

## Capítol 2

# El Árbol de Bruhat-Tits asociado a un grupo de Schottky

### Introducción

El objetivo de este capítulo es asociar, a cada subgrupo de Schottky  $\Gamma$ , un árbol  $T_\Gamma$ , junto con una acción  $\Gamma \curvearrowright T_\Gamma$ . Esencialmente, seguiremos la exposición del parágrafo §1 de [10]. No presentaremos las pruebas completas, que el lector puede consultar en [10], sino que nos centraremos en motivar las definiciones y tratar de dar una idea de las demostraciones de los resultados principales.

En [10] se trabaja con un anillo local  $A$ , dominio de integridad, Noetheriano, íntegramente cerrado y completo. Nosotros consideraremos a menudo el caso particular en que  $A$  es un anillo de valoración discreta (es decir, el caso en que la dimensión de Krull es 1, cf. [13], Prop. 9.2). Este caso resulta técnicamente más sencillo, y lo utilizaremos con frecuencia para ilustrar los conceptos principales. Utilizaremos el siguiente convenio: cuando trabajemos en el contexto general, denotaremos por  $A$  al anillo local y por  $K_A$  a su cuerpo de fracciones. Cuando nos limitemos a considerar el caso en que la dimensión de  $A$  es 1, denotaremos por  $\mathcal{O}$  al anillo  $A$  y por  $K$  a su cuerpo de fracciones.

En la primera sección introduciremos la noción de árbol. A continuación, en la segunda sección nos centraremos en un caso simple, el árbol asociado al grupo  $\mathrm{PGL}_2(K)$ , donde  $K$  es un cuerpo local. En la tercera sección generalizaremos este concepto a subgrupos de  $\mathrm{PGL}_2(K)$ , lo que motivará la definición de grupo de Schottky. Finalmente, en la cuarta sección trabajaremos con subgrupos de  $\mathrm{PGL}_2(K_A)$ ; enunciaremos el resultado que asocia un árbol a cada grupo de Schottky plano, e ilustraremos algunos conceptos asociados.

## 2.1 Árboles

**2.1.1 Definición.** 1. Un *grafo* es una pareja  $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , donde:

- $\mathcal{V}$  es un conjunto, cuyos elementos se denominan *vértices*,
- $\mathcal{E} = \{E(V_1, V_2) : V_1, V_2 \in \mathcal{V}\}$ , donde, para cada par de vértices  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ ,  $E(V_1, V_2)$  es un conjunto, cuyos elementos se denominan *aristas*.

2. Un grafo  $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  se dice *no orientado* si, para todo  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ ,  $E(V_1, V_2) = E(V_2, V_1)$ .

En todo este capítulo trabajaremos con grafos no orientados. Identificaremos por tanto  $E(V_1, V_2)$  y  $E(V_2, V_1)$ .

**2.1.1 Ejemplo.** 1. **Camino:** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos el grafo  $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  del siguiente modo:

- **Vértices:**  $\{0, \dots, n\}$ .
- **Aristas:**

$$E(i, j) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } j = i + 1 \text{ o } i = j + 1 \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Es decir, es el grafo formado por  $n+1$  vértices; los vértices están unidos por aristas sí y sólo si son consecutivos. Los vértices 0 y  $n$  juegan un papel especial: son los *extremos*. Debajo tenemos una figura para el caso  $n = 5$ .

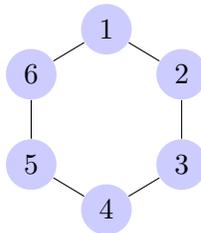


2. **Ciclo:** Sea  $n \geq 3$ . La idea ahora es definir un camino cerrado, es decir, conectar los dos extremos. De forma más precisa, definimos el grafo  $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  del siguiente modo:

- **Vértices:**  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- **Aristas:**

$$E(i, j) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } a + 1 - b \in (n) \text{ o } b + 1 - a \in (n) \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Debajo tenemos una figura para el caso  $n = 6$ .

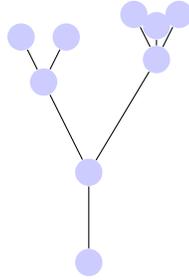


Antes de introducir la noción de árbol, necesitamos definir el concepto de grafo conexo. Para esto haremos uso de la noción de subgrafo.

**2.1.2 Definición.** Sea  $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  un grafo no orientado.

1. Un *subgrafo* de  $X$  es un grafo  $X' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$  no orientado, tal que:
  - $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ ,
  - Para todo  $V_1, V_2 \in \mathcal{V}'$ ,  $E'(V_1, V_2) \subset E(V_1, V_2)$ .
2.  $X$  se dice *conexo* si, para cada par de vértices  $V_1, V_2$  existe un subgrafo de  $V$  que es un camino con extremos en  $V_1$  y  $V_2$ .
3. Un *árbol* es un grafo no orientado conexo que no contiene ciclos.

El nombre de árbol viene dado por el hecho de que estos grafos guardan una cierta similitud con los árboles, como se puede apreciar en la siguiente figura.



**2.1.2 Nota.** Una propiedad de los árboles, de la que haremos uso con frecuencia, es que, dados dos vértices  $V_1$  y  $V_2$ , existe un único camino que los une. En efecto, la existencia se debe a que un árbol es, por definición, conexo. La unicidad se debe a que, si existieran dos caminos distintos conectando  $V_1$  y  $V_2$ , podríamos combinarlos para obtener un ciclo. Pero los árboles no contienen ciclos.

Para finalizar la sección, introducimos una serie de nociones que serán útiles más adelante cuando estudiemos árboles con un número infinito de vértices:

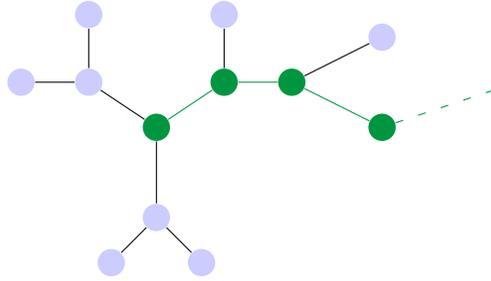
**2.1.3 Definición.** Sea  $T$  un árbol.

1. Un *semicamino* de  $T$  es un subgrafo de la forma

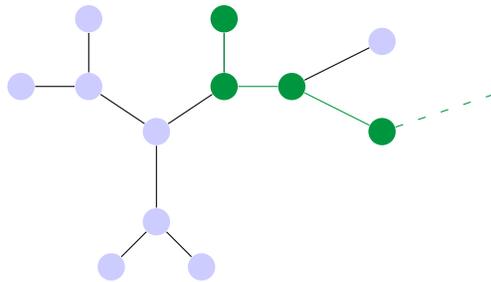


2. Dos semi-caminos son *equivalentes* si difieren en un número finito de vértices.
3. Una *punta* de  $T$  es una clase de equivalencia de semi-caminos.
4. La *frontera* de  $T$ , denotada por  $\partial T$ , es el conjunto de las puntas de  $T$ .

