\psi_4 = \;& 1 + 240q_1q_2^2 + 240q_1q_2^2q_3 + 240q_1^2q_2^2q_3 + 13440q_1^2q_2^3q_3 \\
& +2160q_1^2q_2^4 + 30240q_1^2q_2^4q_3 + 2160q_1^2q_2^4q_3^2 + 13440q_1^2q_2^5q_3 \\
& +30240q_1^3q_2^4q_3 + 240q_1^2q_2^6q_3 + 30240q_1^3q_2^4q_3^2 + 138240q_1^3q_2^5q_3 \\
& +6720q_1^3q_2^6 + 138240q_1^3q_2^5q_3^2 + 181440q_1^3q_2^6q_3 + 2160q_1^4q_2^4q_3^2 \\
& +13440q_1^4q_2^5q_3 + \ldots \\
\psi_6 = \;& 1 - 504q_1q_2^2 - 504q_1q_2^2q_3 - 504q_1^2q_2^2q_3 + 44352q_1^2q_2^3q_3 \\
& -16632q_1^2q_2^4 + 166320q_1^2q_2^4q_3 - 16632q_1^2q_2^4q_3^2 + 44352q_1^2q_2^5q_3 \\
& +166320q_1^3q_2^4q_3 - 504q_1^2q_2^6q_3 + 166320q_1^3q_2^4q_3^2 + 2128896q_1^3q_2^5q_3 \\
& -122976q_1^3q_2^6 + 2128896q_1^3q_2^5q_3^2 + 3792096q_1^3q_2^6q_3 - 16632q_1^4q_2^4q_3^2 \\
& +44352q_1^4q_2^5q_3 + \ldots \\
\psi_{10} = \;& 1 - 264q_1q_2^2 - 264q_1q_2^2q_3 - 264q_1^2q_2^2q_3 + \tfrac{227244864}{43867}q_1^2q_2^3q_3 \\
& -135432q_1^2q_2^4 + \tfrac{2626026480}{43867}q_1^2q_2^4q_3 - 135432q_1^2q_2^4q_3^2 \\
& +\tfrac{227244864}{43867}q_1^2q_2^5q_3 + \tfrac{2626026480}{43867}q_1^3q_2^4q_3 - 264q_1^2q_2^6q_3 \\
& +\tfrac{2626026480}{43867}q_1^3q_2^4q_3^2 + \tfrac{306175997952}{43867}q_1^3q_2^5q_3 - 5196576q_1^3q_2^6 \\
& +\tfrac{306175997952}{43867}q_1^3q_2^5q_3^2 + \tfrac{950818774752}{43867}q_1^3q_2^6q_3 - 135432q_1^4q_2^4q_3^2 \\
& +\tfrac{227244864}{43867}q_1^4q_2^5q_3 + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{12} = \;& 1 + \tfrac{65520}{691}q_1q_2^2 + \tfrac{65520}{691}q_1q_2^2q_3 + \tfrac{65520}{691}q_1^2q_2^2q_3 + \tfrac{22266840960}{53678953}q_1^2q_2^3q_3 \\
& +\tfrac{134250480}{691}q_1^2q_2^4 + \tfrac{456798756960}{53678953}q_1^2q_2^4q_3 + \tfrac{134250480}{691}q_1^2q_2^4q_3^2 \\
& +\tfrac{22266840960}{53678953}q_1^2q_2^5q_3 + \tfrac{456798756960}{53678953}q_1^3q_2^4q_3 + \tfrac{65520}{691}q_1^2q_2^6q_3 \\
& +\tfrac{456798756960}{53678953}q_1^3q_2^4q_3^2 + \tfrac{162868282536960}{53678953}q_1^3q_2^5q_3 + \tfrac{11606736960}{691}q_1^3q_2^6 \\
& +\tfrac{162868282536960}{53678953}q_1^3q_2^5q_3^2 + \tfrac{661522702800960}{53678953}q_1^3q_2^6q_3 + \tfrac{134250480}{691}q_1^4q_2^4q_3^2 \\
& +\tfrac{22266840960}{53678953}q_1^4q_2^5q_3 + \ldots
\end{aligned}$$

on els monomis en vermell corresponen a matrius definides positives.

A partir d'aquests desenvolupaments es poden calcular, per exemple, els desenvolupaments de χ_{10} i χ_{12}:

$$\begin{aligned}
\chi_{10} = \;& -\tfrac{1}{4}q_1^2q_2^3q_3 + \tfrac{1}{2}q_1^2q_2^4q_3 - \tfrac{1}{4}q_1^2q_2^5q_3 + \tfrac{1}{2}q_1^3q_2^4q_3 + \tfrac{1}{2}q_1^3q_2^4q_3^2 \\
& +4q_1^3q_2^5q_3 + 4q_1^3q_2^5q_3^2 - 9q_1^3q_2^6q_3 - \tfrac{1}{4}q_1^4q_2^5q_3 + \ldots \\
\chi_{12} = \;& \tfrac{1}{12}q_1^2q_2^3q_3 + \tfrac{5}{6}q_1^2q_2^4q_3 + \tfrac{1}{12}q_1^2q_2^5q_3 + \tfrac{5}{6}q_1^3q_2^4q_3 + \tfrac{5}{6}q_1^3q_2^4q_3^2 \\
& -\tfrac{22}{3}q_1^3q_2^5q_3 - \tfrac{22}{3}q_1^3q_2^5q_3^2 - 11q_1^3q_2^6q_3 + \tfrac{1}{12}q_1^4q_2^5q_3 + \ldots
\end{aligned}$$

Observació 5.2.1 En general, el producte de sèries en tres indeterminades és costós de realitzar i per això convé trobar altres mètodes per al càlcul dels desenvolupaments de Fourier, vegeu [Sko92].