Para visualizar un elemento de la frontera de un árbol  $T$ , podemos tomar un representante como en la figura ...



... teniendo en cuenta que podemos cambiar un número finito de vértices y obtenemos la misma clase, como por ejemplo:



## 2.2 El árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

Sea  $K$  un cuerpo local (es decir, un cuerpo dotado de una valoración discreta  $v$ , respecto de la cual es completo, y tal que el cuerpo residual asociado a  $v$  es finito). Consideremos un subgrupo  $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ . Nuestro objetivo en esta sección y la siguiente es asociar un árbol  $T_\Gamma$  a  $\Gamma$ , y dotarlo de una acción  $\Gamma \curvearrowright T_\Gamma$ . La idea fundamental será considerar el conjunto de todos los retículos 2-dimensionales sobre  $K$ , y utilizar la acción de  $\Gamma$  sobre este conjunto.

Para las primeras definiciones, nos situaremos en el contexto general siguiente:

**2.2.1** Sea  $A$  un anillo local, dominio de integridad, Noetheriano, íntegramente cerrado y completo,  $\mathfrak{m}_A$  el ideal maximal de  $A$ ,  $k_A$  el cuerpo residual  $A/\mathfrak{m}_A$  y  $K_A$  el cuerpo de fracciones de  $A$ .

**2.2.1 Definición.** Sea  $A$  como en 2.2.1. Un  $A$ -retículo es un sub- $A$ -módulo  $M \subset K_A \times K_A$  libre de rango 2. Denotamos por  $\Delta$  al conjunto de todos los  $A$ -retículos.

Sea  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  la base canónica de  $K_A \times K_A$ . Tenemos una acción natural de  $\mathrm{GL}_2(K_A)$  sobre  $K_A \times K_A$  definida como sigue: para cada  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  y para cada  $\mathbf{u} = u^{(1)}\mathbf{e}_1 + u^{(2)}\mathbf{e}_2$ ,

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au^{(1)} + bu^{(2)} \\ cu^{(1)} + du^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= (au^{(1)} + bu^{(2)})\mathbf{e}_1 + (cu^{(1)} + du^{(2)})\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Esta acción da lugar a una acción de  $\mathrm{GL}_2(K_A)$  sobre  $\Delta$ ; para cada  $\gamma \in \mathrm{GL}_2(K_A)$  y cada  $M \in \Delta$ , definimos

$$\gamma \cdot M = \{\gamma \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in M\}.$$

Para definir una acción del grupo  $\mathrm{PGL}_2(K_A)$ , recordemos que

$$\mathrm{PGL}_2(K_A) = \mathrm{GL}_2(K_A) / \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K_A^\times \right\}.$$

Definimos pues una relación de equivalencia sobre el conjunto  $\Delta$  de los  $A$ -retículos del modo siguiente:

$$M_1 \sim M_2 \leftrightarrow \exists \lambda \in K_A^\times : M_1 = \lambda M_2.$$

y consideramos el espacio cociente

$$\Delta^{(0)} := \Delta / \sim.$$

Denotaremos por  $[M]$  la clase de un  $A$ -retículo  $M$ . De esta forma, la acción de  $\mathrm{GL}_2(K_A)$  sobre  $\Delta$  induce una acción de  $\mathrm{PGL}_2(K_A)$  sobre  $\Delta^{(0)}$ .

La idea fundamental es tomar el conjunto  $\Delta^{(0)}$  como el conjunto de *vértices* del árbol asociado a  $\mathrm{PGL}_2(K_A)$ ; ya tenemos la acción de este grupo sobre el conjunto de vértices (esta idea, como veremos luego, funciona sólo si la dimensión de Krull de  $A$  es 1). El siguiente

concepto que necesitamos es una noción de *distancia* entre vértices (i.e. entre dos clases de retículos). En el resto de esta sección y en la siguiente, nos centramos en el caso en que la dimensión de  $A$  es 1; más adelante veremos de qué forma puede generalizarse el desarrollo a dimensión superior.

Supongamos pues, de ahora en adelante, que  $A = \mathcal{O}$  es un anillo de valoración discreta completo y  $K = K_A$  es un cuerpo local. Sean  $M, N \subset K \times K$  dos  $\mathcal{O}$ -retículos. Cómo podemos comparar  $M$  y  $N$ ? Una primera idea sería considerar la relación de inclusión. Sin embargo, esto no da lugar a un orden total: podría ocurrir que  $M \not\subset N$  y  $N \not\subset M$ . La siguiente proposición nos ayudará a dar una respuesta más acertada a esta pregunta.

**2.2.2 Proposición.** *Sean  $M, N$  dos  $\mathcal{O}$ -retículos. Existe una base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $M$  y existen enteros  $a, b$  tales que*

$$N = \langle \pi^a \mathbf{u}_1, \pi^b \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{O}}$$

*Los enteros  $a$  y  $b$  no dependen de la base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $M$  escogida.*

DEMOSTRACIÓN: Puesto que  $M$  y  $N$  son finitamente generados, existe un entero  $c \in \mathbb{Z}$  tal que  $\pi^c N \subset M$ . El teorema de estructura de los módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales nos proporciona una base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $M$  y enteros  $a_0, b_0 \in \mathbb{N}_{\geq 0}$  tales que  $\pi^c N = \langle \pi^{a_0} \mathbf{u}_1, \pi^{b_0} \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{O}}$ . Los enteros  $a := a_0 - c$  y  $b := b_0 - c$  y la base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $M$  satisfacen las condiciones requeridas.  $\square$

**2.2.3 Nota.** Sean  $M = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{O}}$  y  $N = \langle \pi^a \mathbf{u}_1, \pi^b \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{O}}$  dos  $\mathcal{O}$ -retículos. Supongamos que  $b \geq a$ . Tenemos entonces que  $N$  es equivalente a  $\pi^{-a} N = \langle \mathbf{u}_1, \pi^{b-a} \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{O}} \subset M$ . Podemos considerar el cociente de estos dos retículos, y obtenemos

$$M/\pi^{-a} N \simeq \mathcal{O}/\pi^{b-a} \mathcal{O}.$$

**2.2.2 Definición.** Definimos la aplicación *distancia*

$$d : \Delta^{(0)} \times \Delta^{(0)} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

que, a cada par de clases de equivalencia  $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$ , le asocia la cantidad  $|a - b|$ , donde  $a, b \in \mathbb{Z}$  satisfacen que existe una  $\mathcal{O}$ -base de  $M$ ,  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  tal que  $\{\pi^a \mathbf{u}_1, \pi^b \mathbf{u}_2\}$  es una  $\mathcal{O}$ -base de  $N$ .