Abans de veure la relació de les funcions anteriors amb Thetanullwerte estudiarem el cos de funcions modulars. Per a això, tal com hem fet en el cas clàssic, introduirem els invariants projectius de formes sèxtiques.

Sigui u la forma sèxtica $u_0X^6 + u_1X^5 + \cdots + u_6$, $\xi_1, \ldots, \xi_6$ les seves arrels i escrivim $(ij) = \xi_i - \xi_j$. Definim els invariants projectius A, B, C, D d'aquesta forma sèxtica a partir de les expressions irracionals

$$\begin{array}{rl}
A(u) = & u_0^2 \sum_{\text{quinze}} (12)^2(34)^2(56)^2, \\
B(u) = & u_0^4 \sum_{\text{deu}} (12)^2(23)^2(31)^2(45)^2(56)^2(64)^2, \\
C(u) = & u_0^6 \sum_{\text{seixanta}} (12)^2(23)^2(31)^2(45)^2(56)^2(64)^2(14)^2(25)^2(36)^2, \\
D(u) = & u_0^{10} \prod_{j<k} (jk)^2,
\end{array}$$

on les sumes recorren totes les permutacions de les arrels que donen sumands diferents i els subíndexs indiquen el nombre de sumands que té el sumatori. A partir d'aquests invariants projectius es defineixen els invariants absoluts:

$$j_1 = 2^4 3^2 B/A^2,\ j_2 = 2^6 3^3 (3C - AB)/A^3,\ j_3 = 2 \cdot 3^5 D/A^5.$$

L'expressió dels invariants absoluts anteriors mitjançant formes modulars, o equivalentment, la seva descripció explícita com a funcions modulars es troba en [Igu62] i és:

$$j_1 = \frac{\psi_4 \chi_{10}^2}{\chi_{12}^2},\ j_2 = \frac{\psi_6 \chi_{10}^3}{\chi_{12}^3},\ j_3 = \frac{\chi_{10}^6}{\chi_{12}^5}.$$

El següent pas seria donar desenvolupaments de Fourier d'aquestes funcions, però abans convé notar que no tot quocient de sèries formals en tres indeterminades admet una descripció com a sèrie de Laurent. Ara bé, els quocients que defineixen les funcions j_1, j_2, j_3 sí que n'admeten, i això es deu al fet que el desenvolupament de tota forma parabòlica està en $q_1^2 q_2^3 q_3 \mathbb{C}[[q_1, q_2, q_3]]$ i que $12\chi_{12}/q_1^2 q_2^3 q_3$ té terme constant 1. En conseqüència, podem calcular els desenvolupaments de Laurent d'aquestes funcions i obtenim, d'acord amb [Gau00],

$$
\begin{aligned}
j_1 = \; & 9 - 216q_2 - 216q_1q_2 + 3456q_2^2 - 4730q_2^3 - 216q_1q_2q_3 \\
& +10368q_1q_2^2 + 597888q_2^4 + 3456q_1^2q_2^2 - 238680q_1q_2^3 \\
& +10368q_1q_2^2q_3 + \dots \\
j_2 = \; & -27 + 972q_2 - 21384q_2^2 + 972q_1q_2 + 376164q_2^3 - 34992q_1q_2^2 \\
& +972q_1q_2q_3 - 21384q_1^2q_2^2 + 910764q_1q_2^3 - 34992q_1q_2^2q_3 \\
& -5828112q_2^4 + \dots \\
j_3 = \; & q_1^2q_2^3q_3\big(\tfrac{243}{4} - \tfrac{7533}{2}q_2 + \tfrac{525123}{4}q_2^2 - \tfrac{7533}{2}q_1q_2 \\
& -\tfrac{7533}{2}q_1q_2q_3 + 283338q_1q_2^2 - 3411720q_2^3 + \tfrac{525123}{4}q_1^2q_2^2 \\
& -11756583q_1q_2^3 + 283338q_1q_2^2q_3 + 13876860q_2^4 + \dots\big)
\end{aligned}
$$

Per a acabar veurem que les funcions anteriors admeten una descripció mitjançant Thetanullwerte de manera similar al que passava en gènere 1. Així podem escriure:

$$
\begin{aligned}
2^2\psi_4 = \; & \textstyle\sum_{m \text{ parell}} \theta_m^8, \\
2^2\psi_6 = \; & \textstyle\sum \pm(\theta_{m_1}\theta_{m_2}\theta_{m_3})^4 = \sum_{\Gamma_2/\Gamma_2(2)} M(\theta_{0000}^4\theta_{0001}^4\theta_{0010}^4), \\
-2^{14}\chi_{10} = \; & \textstyle\prod_{m \text{ parell}} \theta_m^2, \\
2^{17}3\chi_{12} = \; & \textstyle\sum(\theta_{m_1}\dots\theta_{m_6})^4,
\end{aligned}
$$

on les sumes recorren:

- per a ψ_6: ternes sizigètiques (la suma de les tres característiques és parella), amb el signe $+$ per a la terna $m_1 = (0000)$, $m_2 = (0001)$, $m_3 = (0010)$ i la resta de signes obtinguts a partir d'aquest (60 sumands: 30 amb signe $+$ i la resta amb signe $-$).