El siguiente lema se demuestra de manera elemental:

**2.2.4 Lema.** *La aplicación  $d : \Delta^{(0)} \times \Delta^{(0)} \rightarrow \mathbb{N}_{\geq 0}$  está bien definida y es una distancia sobre  $\Delta^{(0)}$ .*

Dadas dos clases  $[M], [N]$ , suele resultar útil considerar representantes satisfaciendo una cierta compatibilidad (como en la Nota 2.2.3, por ejemplo).

**2.2.3 Definición.** Diremos que los representantes  $M$  y  $N$  de dos clases  $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$  están en *posición estándar* si se verifica que

$$M \supset N \supset \pi^{d([M],[N])}M.$$

Tenemos ya todos los elementos para definir el grafo asociado a  $\mathrm{PGL}_2(K)$ .

**2.2.4 Definición.** Sea  $K$  un cuerpo local. Definimos el *grafo asociado* a  $\mathrm{PGL}_2(K)$  del siguiente modo:

- Vértices: Elementos de  $\Delta^{(0)}$ .
- Aristas: Para cada par de vértices  $[M], [N]$ , definimos

$$E([M], [N]) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } d([M], [N]) = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

**2.2.5 Proposición.** *El grafo  $T$  asociado a  $\mathrm{PGL}_2(K)$  es un árbol.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que  $T$  es conexo. Sean  $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$ ; tenemos que mostrar la existencia de un camino con extremos en  $[M]$  y  $[N]$ . Sean  $M, N$  dos representantes en posición estándar. En particular,  $N \subset M$ . Consideremos la descomposición de Jordan-Hölder del  $\mathcal{O}$ -módulo  $M/N$ :

$$N = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_0 = M,$$

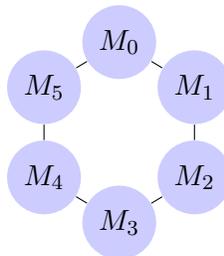
donde para cada  $i = 1, \dots, n$  se satisface que  $M_{i+1}/M_i \simeq \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ .

Consideremos el subgrafo cuyos vértices son las clases de los  $\mathcal{O}$ -retículos  $[M_i]$ ,  $i = 0, \dots, n$  y cuyas aristas unen las clases  $[M_i]$  y  $[M_j]$  si y sólo si  $i$  y  $j$  son índices consecutivos.



Es fácil ver que constituye un camino con extremos en  $[N]$  y  $[M]$ .

Veamos ahora que  $T$  no tiene ciclos. Supongamos que existe un subgrafo de  $T$  que es un ciclo, digamos con vértices  $[M_0], \dots, [M_n]$  ( $n \geq 2$ ), y aristas conectando  $[M_0]$  con  $[M_1]$ ,  $[M_1]$  con  $[M_2]$ ,  $\dots$ ,  $[M_{n-1}]$  con  $[M_n]$  y  $[M_n]$  con  $[M_0]$



Tenemos entonces que  $d([M_n], [M_0]) = 1$  (ya que están unidos por una arista). Por otra parte, como  $d([M_{i+1}], [M_i]) = 1$  para todo  $i = 0, \dots, n - 1$ , tenemos que escogiendo representantes adecuados  $M_i$  de cada clase  $[M_i]$ , la cadena

$$M_n \subset M_{n-1} \subset \dots \subset M_1 \subset M_0$$

es una descomposición de Jordan-Hölder, y por tanto

$$M/M_0 \simeq \mathcal{O}/\pi^n \mathcal{O},$$

de donde se deduce que  $d([M_n], [M_0]) = n \geq 2$ , lo cual nos proporciona una contradicción.

□

### 2.3 El árbol asociado a un subgrupo de Schottky de $\mathrm{PGL}_2(K)$

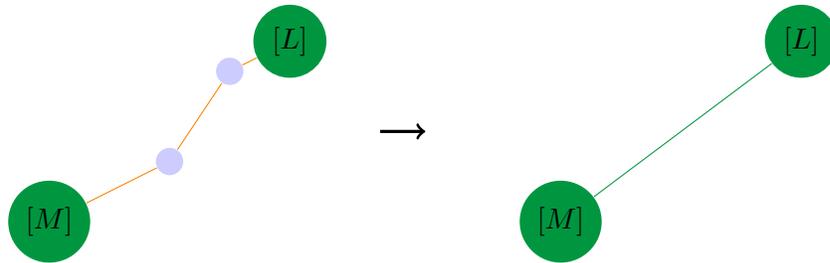
Una vez que hemos definido el árbol  $T$  asociado a  $\mathrm{PGL}_2(K)$ , podemos preguntarnos si, dado un subgrupo  $\Gamma$  de  $\mathrm{PGL}_2(K)$ , podemos definir un árbol  $T_\Gamma$  que verifique las siguientes condiciones:

- El conjunto de vértices de  $T_\Gamma$  es un subconjunto de  $\Delta^{(0)}$ .
- $T_\Gamma$  está dotado de una acción de  $\Gamma$  inducida por la acción de  $\mathrm{PGL}_2(K)$  sobre  $\Delta^{(0)}$ .
- $T_\Gamma$  es “pequeño” en relación con  $\Gamma$ : más precisamente, el cociente del nuevo árbol por la acción de  $\Gamma$  es un grafo *finito*.

Naturalmente, si nos olvidamos de la última condición, el propio árbol  $T$  nos valdría, sea cual sea el subgrupo  $\Gamma$ .

En primer lugar nos centraremos en la siguiente pregunta: ¿Qué subconjunto  $\Delta_*^{(0)}$  de  $\Delta^{(0)}$  resultará adecuado para formar el conjunto de vértices del árbol?

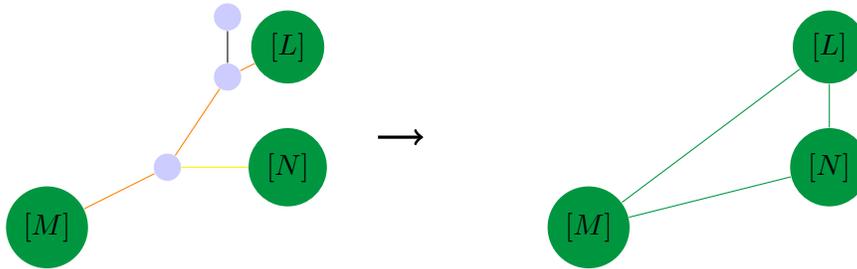
Para contestar a esta pregunta, necesitamos información extra; concretamente, necesitamos saber cómo se definirán las aristas del nuevo árbol. Dados dos vértices  $[M]$  y  $[N]$  en  $\Delta_*^{(0)}$ , acordaremos colocar una arista entre  $[M]$  y  $[N]$  si el camino que los une en el árbol  $T$  no contiene ningún otro vértice de  $\Delta_*^{(0)}$ .



La siguiente definición recoge esta noción de manera más formal:

**2.3.1 Definición.** Sea  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$  un subconjunto. Diremos que dos vértices  $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$  son *adyacentes* si, para todo vértice  $[L] \in \Delta_*^{(0)}$ ,  $d([M], [N]) > d([M], [L]) + d([L], [N])$ .

Ahora bien, dado cualquier subconjunto  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ , ¿conduce este procedimiento siempre a un árbol? Consideremos la siguiente situación. Supongamos que tenemos tres vértices  $[M], [N], [L]$  en el árbol  $T$  como se indica en la figura:



Hemos señalado en naranja el camino que conecta  $[M]$  y  $[L]$ , y en amarillo el camino que conecta  $[M]$  y  $[N]$ . Vemos que los dos caminos se cortan en un vértice del árbol  $T$ . En este caso, el procedimiento indicado arriba para definir las aristas da lugar a un ciclo, luego el grafo resultante no es un árbol.

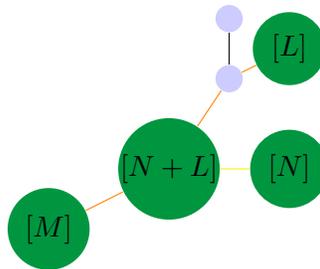
La siguiente noción evita precisamente este tipo de situaciones.

**2.3.2 Definición.** Diremos que un subconjunto  $\Delta_*^{(0)}$  de  $\Delta^{(0)}$  está *ligado* si se verifica la siguiente condición: para todo  $[M], [N], [L] \in \Delta_*^{(0)}$  y representantes  $M, N$  y  $L$  tales que se satisfacen

$$\begin{cases} M \supset N \supset \pi^{d([M],[N])} M \\ M \supset L \supset \pi^{d([M],[L])} M \end{cases}$$

se tiene que la clase del  $\mathcal{O}$ -retículo  $N + L$  pertenece a  $\Delta_*^{(0)}$ .

En el ejemplo anterior, el vértice en el que se cortan los caminos que conectan a  $[M]$  y  $[N]$  y a  $[M]$  y  $[L]$  se corresponde con la clase de  $[N + L]$  (donde los representantes  $M, N$  y  $L$  se eligen como en la Definición 2.3.2).



La importancia de la noción de *conjunto ligado* reside en que cualquier subconjunto ligado de  $\Delta^{(0)}$  define de forma natural un árbol.

**2.3.1 Teorema.** Sea  $\Delta_*^{(0)}$  un subconjunto ligado de  $\Delta^{(0)}$ . Existe un árbol  $T_*$  cuyos vértices son los elementos de  $\Delta_*^{(0)}$ , y cuyo conjunto de aristas está definido de la forma siguiente: dos vértices  $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$  están unidos por una arista si y sólo si son adyacentes.

DEMOSTRACIÓN: Este teorema es un caso particular del Teorema 1.13 de [10], cuando  $K$  es un cuerpo local.  $\square$

Las dos últimas condiciones que queremos pedir al árbol  $T_\Gamma$  tratan sobre la acción de  $\Gamma$  sobre  $\Delta_*^{(0)}$ . Vamos a estudiar esta acción más detenidamente.

Recordemos que la acción de  $\text{PGL}_2(K)$  sobre la clase de un  $\mathcal{O}$ -retículo  $M$  viene inducida por la acción de  $\text{GL}_2(K)$  sobre  $K \times K$ . Denotemos por  $\text{proj} : K \times K \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$  la proyección natural. Tenemos entonces que  $\text{PGL}_2(K)$  actúa sobre  $\mathbb{P}^1(K)$ ; concretamente, dado un elemento  $\mathbf{x} \in \mathbb{P}^1(K)$  con coordenadas homogéneas  $\mathbf{x} = (x_1 : x_2)$  y dado  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PGL}_2(K)$ , definimos  $\gamma \cdot \mathbf{x} = (ax_1 + bx_2 : cx_1 + dx_2)$ .

$$\gamma \cdot \mathbf{x} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

Sea  $M = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{O}}$  un  $\mathcal{O}$ -retículo. Notemos que la clase  $[M] \in \Delta^{(0)}$  no está determinada por los elementos  $\text{proj}(\mathbf{u}_1), \text{proj}(\mathbf{u}_2)$ . Por ejemplo, no es cierto que exista  $\lambda \in K^\times$  tal que se tenga la igualdad  $\langle \mathbf{e}_1, \pi \mathbf{e}_2 \rangle_{\mathcal{O}} = \lambda \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle_{\mathcal{O}}$ . Necesitamos un tercer elemento de  $M$

para poder determinar  $[M]$  a partir de las proyecciones. Tomemos  $\mathbf{u}_3 = b_1 u_1 + b_2 u_2$  con  $b_1, b_2 \in \mathcal{O}^\times$ . Entonces  $[M]$  está unívocamente determinada por el conjunto  $\{\mathrm{proj}(\mathbf{u}_1), \mathrm{proj}(\mathbf{u}_2), \mathrm{proj}(\mathbf{u}_3)\}$ . Podemos precisar este hecho de la forma siguiente.

**2.3.2 Lema.** *Sea  $M = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle_{\mathcal{O}}$  un  $\mathcal{O}$ -retículo, y sea  $\mathbf{u}_3 = b_1 u_1 + b_2 u_2$  con  $b_1, b_2 \in \mathcal{O}^\times$ . Escojamos preimágenes  $\tilde{\mathbf{u}}_i \in \mathrm{proj}^{-1}(\mathrm{proj}(\mathbf{u}_i))$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Sean  $\alpha_1, \alpha_2 \in K$  tales que*

$$\tilde{\mathbf{u}}_3 = \alpha_1 \tilde{\mathbf{u}}_1 + \alpha_2 \tilde{\mathbf{u}}_2$$

*Entonces existe  $\lambda \in K^\times$  tal que*

$$\langle \alpha_1 \tilde{\mathbf{u}}_1, \alpha_2 \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{u}}_3 \rangle_{\mathcal{O}} = \lambda M.$$

De hecho, se verifica un cierto enunciado recíproco: dados tres elementos de  $\mathbb{P}^1(K)$ , queda determinada una clase de retículos, tal como se indica en la siguiente definición.

**2.3.3 Definición.** Sean  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K)$  tres puntos, y escojamos  $\mathbf{u}_i \in \mathrm{proj}^{-1}(P_i)$ . Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K$  tales que

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 = 0.$$

Se define la *clase de retículos asociada a  $P_1, P_2, P_3$*  como

$$[M(P_1, P_2, P_3)] := [\{a_1 \alpha_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \alpha_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \alpha_3 \mathbf{u}_3 : a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{O}\}].$$

La clase de retículos asociada a  $P_1, P_2, P_3$  no depende de las preimágenes  $\mathbf{u}_i$  de  $P_i$  escogidas ni de los escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  escogidos.