- per a χ_{12}: complements de quaternes sizigètiques.

Ara, abans d'acabar momentàniament la discussió sobre gènere 2, ens podríem preguntar sobre l'existència de formes modulars de pes senar.

Recordem que en gènere g i pes k, si gk és senar, no hi ha formes modulars no nul·les de gènere g i pes k. Per a $g = 2$, a diferència del que passa en gèneres 1 i 3, això no dóna una obstrucció i, per tant, podem tenir formes modulars de pes senar. El fet és que n'hi ha i la de pes menor es pot prendre $\chi_{35} \in S_{35}(\Gamma_2)$ definida mitjançant Thetanullwerte com

$$2^{39}5^3 i\chi_{35} = \left(\prod_{m \text{ parell}} \theta_m\right)\left(\sum M(\theta_{0000}\theta_{0001}\theta_{0100})^{20}\right),$$

on la suma recorre $Stab(\prod \theta_m)/Stab((\theta_{0000}\theta_{0001}\theta_{0100})^{20})$ i $Stab(\cdot) \subset \Gamma_2$ denota el subgrup de Γ_2 que fixa el corresponent producte de Thetanullwerte.

Però només això, ja que, com veurem més endavant, es pot provar que l'anell obtingut adjuntant aquesta forma senar a l'anell de formes modulars de pes parell és l'anell graduat de totes les formes modulars de Siegel de gènere 2.

5.3 Alguns resultats generals

Tal com hem comentat en la introducció, volem establir una relació entre l'anell de formes modulars i l'anell d'invariants projectius. Per a fer això necessitem recuperar un resultat clàssic sobre Thetanullwerte, la fórmula de Thomae, així com alguns resultats d'Igusa [Igu64a, Igu66] sobre l'anell de Thetanullwerte.

Sigui $W \subset \mathbb{C}^{2g+2}$ la varietat quasiprojectiva $\{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2g+2}) \in \mathbb{C}^{2g+2} : \xi_i \neq \xi_j,\ \forall i \neq j\}$ i per a cada punt $\xi \in W$ considerem la corba hiperel·líptica $C(\xi)$ associada a $y^2 = \prod_{1 \le i \le 2g+2}(x - \xi_i)$.

Per a $i = 1, \dots, 2g+2$ fixem $P_i \in C(\xi)$ el punt corresponent a $x = \xi_i$ i considerem $J(\xi)$ la jacobiana de $C(\xi)$ amb funció canònica $\phi : C(\xi) \to J(\xi)$ tal que $\phi(P_1) = 0_{J(\xi)}$. Escrivim $Z = Z(\xi) \in \mathbb{H}_g$ tal que defineix $J(\xi)$.

Sigui $\phi(P_i) = \frac{1}{2}{}^t m_i'' + \frac{1}{2}{}^t m_i' Z$, amb $m_i', m_i'' \in \mathbb{Z}^g$ vectors columna i definim $t = \sum m_i$, on $m_i = \begin{pmatrix} m_i' \\ m_i'' \end{pmatrix}$ i la suma és sobre els m_i tals que $\exp(\pi i {}^t m_i' m_i'') = -1$.

Teorema 5.5 - *$\theta_{t+m}(Z(\xi)) \neq 0$ si i només si $m = m_{i_2} + \cdots + m_{i_{g+1}}$ amb $2 \le i_2 < \cdots < i_{g+1} \le 2g+2$.*

- *(Fórmula de Thomae) Sigui* $\{i_{g+2},\ldots,i_{2g+2}\}$ *el complement de* $\{1,i_2,\ldots,i_{g+1}\}$ *en* $\{1,\ldots,2g+2\}$ *i escrivim*

$$(i_1\ldots i_s,i_{s+1}\ldots i_{2s})=\prod_{1\le i<j\le i_s}(\xi_i-\xi_j)\prod_{s+1\le i<j\le 2s}(\xi_i-\xi_j).$$

Aleshores, el quocient

$$\theta^8_{t+m_{i_2}+\cdots+m_{i_{g+1}}}(Z(\xi))/(1i_2\ldots i_{g+1},i_{g+2}\ldots i_{2g+2})^2$$

és independent de $i_2,\ldots,i_{g+1}$. $\square$

El teorema anterior ens dóna una manera d'associar a una funció theta que no s'anul·la en un punt $Z(\xi)$ un producte de $((\xi_i-\xi_j)^2)^{1/8}$.

Però no només això, sinó que es pot determinar quan un producte de Thetanullwerte es correspon, segons el teorema anterior, amb potències enteres.