Esta definición nos permite construir subconjuntos  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$  estables por la acción de  $\Gamma$ . Concretamente, si  $X \subset \mathbb{P}^1(K)$  es un subconjunto estable por la acción de  $\Gamma$ , entonces el subconjunto  $\Delta_X^{(0)} := \{[M(P_1, P_2, P_3)] : P_1, P_2, P_3 \in X\}$  es también estable por la acción de  $\Gamma$ . Siguiendo esta estrategia, podemos formular la siguiente definición.

**2.3.4 Definición.** Sea  $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$  un subgrupo. Definimos los subconjuntos asociados a  $\Gamma$ :

$$\begin{cases} \Sigma_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K) : \text{existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma \cdot P = P\}. \\ \Delta_\Gamma^{(0)} := \{[M(P_1, P_2, P_3)] : P_1, P_2, P_3 \in \Sigma_\Gamma\}. \end{cases}$$

El conjunto  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  es nuestro candidato para formar el conjunto de vértices del árbol asociado a  $\Gamma$ . La segunda condición que queremos pedirle al árbol asociado a  $\Gamma$ , es decir, la existencia de una acción de  $\Gamma$  sobre el árbol, se cumpliría por definición de  $\Delta_\Gamma^{(0)}$ . Recordemos que necesitamos que  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  sea un conjunto ligado. Para asegurar que se satisface esta condición, tendremos que restringirnos a una familia particular de subgrupos de  $\mathrm{PGL}_2(\Gamma)$ : los grupos de Schottky.

**2.3.5 Definición.** Diremos que un elemento  $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(K)$  es *hiperbólico* si pertenece a la clase de conjugación (en  $\mathrm{PGL}_2(\overline{K})$ ) de un elemento de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

tal que el valor absoluto de  $\lambda_1$  es distinto del valor absoluto de  $\lambda_2$ .

Equivalentemente,  $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(K)$  es hiperbólico si

$$\left| \frac{(\mathrm{traza}(\gamma))^2}{\det(\gamma)} \right| > 1.$$

**2.3.6 Definición.** Sea  $K$  un cuerpo local. Diremos que un subgrupo  $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$  es un *grupo de Schottky* si se satisfacen las condiciones siguientes:

1.  $\Gamma$  es finitamente generado.
2. Todo  $\gamma \in \Gamma$  distinto de la identidad es hiperbólico.

**2.3.3 Proposición.** *Sea  $\Gamma$  un grupo de Schottky. Entonces  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  está ligado.*

DEMOSTRACIÓN: Es un caso particular del Teorema 1.12 de [10] cuando  $K$  es un cuerpo local.  $\square$

Finalmente podemos enunciar el resultado principal sobre la existencia del árbol asociado a un subgrupo de Schottky de  $\mathrm{PGL}_2(K)$ .

**2.3.4 Teorema.** *Sea  $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$  un subgrupo de Schottky. Existe un árbol  $T_\Gamma$ , cuyo conjunto de vértices es  $\Delta_\Gamma^{(0)}$ , dotado de una acción de  $\Gamma$ , tal que  $T_\Gamma/\Gamma$  es un grafo finito.*

DEMOSTRACIÓN: La existencia de un árbol  $T_\Gamma$  cuyos vértices son los elementos de  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  y dotado de una acción de  $\Gamma$  se sigue del hecho de que  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  está ligado. Para probar que  $T_\Gamma/\Gamma$  es finito, se escoge un conjunto finito de generadores de  $\Gamma$  (podemos hacerlo porque  $\Gamma$  es finitamente generado por definición), digamos  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ , y un punto  $P \in \Delta_\Gamma^{(0)}$ . Consideremos los caminos  $C_1, \dots, C_r$  que unen a  $P$  con cada  $P_i := \gamma_i P$ . Definimos ahora subgrafo (finito)  $S$  de  $T_\Gamma$ :

$$\begin{cases} \text{Conjunto de vértices} := \bigcup_{i=1}^r \{P : P \text{ es un vértice de } C_i\} \\ \text{Conjunto de aristas} := \bigcup_{i=1}^r \{A : A \text{ es una arista de } C_i\}. \end{cases}$$

Se puede demostrar (véase la prueba del Teorema 1.23 de [10], en el caso particular en el que  $K$  es un cuerpo local) que la proyección de  $S$  mediante la aplicación  $T_\Gamma \rightarrow T_\Gamma/\Gamma$  es todo el grafo  $T_\Gamma/\Gamma$   $\square$

**2.3.5 Nota.** La acción de un grupo de Schottky  $\Gamma$  sobre  $T_\Gamma$  es *libre* (véase el Corolario 1.16 de [10]); de aquí se sigue que  $\Gamma$  es un grupo libre. Esta condición se incluye a veces en la definición de grupo de Schottky.

## 2.4 El árbol asociado a un subgrupo de Schottky de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$

En esta sección volvemos a la situación general considerada por Mumford en [10] (cf. (2.2.1) en la sección 2.2); es decir,  $A$  es un anillo local, dominio de integridad, Noetheriano, íntegramente cerrado y completo, pero con dimensión arbitraria (y no igual a 1 como en la sección anterior). Nuestro objetivo ahora es reproducir el trabajo realizado en la sección anterior, pero en este contexto más general, con el fin de demostrar un teorema análogo al Teorema 2.3.4 en esta situación.

Sea  $\Delta^{(0)} := \Delta / \sim$  el conjunto de  $A$ -retículos libres de rango 2, módulo la relación de equivalencia definida al principio de la sección 2.3. Recordemos que lo primero que hicimos para empezar a trabajar fue definir una noción de distancia entre dos clases de retículos; fue en este punto cuando, completamente a propósito, comenzamos a trabajar con la hipótesis  $\dim(A) = 1$ . La razón es la siguiente: supongamos que la dimensión de  $A$  es arbitraria, y tomemos dos clases

de retículos  $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$ . Tratemos ahora de escoger dos representantes en “posición estándar”: ¿existe  $\alpha \in \mathfrak{m}_A$ ,  $M \in [M]$ ,  $N \in [N]$  tales que

$$M \supset N \supset \alpha \cdot M?$$

La “profundidad” a la que  $\alpha$  esté situado en el ideal maximal  $\mathfrak{m}_A$  podría darnos una noción de distancia. Sin embargo, en general, la respuesta es no. Esto complica considerablemente la teoría cuando la dimensión de  $A$  no es 1. Lo primero que tenemos que hacer es definir una noción de compatibilidad, que nos permita comparar retículos cuando son compatibles.

**2.4.1 Definición.** 1. Sean  $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$ . Diremos que son *compatibles* si dados representantes  $M$  y  $N$ , existe una  $A$ -base  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  de  $M$ ,  $\lambda \in K_A^\times$  y  $\alpha \in A$  tales que  $\{\lambda\mathbf{u}_1, \lambda\alpha\mathbf{u}_2\}$  es una  $A$ -base de  $N$ . En este caso, definimos la *distancia* entre  $[M]$  y  $[N]$  como

$$\rho([M], [N]) := (\alpha) \in \{\text{ideales de } A\}.$$

2. Diremos que un subconjunto  $\Delta_*^{(0)}$  de  $\Delta^{(0)}$  es *compatible* si, para todo  $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$ ,  $[M]$  y  $[N]$  son compatibles.
3. Sean  $[M], [N]$  compatibles. Diremos que dos representantes  $M$  y  $N$  están en *posición estándar* si existe  $\alpha \in A$  tal que  $M \supset N \supset \alpha \cdot M$ .

Naturalmente, para hacer el punto 3 de esta definición completamente satisfactorio, hay que notar que, dadas dos clases  $[M], [N]$  compatibles, siempre existen representantes  $M, N$  en posición estándar. Esto se sigue de la definición de clases compatibles.

**2.4.1 Nota.** Observemos que la distancia  $\rho$  toma valores en el conjunto de los ideales de  $A$ ; por tanto, no se puede hablar de una “distancia” en el sentido habitual de la palabra. En el caso en que la dimensión de  $A$  es 1, la existencia de un elemento uniformizante  $\pi$  nos permitió pasar de la distancia multiplicativa  $\rho$  a la distancia aditiva  $d$ , que es literalmente una distancia.

Cuando  $\dim(A) = 1$ , cualquier pareja de clases de retículos es compatible; por tanto no había lugar para la noción de compatibilidad en ese contexto. Sin embargo, cuando queramos definir árboles con vértices en  $\Delta^{(0)}$  para dimensión de  $A$  mayor que 1, tendremos que restringirnos a un subconjunto compatible. Una vez hecha esta observación, el desarrollo de la Sección 2.3 puede generalizarse de forma casi directa.

**2.4.2 Definición.** Sea  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$  un subconjunto compatible.

1. Diremos que dos vértices  $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$  son *adyacentes* si para todo vértice  $[L] \in \Delta_*^{(0)}$ , la igualdad entre ideales  $\rho([M], [N]) = \rho([M], [L]) \cdot \rho([L], [N])$  implica que  $[L] = [M]$  o  $[L] = [N]$ .
2. Diremos que  $\Delta_*^{(0)}$  está *ligado* si se verifica la siguiente condición: para todo  $[M], [N], [L] \in \Delta_*^{(0)}$  y representantes  $M, N$  y  $L$  tales que

$$\begin{cases} M \supset N \supset \alpha M \\ M \supset L \supset \beta M \end{cases}$$

para algunos elementos  $\alpha, \beta \in A$ , se tiene que la clase del  $A$ -retículo  $N + L$  pertenece a  $\Delta_*^{(0)}$ .

Para que esta definición tenga sentido, es necesario probar antes un pequeño lema; concretamente, que la suma  $N + L$  es un  $A$ -retículo libre, lo cual no es automático si la dimensión de  $A$  es mayor que 1 (véase la Proposición 1.9 de [10]).

Enunciamos a continuación el teorema análogo al Teorema 2.3.1 (véase el Teorema 1.13 de [10]).

**2.4.2 Teorema.** *Sea  $\Delta_*^{(0)}$  un subconjunto ligado de  $\Delta^{(0)}$ . Existe un árbol  $T_*$  cuyos vértices son los elementos de  $\Delta_*^{(0)}$ , y cuyo conjunto de aristas está definido de la forma siguiente: dos vértices  $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$  están unidos por una arista si y sólo si son adyacentes.*

A continuación necesitamos definir la clase de retículos asociada a tres puntos de  $\mathbb{P}^1(K_A)$ . La definición es calcada al caso en que la dimensión de  $A$  es 1.

**2.4.3 Definición.** Sean  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K_A)$  tres puntos, y escojamos  $\mathbf{u}_i \in \text{proj}^{-1}(P_i)$ . Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K_A$  tales que

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3 = 0.$$

Se define la *clase de retículos asociada a  $P_1, P_2, P_3$*  como

$$[M(P_1, P_2, P_3)] := [\{a_1 \alpha_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \alpha_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \alpha_3 \mathbf{u}_3 : a_1, a_2, a_3 \in A\}].$$

La clase de retículos asociada a  $P_1, P_2, P_3$  no depende de las preimágenes  $\mathbf{u}_i$  de  $P_i$  escogidas ni de los escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  escogidos.

**2.4.4 Definición.** Sea  $\Gamma \subset \text{PGL}_2(K_A)$  un subgrupo. Definimos los subconjuntos asociados a  $\Gamma$ :

$$\begin{cases} \Sigma_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K_A) : \text{existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma \cdot P = P\}. \\ \Delta_\Gamma^{(0)} := \{[M(P_1, P_2, P_3)] : P_1, P_2, P_3 \in \Sigma_\Gamma\}. \end{cases}$$

¿Es  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  un subconjunto adecuado para formar el conjunto de vértices de un árbol? Lo primero que tenemos que asegurar, antes de entrar en nociones más finas como la ligadura, es que sea un conjunto compatible; si no, no podemos empezar a trabajar con él. Para que  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  sea compatible, tenemos que restringirnos a una clase de subgrupos  $\Gamma$ .

Sean  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^1(K_A)$  puntos distintos, y escojamos  $\mathbf{u}_i \in \text{proj}^{-1}(P_i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Escribamos  $\mathbf{u}_3 = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$ ; reemplazando  $\mathbf{u}_1$  por  $\alpha_1 \mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  por  $\alpha_2 \mathbf{u}_2$ , siempre podemos suponer que  $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ . Escribamos ahora  $\mathbf{u}_4 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2$ ; como  $\lambda_i \in K_A$ , podemos escribir  $\lambda_i$  como un cociente de elementos de  $A$ . Eliminando denominadores, y reemplazando  $\mathbf{u}_4$  por un múltiplo si es necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\mathbf{u}_4 = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2$ , con  $a_1, a_2 \in A$ .

**2.4.5 Definición.** Diremos que un subgrupo  $\Gamma \subset \text{PGL}_2(K_A)$  es *plano* si, para todo  $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \Sigma_\Gamma$  distintos, existen representantes  $\mathbf{u}_i$  de  $P_i$  tales que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_4 = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2, \end{cases}$$

verificando que  $a_1, a_2 \in A$  y al menos para uno de los índices  $i$ ,  $a_i \notin \mathfrak{m}_A$ .

No sé la razón por la cual Mumford denomina planitud a esta noción en [10]. La planitud de  $\Gamma$  nos garantizará la compatibilidad del conjunto  $\Delta_\Gamma^{(0)}$ .