Teorema 5.6 (Igusa, 1966) *Sigui k un enter positiu i considerem un producte $\theta_{m_1}\ldots\theta_{m_{2k}}$ tal que $(\theta_{m_1}\ldots\theta_{m_{2k}})(Z(\xi))\neq 0$. Si substituim cada θ_m per la corresponent expressió en termes de $\xi_i-\xi_j$, obtenim un producte de potències enteres de $\xi_i-\xi_j$ si, i només si, $\theta_{m_1}\ldots\theta_{m_{2k}}$ defineix una forma modular de nivell* 2. $\square$

I a més controlem quins productes de Thetanullwerte són formes modulars per a $\Gamma_g(2)$:

Teorema 5.7 (Igusa, 1965) *L'anell graduat $A(\Gamma_g(2))$ és la clausura entera de l'anell graduat generat sobre $\mathbb{C}$ per monomis $\theta_{m_1}\ldots\theta_{m_{2k}}$ de característiques semienteres*

$${}^t m_\alpha=\begin{pmatrix}m'_\alpha\\ m''_\alpha\end{pmatrix},\ \alpha=1,\ldots,2k,$$

amb m'_α i m''_α vectors d'entrades enteres que compleixen

$$\begin{array}{l}\sum_\alpha(m'_{\alpha_i})^2\equiv\sum_\alpha(m''_{\alpha_i})^2\equiv 0\pmod 4,\\ \sum_\alpha m'_{\alpha_i}m'_{\alpha_j}\equiv\sum_\alpha m'_{\alpha_i}m'_{\alpha_j}\equiv 0\pmod 2,\\ \sum_\alpha m'_{\alpha_i}m''_{\alpha_j}\equiv 0\ (i\neq j)\pmod 2,\\ \sum_\alpha m'_{\alpha_i}m''_{\alpha_i}\equiv k\pmod 2.\end{array}$$

$\square$

Observació 5.3.1 Per a $g = 2$, l'anell de Thetanullwerte anterior és íntegrament tancat i, per tant, coincideix amb l'anell de formes modulars de nivell 2. De manera similar, Igusa descriu altres anells de formes modulars com a clausures enteres d'anells de Thetanullwerte, que per a $g = 2$ són íntegrament tancats, i dóna exemples explícits de no normalitat mitjançant nullwerte jacobians per a gèneres $g \geq 3$ (cf. [Igu81]).

5.3.1 El morfisme ρ

Utilitzant tots els resultats que hem vist fins ara es pot demostrar el següent teorema, que relaciona, tal com ja havíem anticipat, l'anell de formes modulars de Siegel de gènere g amb l'anell d'invariants projectius d'una forma binària de grau $2g + 2$, $S(2, 2g + 2)$.

Teorema 5.8 (Igusa, 1966) *Sigui $A(\Gamma_g)$ l'anell graduat de formes modulars de Siegel de gènere g i $S = S(2, 2g + 2)$.*

Existeix un morfisme

$$\rho : \textit{un subanell de } A(\Gamma_g) \to S$$

que incrementa el pes per un factor $\frac{1}{2}g$ i que és únicament determinat mòdul multiplicació per un factor $i^{\alpha k}$ en la part homogènia de grau k, $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(i) El domini de definició de ρ conté tots els elements de pes parell i els polinomis en Thetanullwerte continguts en $A(\Gamma_g)$. En particular, resulta que és tot $A(\Gamma_g)$ per a g senar i també per a $g = 2, 4$.

(ii) Un element $\psi \in A(\Gamma_g)$ està en el nucli de ρ si i només si ψ s'anul·la en tots els punts de $\mathbb{H}_g$ associats a una corba hiperel·líptica (en particular, és injectiu per a $g = 1, 2$).

(iii) Donades dues formes modulars f i g del mateix pes per a les quals ρ està definit, $\xi \in W$ i $Z(\xi) \in \mathbb{H}_g$ associat a $J(\xi)$, es té que $f(Z(\xi))/g(Z(\xi)) = \rho(f)/\rho(g)$ com a funcions de ξ. □

En conseqüència, per a $g = 1$, ρ és bijectiva; per a $g = 2$, és injectiva i per a gèneres superiors no és ni injectiva ni exhaustiva. Es pot determinar un subanell de $S_0 \subset S$ que conté la imatge de ρ.

Teorema 5.9 *Sigui $S = S(2, r)$, $r \geq 4$, l'anell graduat d'invariants projectius de formes binàries de grau r i sigui I un invariant projectiu de grau s, vist com un element de $\mathbb{C}[\{\xi_i - \xi_j\}_{1 \leq i < j \leq r}]$. Considerem la valoració*

$$\nu(I) = -\deg_t I(\xi_1, \ldots, \xi_{r-3}, t + \xi_{r-2}, \ldots, t + \xi_r) + \frac{s(3r-10)}{r-2}$$

i escrivim S_0 el subanell de S generat per elements de valoració no negativa. Aleshores, la imatge de ρ està continguda en S_0. $\square$

Idea 5.1 ($g = 2, 3$) *Per a una forma modular f, la valoració $\nu(\rho(f))$ és la multiplicitat del locus reductible com a zero (o per a una funció modular pol) de f.*

Com veurem més endavant, els Thetanullwerte no només juguen un paper fonamental a l'hora de relacionar les formes modulars amb invariants projectius, sinó que també són indispensables per a construir formes modulars d'una manera senzilla i explícita en gèneres superiors, on ja no és cert que totes les formes modulars (de pes parell) siguin polinomis en sèries d'Eisenstein.