**2.4.3 Proposición.** *Sea  $\Gamma$  un grupo plano. Entonces  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  es compatible.*

DEMOSTRACIÓN: Véase la demostración de la Proposición 1.7 de [10], comprobando que la única propiedad que se utiliza de  $\Gamma$  es la planitud (y no el hecho de que sea de Schottky).  $\square$

Para garantizar que  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  está ligado necesitamos introducir, al igual que en el caso en que la dimensión de  $A$  es 1, la noción de grupo de Schottky (plano).

**2.4.6 Definición.** Sea  $A$  un anillo local, dominio de integridad, Noetheriano, íntegramente cerrado y completo y sea  $K_A$  su cuerpo de fracciones. Diremos que un subgrupo  $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$  es un *grupo de Schottky plano* si se satisfacen las condiciones siguientes:

1.  $\Gamma$  es finitamente generado.
2. Todo  $\gamma \in \Gamma$  distinto de la identidad es hiperbólico.
3.  $\Gamma$  es plano.

**2.4.4 Proposición.** *Sea  $\Gamma$  un grupo de Schottky plano. Entonces  $\Delta_\Gamma^{(0)}$  está ligado.*

DEMOSTRACIÓN: Ver el Teorema 1.12 de [10].  $\square$

De nuevo, cada subconjunto  $\Delta_*^{(0)}$  de  $\Delta^{(0)}$  que esté ligado da lugar a un árbol  $T_*$  (véase el Teorema 1.13 de [10]).

Una vez introducida esta noción, tenemos todos los ingredientes para formular el teorema de existencia del árbol asociado a  $\Gamma$  (Corolario 1.15 y Teorema 1.23 de [10]).

**2.4.5 Teorema.** *Sea  $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$  un subgrupo de Schottky plano. Existe un árbol  $T_\Gamma$ , cuyo conjunto de vértices es  $\Delta_\Gamma^{(0)}$ , dotado de una acción de  $\Gamma$ , tal que  $T_\Gamma/\Gamma$  es un grafo finito.*

Terminamos la sección estudiando la frontera del árbol  $T_\Gamma$  asociado a un grupo de Schottky plano  $\Gamma$  e introduciendo algunas nociones relacionadas.

**2.4.6 Proposición.** *Existe una inyección natural  $i : \partial T_\Gamma \subset \mathbb{P}^1(K_A)$ . El conjunto  $\Sigma_\Gamma$  pertenece a  $i(\partial T_\Gamma)$ .*

La inyección funciona del modo siguiente: Dado un semicamino cuyos vértices son  $[M_1], [M_2], [M_3], \dots$ , podemos tomar representantes de tal forma que

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots$$

La intersección de estos representantes  $M_i$  es un  $A$ -módulo libre de rango 1 en  $K_A \times K_A$ . Tomemos un generador  $\mathbf{u}$  en  $K_A \times K_A$ ; la proyección de este generador sobre  $\mathbb{P}^1(K_A)$  será la imagen por la aplicación  $i$  del elemento de la frontera correspondiente al semicamino dado. Este generador nos proporciona una base muy cómoda para expresar los distintos módulos  $M_i$ ; tomando un elemento  $\mathbf{v}$  de  $M_1$  tal que  $\mathbf{u} - \mathbf{v} \notin \mathfrak{m}_A M$ , se verifica que

$$M_i = \langle u, \alpha_i v \rangle_A,$$

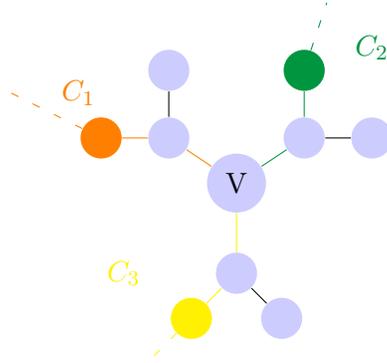
donde  $\alpha_i$  es un generador del ideal  $\rho([M_1], [M_i])$ . Los detalles de la prueba están en la demostración de la Proposición 1.18 de [10].

En el caso en que la dimensión de  $A = \mathcal{O}$  es 1, y el árbol es el árbol  $T$  asociado a todo  $\Delta^{(0)}$ , la inyección  $i : \delta\Delta^{(0)} \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$  es una biyección. En efecto, dado cualquier elemento  $P \in \mathbb{P}^1(K)$ , y  $\mathbf{u} \in K \times K$  tal que  $\mathrm{proj}(\mathbf{u}) = P$ , escojamos cualquier vector  $\mathbf{v} \in K \times K$  que sea linealmente independiente de  $\mathbf{u}$ . Entonces la cadena de  $\mathcal{O}$ -módulos  $M_i := \langle \mathbf{u}, \pi^i \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{O}}$  da lugar a un semicamino cuya imagen por  $i$  es precisamente  $P$ .

Esta biyección nos permite dar una interpretación nueva de la clase de retículos  $[M(P_1, P_2, P_3)]$  definida por tres elementos  $P_1, P_2, P_3$

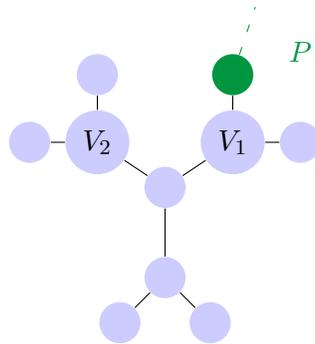
en  $\mathbb{P}^1(K)$ . En efecto,  $[M(P_1, P_2, P_3)]$  es el único vértice  $V$  tal que existen semi-caminos  $C_i$  en la clase de  $i^{-1}(P_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , tales que

$$C_1 \cap C_2 = C_1 \cap C_3 = C_2 \cap C_3 = \{V\}$$



**2.4.7 Definición.** Sea  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$  un subconjunto ligado y  $T_*$  el árbol asociado. Sean  $P \in i(\partial T_*) \subset \mathbb{P}^1(K_A)$ ,  $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$ . Diremos que  $V_1$  *separa* a  $V_2$  de  $P$  si cualquier semi-camino que represente a  $P$  y contenga a  $V_2$  contiene también a  $V_1$

La siguiente figura da una idea visual de la noción anterior:



Esta noción se extiende a puntos  $P$  que no pertenezcan a la imagen de la frontera, del modo siguiente:

**2.4.8 Definición.** Sea  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$  un subconjunto ligado y  $T_*$  el árbol asociado. Sean  $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$ ,  $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$ . Diremos que  $[M]$

separa a  $[N]$  de  $P$  si existen representantes  $M$  y  $N$  y  $\mathbf{u} \in \text{proj}^{-1}(P)$  tales que  $\mathbf{u} \in M$ ,  $\mathbf{u} \notin \mathfrak{m}_A \cdot N$ .

Con esta definición, podemos definir la noción de base de un punto de  $\mathbb{P}^1(K_A)$  sobre un subconjunto ligado.

**2.4.9 Definición.** Sea  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$  un subconjunto ligado y  $T_*$  el árbol asociado. Para cada  $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$ , se define la *base de  $P$  sobre  $\Delta_*^{(0)}$*  como el conjunto de todas las clases  $[M] \in \Delta_*^{(0)}$  tales que no están separadas de  $P$  por ninguna clase  $[N] \in \Delta_*^{(0)}$ .