5.4 Aplicació: Una demostració del teorema d'estructura per a gènere 2

Mantenim les notacions de la secció 5.2 i escrivim $I_4, I_6, I_{10}, I_{12}, I_{35}$ les imatges per ρ de $2^2\psi_4, 2^2\psi_6, -2^{14}\chi_{10}$, $2^{17}3\chi_{12}, 2^{39}5^3 i\chi_{35}$, respectivament.

L'anell d'invariants projectius de formes binàries de grau 6 és generat pels quatre invariants A, B, C, D de grau parell més un invariant E de grau 15 definit per

$$E = \prod \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 + \xi_2 & \xi_1\xi_2 \\ 1 & \xi_3 + \xi_4 & \xi_3\xi_4 \\ 1 & \xi_5 + \xi_6 & \xi_5\xi_6 \end{vmatrix},$$

on el producte recorre totes les permutacions de les arrels que donen factors diferents. L'expressió dels invariants $I_4, I_6, I_{10}, I_{12}, I_{35}$ en termes de A, B, C, D, E s'obté a partir de les seves expressions per mitjà de Thetanullwerte; resulta

$$I_4 = B,\ I_6 = \frac{AB - 3C}{2},\ I_{10} = D,\ I_{12} = AD,\ I_{35} = 5^3 D^2 E.$$

Si calculem la valoració ν d'aquests invariants s'obté que

$$\nu(A) = -2,\ \nu(B) = \nu(C) = 0,\ \nu(D) = 2 \text{ i } \nu(E) = -3,$$

d'on resulta que els invariants $I_4, I_6, I_{10}, I_{12}, I_{35}$ generen $S(2,6)_0$.

Aquest fet, juntament amb la injectivitat del morfisme ρ, dóna una demostració del teorema d'estructura de l'anell de formes modulars de gènere 2 (no només per al subanell de grau parell).

Teorema 5.10 (Igusa, 1963) *L'anell graduat de formes modulars de gènere 2 és $A(\Gamma_2) = \mathbb{C}[\psi_4, \psi_6, \chi_{10}, \chi_{12}, \chi_{35}]$. La funció generatriu d'aquest anell graduat és*

$$\frac{(1 + T^{35})}{(1 - T^4)(1 - T^6)(1 - T^{10})(1 - T^{12})}. \qquad \square$$

Per a acabar, donarem l'expressió de χ_{35}^2 en funció de les formes modulars $\psi_4, \psi_6, \chi_{10}, \chi_{12}$, que es pot obtenir a partir de l'expressió de E^2 en termes de A, B, C, D:

$$\begin{aligned}
\chi_{35}^2 = \quad & 2^{-12} 3^{-9} \chi_{10} \left[2^{24} 3^{15} \chi_{12}^5 - 2^{13} 3^9 \psi_4^3 \chi_{12}^4 - 2^{13} 3^9 \psi_6^2 \chi_{12}^4 \right. \\
& + 3^3 \psi_4^6 \chi_{12}^3 - 2 \cdot 3^3 \psi_4^3 \psi_6^2 \chi_{12}^3 - 2^{14} 3^8 \psi_4^2 \psi_6 \chi_{10} \chi_{12}^3 \\
& - 2^{23} 3^{12} 5^2 \psi_4 \chi_{10}^2 \chi_{12}^3 + 3^3 \psi_6^4 \chi_{12}^3 + 2^{11} 3^6 37 \psi_4^4 \chi_{10}^2 \chi_{12}^2 \\
& + 2^{11} 3^6 5 \cdot 7 \psi_4 \psi_6^2 \chi_{10}^2 \chi_{12}^2 - 2^{23} 3^9 5^3 \psi_6 \chi_{10}^3 \chi_{12}^2 - 3^2 \psi_4^7 \chi_{10}^2 \chi_{12} \\
& + 2 \cdot 3^2 \psi_4^4 \psi_6^2 \chi_{10}^2 \chi_{12} + 2^{11} 3^5 5 \cdot 19 \psi_4^3 \psi_6 \chi_{10}^3 \chi_{12} \\
& + 2^{20} 3^8 5^3 \cdot 11 \psi_4^2 \chi_{10}^4 \chi_{12} - 3^2 \psi_4 \psi_6^4 \chi_{10}^2 \chi_{12} + 2^{11} 3^5 5^2 \psi_6^3 \chi_{10}^3 \chi_{12} \\
& - 2 \psi_4^6 \psi_6 \chi_{10}^3 - 2^{12} 3^4 \psi_4^5 \chi_{10}^4 + 2^2 \psi_4^3 \psi_6^3 \chi_{10}^3 + 2^{12} 3^4 5^2 \psi_4^2 \psi_6^2 \chi_{10}^4 \\
& \left. + 2^{21} 3^7 5^4 \psi_4 \psi_6 \chi_{10}^5 - 2 \psi_6^5 \chi_{10}^3 + 2^{32} 3^9 5^5 \chi_{10}^6 \right].
\end{aligned}$$

5.5 El cas de gènere 3

La demostració del teorema d'estructura per a l'anell graduat de formes modulars de gènere 3 que es troba en [Tsu86a, Tsu86b] es basa, essencialment, en un estudi explícit del morfisme ρ i de la compatibilitat, mitjançant diferents morfismes, entre aquest i els corresponents morfismes per a gèneres inferiors. Tots els detalls sobre la construcció d'aquests morfismes i les diferents compatibilitats es poden trobar en l'article original.

Com que l'article és molt llarg i tècnic ens limitarem a donar una pinzellada dels punts que intervenen en la demostració, parant especial atenció a les tècniques per a la construcció de formes modulars a partir de Thetanullwerte.

5.5.1 Les formes modulars χ_{18} i χ_{28}

Sabem que el nucli del morfisme ρ està generat pel conjunt de formes modulars que s'anul·len en el locus hiperel·líptic. Per això, en el cas $g = 3$, el nucli del morfisme ρ és principal i està generat per una forma modular de pes 18, χ_{18}, definida per

$$\chi_{18} = \prod_{m \text{ parell}} \theta_m,$$

que s'anul·la (amb multiplicitat 1) en la clausura del locus hiperel·líptic.

Per a poder classificar completament els punts de $\mathbb{H}_3$ cal introduir una nova forma modular que diferenciï els punts hiperel·líptics dels punts reductibles. Això és el que fa la forma modular χ_{28}:

$$\chi_{28} = \frac{1}{322560} \sum_{M \in \Gamma_3/\Gamma_3(2)} M\chi_{18}^2/((131))^2,$$

on

$$((131)) = \theta_{000100}\theta_{000101}\theta_{000000}\theta_{000001}\theta_{000011}\theta_{000010}\theta_{000111}\theta_{000110}.$$

Aleshores, si $Z \in \mathbb{H}_3$:

$$\begin{cases} \chi_{18}(Z) \neq 0 : Z \text{ no hiperel·líptic,} \\ \chi_{18}(Z) = 0 \begin{cases} \chi_{28}(Z) \neq 0 : Z \text{ hiperel·líptic,} \\ \chi_{28}(Z) = 0 : Z \text{ reductible.} \end{cases} \end{cases}$$

Observació 5.5.1 χ_{28} s'anul·la amb multiplicitat 8 al llarg del locus reductible.

5.5.2 Una descomposició de l'anell $A(\Gamma_3)/\chi_{18}A(\Gamma_3)$

Per a ν parell definim $A(\nu)$ l'ideal graduat de $A(\Gamma_3)$ generat per elements homogenis tals que $\nu(f) \geq \nu$, on $\nu(f)$ és l'ordre d'anul·lació de $f|_V$ en R, i on V designa el locus hiperel·líptic i R el locus reductible.

Observació 5.5.2 L'ordre ν satisfà que $\nu(f) = \nu(\rho(f))$.

Observem, per exemple, que $\chi_{18} \in A(\nu)$ per a tot ν. Definim també $\overline{A}(\nu) = A(\nu)/A(\nu+2)$ i resulta que

$$A(\Gamma_3)/\chi_{18}A(\Gamma_3) \cong \bigoplus_{\nu} \overline{A}(\nu).$$

- Es té una inclusió

  $$\overline{A}(\nu) \hookrightarrow A(\Gamma_2') \otimes A(\Gamma_1),$$

  on $\Gamma_2' \subset \Gamma_2$ és el subgrup d'índex 6 que deixa invariant la característica (1110) (χ_{28} intervé en la definició d'aquest morfisme).

- L'estudi d'aquesta inclusió depèn del coneixement de formes modulars en $A(\Gamma_3)$.

- Per a $\overline{A}(\nu)$, $\nu \geq 6$, es té un isomorfisme

  $$\chi_{28}\overline{A}(\nu) \cong \overline{A}(\nu+8).$$

Per tant, això redueix l'estudi dels anells graduats $\overline{A}(\nu)$ a l'estudi d'algunes de les peces de grau baix, que es realitza mitjançant el coneixement de generadors i utilitzant fortament l'interpretació de formes modulars com a invariants.

Tot això permet la determinació de les funcions generatrius de tots aquests ideals (en un determinat moment cal utilitzar també el teorema del punt fix d'Atiyah-Singer i el principi de proporcionalitat de Hirzebruch).

5.5.3 Construcció de formes modulars

Els conceptes bàsics que intervenen en la construcció de formes modulars de gènere 3 a partir de Thetanullwerte són els de successions sizigètiques i azigètiques maximals.

Definició 5.1 *Una successió de característiques* $m_1, \ldots, m_s$ *es diu:*

- *sizigètica: si qualsevol subterna és sizigètica (la seva suma és parella);*

- *azigètica: si qualsevol subterna és azigètica (la suma és senar).*

$\Gamma_3/\Gamma_3(2)$ actua transitivament en el conjunt de les 135 successions sizigètiques maximals i en el conjunt de les successions azigètiques maximals.

En conseqüència, totes les successions sizigètiques (resp. azigètiques) maximals tenen el mateix cardinal; més concretament: tota successió sizigètica maximal té longitud 8 i tota successió azigètica maximal té longitud 6.

Tenint en compte aquests conceptes, podem construir formes modulars per a $\Gamma_3(2)$ de les tres maneres següents:

(i) El producte de Thetanullwerte associats a una successió sizigètica maximal és una forma modular per a $\Gamma_3(2)$.

(ii) El quadrat del producte de Thetanullwerte associats a la intersecció de dues successions sizigètiques maximals és una forma modular per a $\Gamma_3(2)$.

(iii) Tota potència quarta d'un Thetanullwerte parell és una forma modular per a $\Gamma_3(2)$.

En conseqüència, tot polinomi de Thetanullwerte que s'escrigui com una funció racional de Thetanullwerte a partir dels punts anteriors i χ_{18} serà una forma modular per a $\Gamma_3(2)$.

Exemples

Seguint les notacions de [Tsu86a], tenim

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= \tfrac{1}{8}\textstyle\sum_{k \text{ parell}} \theta_k^8 = \sum_{i=1}^{135}((i)) \\
&= \textstyle\sum_{M\in\Gamma_3/\Gamma_3(2)} M((131)\cap(132)), \\
\alpha_6 &= 2^{-6}3^{-1}7^{-1}\textstyle\sum_{M\in\Gamma_3/\Gamma_3(2)} M(\theta^4_{000000}((131))) = 8\psi_6, \\
\alpha_{10} &= -2^{-4}3^{-2}5^{-1}11^{-1} \\
&\quad \textstyle\sum_{M\in\Gamma_3/\Gamma_3(2)} M(((73)\cap(85))((115)\cap(119))((131))/\theta^4_{000000}), \\
\alpha_{12} &= 2^{-3}3^{-2}\textstyle\sum_{\{k_i\} \text{ maximal azigètica}}(\theta_{k_1}\dots\theta_{k_6})^4, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}
((73)) &= \theta_{111000}\theta_{110000}\theta_{011000}\theta_{010000}\theta_{001000}\theta_{000000}\theta_{101000}\theta_{100000}, \\
((85)) &= \theta_{110000}\theta_{110001}\theta_{010000}\theta_{010001}\theta_{000000}\theta_{000001}\theta_{100000}\theta_{100001}, \\
((115)) &= \theta_{011100}\theta_{010100}\theta_{110110}\theta_{111110}\theta_{001000}\theta_{000000}\theta_{100010}\theta_{101010}, \\
((119)) &= \theta_{010100}\theta_{010101}\theta_{110111}\theta_{110110}\theta_{000000}\theta_{000001}\theta_{100011}\theta_{100010}, \\
((131)) &= \theta_{000100}\theta_{000101}\theta_{000000}\theta_{000001}\theta_{000011}\theta_{000010}\theta_{000111}\theta_{000110}, \\
((132)) &= \theta_{000100}\theta_{000101}\theta_{100011}\theta_{100010}\theta_{100000}\theta_{100001}\theta_{000111}\theta_{000110}.
\end{aligned}$$

Observació 5.5.3 $\alpha_{12} \notin \langle \alpha_4^3, \psi_6^2, \psi_{12}\rangle_{\mathbb{C}}$ ja que α_{12} és una forma parabòlica (està en el nucli de l'operador de Siegel) però les imatges de les tres formes α_4, ψ_6 i ψ_{12} per l'operador de Siegel són algebraicament independents, ja que són les corresponents sèries d'Eisenstein de gènere 2. En particular, α_{12} no es pot escriure com un polinomi en sèries d'Eisenstein.

5.6 Teorema d'estructura

Teorema 5.11 (Tsuyumine, 1986) $A(\Gamma_3)$ *està generat per* 34 *formes modulars:* α_4, α_6, α_{10}, α_{12}, α'_{12}, α_{16}, α_{18}, α_{20}, α_{24}, α_{30}, β_{14}, β_{16}, β_{22}, β'_{22}, β_{26}, β_{28}, β_{32}, β_{44}, γ_{20}, γ_{24}, γ_{26}, γ_{32}, γ'_{32}, γ_{36}, γ_{38}, γ'_{38}, γ_{42}, γ_{44}, δ_{30}, δ_{36}, δ_{46}, δ_{48}, χ_{28}, χ_{18}. *La funció generatriu de* $A(\Gamma_3)$ *és*

$$\frac{1}{(1-T^4)(1-T^{12})^2(1-T^{14})(1-T^{18})(1-T^{20})(1-T^{30})}$$
$$\begin{aligned}&(1+T^6+T^{10}+T^{12}+3T^{16}+2T^{18}+2T^{20}+5T^{22}\\
&+4T^{24}+5T^{26}+7T^{28}+6T^{30}+9T^{32}+10T^{34}+10T^{36}+12T^{38}\\
&+14T^{40}+15T^{42}+16T^{44}+18T^{46}+18T^{48}+19T^{50}+21T^{52}\\
&+19T^{54}+21T^{56}+21T^{58}+19T^{60}+21T^{62}+19T^{64}+18T^{66}\\
&+18T^{68}+16T^{70}+15T^{72}+14T^{74}+12T^{76}+10T^{78}+10T^{80}\\
&+9T^{82}+6T^{84}+7T^{86}+5T^{88}+4T^{90}+5T^{92}+2T^{94}+2T^{96}\\
&+3T^{98}+T^{102}+T^{104}+T^{108}+T^{114}).\end{aligned}$$ □

Gràcies a l'expressió de les formes modulars anteriors tenim també el següent corol·lari:

Corol·lari 5.12 $A(\Gamma_3)$ *està contingut en l'anell graduat de Theta-nullwerte de característica semientera.* □

- L'ideal de formes parabòliques està generat per les formes α_{12}, $\alpha_{16}-\frac{27}{4}\alpha_6\alpha_{10}$, $\alpha_{18}-27\alpha_4^2\alpha_{10}$, $\alpha_{20}-\frac{27}{4}\alpha_{10}^2$, $\alpha_{24}-\frac{243}{2}\alpha_4\alpha_{10}^2$, $\alpha_{30}-\frac{2511}{4}\alpha_{10}^3$, β_i, β'_i, γ_i, γ'_i, δ_i, χ_i. Com que tenim la successió exacta
$$0\to S(\Gamma_3)\to A(\Gamma_3)\xrightarrow{\Phi}A(\Gamma_2)\to 0,$$
la funció generatriu de l'ideal de formes parabòliques s'obté restant la funció generatriu de $A(\Gamma_2)^{(parell)}$ de la de $A(\Gamma_3)$.

- L'ideal que defineix el locus reductible està generat per β_i, β'_i, γ_i, γ'_i, δ_i, χ_i.

- Totes les funcions anteriors tenen desenvolupaments de Fourier racionals.

- La notació per a les funcions és $\alpha_i,\alpha'_i\in A(0)$, $\beta_i,\beta'_i\in A(2)$, $\gamma_i,\gamma'_i\in A(4)$ i $\delta_i\in A(6)$.

- Totes les funcions anteriors es poden descriure mitjançant Thetanullwerte de característica semientera, però no mitjançant sèries d'Eisenstein.

5.7 Funcions modulars

A partir d'aquests elements podem donar una descripció del cos de funcions modulars de gènere 3, que sabem que té grau de transcendència 6 sobre $\mathbb{C}$, mitjançant 33 generadors. Aquest nombre de generadors es pot rebaixar considerablement tal com es demostra en [Tsu87] i es té el resultat següent.

Teorema 5.13 (Tsuyumine, 1987) *El cos de funcions modulars de gènere* 3 *està generat per les* 7 *funcions modulars següents:* α_6^2/α_4^3, α_{12}/α_4^3, α'_{12}/α_4^3, $(\alpha_{20} - 5\alpha_{10}^2 + 7c\alpha_6\beta_{14})/\alpha_4^5$, $(7\alpha_{30} - 313\alpha_{20}\alpha_{10} + 865\alpha_{10}^3)/(\alpha_4^6\alpha_6)$, χ_{28}/α_4^7, $\chi_{18}/(\alpha_4^3\alpha_6)$, *on* c *es pot prendre tal que compleixi* $2^{364}3^{31}5^{17}7^{16}11^{24}ac \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ *per a qualsevol enter positiu* a *menor que* $2^{28}3^4 5$. □

- La condició que donem sobre c és suficient però no necessària; de fet, es veu que el resultat és cert per a qualsevol valor racional de c, potser llevat d'un.

Bibliografia

[Igu60] Igusa, J.-I.: Arithmetic variety of moduli for genus two. *Ann. of Math.* (2) 72 (1960), 612–649.

[Igu62] Igusa, J.-I.: On Siegel modular forms of genus two. *Amer. J. Math.* 84 (1962), 175–200.

[Igu64a] Igusa, J.-I.: On the graded ring of theta-constants. *Amer. J. Math.* 86 (1964), 219–246.

[Igu64b] Igusa, J.-I.: On Siegel modular forms genus two. II. *Amer. J. Math.* 86 (1964), 392–412.

[Igu66] Igusa, J.-I.: On the graded ring of theta-constants. II. *Amer. J. Math.* 88 (1966), 221–236.

[Igu67] Igusa, J.-I.: Modular forms and projective invariants. *Amer. J. Math.* 89 (1967), 817–855.

[Maa78] Maass, H.: Lineare Relationen für die Fourierkoeffizienten einiger Modulformen zweiten Grades. *Math. Ann.* 232 (1978), no. 2, 163–175.

[Igu81] Igusa, J.-I.: On the nullwerte of Jacobians of odd theta functions. *Symposia Mathematica*, Vol. XXIV (Sympos., INDAM, Rome, 1979), Academic Press, London, (1981), 83–95.

[Tsu86a] Tsuyumine, S.: On Siegel modular forms of degree three. *Amer. J. Math.* 108 (1986), no. 4, 755–862.

[Tsu86b] Tsuyumine, S.: Addendum to: "On Siegel modular forms of degree three". *Amer. J. Math.* 108 (1986), no. 4, 1001–1003.

[Tsu87] Tsuyumine, S.: On the Siegel modular function field of degree three. *Compositio Math.* 63 (1987), no. 1, 83–98.

[Sko92] Skoruppa, N.-P.: Computations of Siegel modular forms of genus two. *Math. Comp.* 58 (1992), no. 197, 381–398.

[Gau00] Gaudry, P.: Algorithmique des courbes hyperelliptiques et applications à la cryptologie. École Polytechnique PhD Thesis, 2000.

[Tor08] Torres, E.: Aspectes bàsics de les formes modulars de Siegel. En aquest volum, 2008.