Esta definición puede resultar extraña, ya que en muchos casos, ¡la base de un punto es el conjunto vacío! En efecto, no es difícil probar la siguiente proposición (cf. Proposición 1.28 de [10]).

**2.4.7 Proposición.** Sea  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$  un subconjunto ligado, y  $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$ . Entonces  $P \in \partial\Delta_*^{(0)}$  si y sólo si la base de  $P$  sobre  $\Delta_*^{(0)}$  es el conjunto vacío.

¿Cómo podemos entonces visualizar la base de un punto  $P \in \mathbb{P}^1(K)$ ? En el siguiente ejemplo vemos el caso en que la dimensión de  $A$  es 1.

**2.4.8 Ejemplo.** Supongamos que  $A = \mathcal{O}$  tiene dimensión 1. En este caso, sabemos que el conjunto  $\Delta^{(0)}$  está ligado, y  $\partial\Delta^{(0)}$  se corresponde con  $\mathbb{P}^1(K)$ . Por tanto, podemos ver cualquier punto de  $\mathbb{P}^1(K)$  como un punto de la frontera de  $\Delta^{(0)}$ . Llamemos  $T$  al árbol asociado al conjunto total  $\Delta^{(0)}$  (recordemos: esto sólo puede hacerse cuando la dimensión de  $A$  es 1).

Sea ahora  $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$  un subconjunto ligado, y sea  $T_*$  el árbol asociado. Tomemos  $P \in \mathbb{P}^1(K)$ . Entonces se tienen tres posibilidades para la base de  $P$  sobre  $\Delta_*^{(0)}$ : o bien es el conjunto vacío, o bien contiene un único punto, o bien contiene dos puntos. La demostración de este hecho está detallada en la Proposición 1.29 de [10]; aquí nos limitamos a dibujar un par de figuras que ilustran los distintos casos.

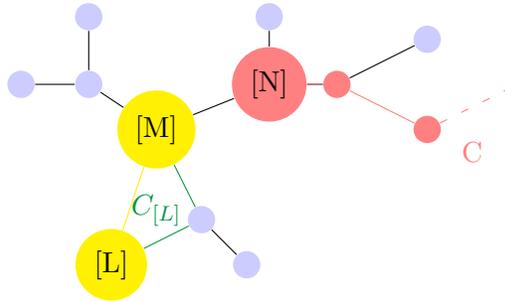
Consideremos la clase de semi-caminos  $\mathcal{C}$  de  $\Delta^{(0)}$  asociada a  $P$  a través de la identificación  $\mathbb{P}^1(K) \simeq \partial\Delta^{(0)}$ . Tomemos un representante

$C \in \mathcal{C}$ . Tenemos dos posibilidades: o bien  $C$  contiene infinitos puntos de  $\Delta_*^{(0)}$ , o bien contiene un número finito (el caso en el que  $C$  no contiene ningún punto de  $\Delta_*^{(0)}$  lo incluimos en este segundo caso). En el primer caso,  $C$  pertenece a  $\partial\Delta_*^{(0)}$ , por tanto la base de  $P$  sobre  $\Delta_*^{(0)}$  es vacía.

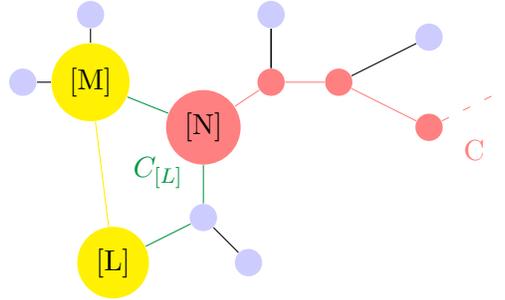
Supongamos que estamos en el segundo caso. Sea  $[M]$  el último elemento de  $\Delta_*^{(0)}$  que aparece en  $C$  (si no hay ninguno, reemplazamos  $C$  por su prolongación hasta unirlo con cualquier vértice de  $\Delta_*^{(0)}$  que escojamos. El hecho de que haya un último vértice se debe a que estamos suponiendo que  $C$  contiene sólo un número finito de vértices de  $\Delta_*^{(0)}$ ). Llamemos  $[N]$  al vértice siguiente a  $[M]$  (que no pertenece a  $\Delta_*^{(0)}$  porque  $[M]$  es el último que aparece). Según la forma en que  $[N]$  esté situado respecto a  $\Delta_*^{(0)}$ , tenemos dos posibilidades.

Sea  $\mathcal{M} \subset \Delta_*^{(0)}$  el conjunto de vértices de  $T_*$  que son adyacentes a  $[M]$ . Para cada  $[L] \in \mathcal{M}$ , sea  $C_{[L]}$  el único camino de  $T$  que une  $[M]$  con  $[L]$ . Tenemos entonces dos posibilidades para  $[N]$ :

El primer caso es que  $[N]$  no pertenezca a ninguno de los  $C_{[L]}$ ,  $[L] \in \mathcal{M}$ . En este caso, la base de  $P$  en  $\Delta_*^{(0)}$  es el punto  $[M]$ . En la figura dibujamos en amarillo los vértices de  $\Delta_*^{(0)}$ , y en rojo el camino  $C$ .



La segunda posibilidad es que  $[N]$  pertenezca a  $C_{[L]}$  para algún  $[L] \in \mathcal{M}$ . En este caso, la base de  $P$  en  $\Delta_*^{(0)}$  es el conjunto formado por el punto  $[M]$  y el punto  $[L]$ . En la figura dibujamos en amarillo los vértices de  $\Delta_*^{(0)}$ , y en rojo el camino  $C$ .



Concluimos el capítulo con una definición.

**2.4.10 Definición.** Sea  $\Gamma$  un grupo de Schottky plano, y consideremos el conjunto

$$\Omega_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K_A) : \text{la base de } P \text{ sobre } \Delta_\Gamma^{(0)} \text{ es un conjunto finito no vacío}\}$$

Diremos que  $\Omega_\Gamma$  es el *conjunto de discontinuidad estricta* de  $\Gamma$ .

# Bibliografía

- [1] Bruhat F., Tits J., Groupes réductifs sur un corps local, Inst. Hautes Études Scientifiques, *Publ. Math.* n<sup>o</sup> 41 (1972).
- [2] Fresnel J., van der Put M., *Géométrie analytique rigide et applications*. Progress in Mathematics, vol. 18. Birkhäuser 1981.
- [3] Gerritzen L. van der Put M., *Schottky groups and Mumford curves*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 817. Springer 1980.
- [4] Hidalgo R., Rodríguez R., *Introducciones a las variedades abelianas y grupos Klenianos*. Monografías Matemáticas UTFSM, 2005.
- [5] Ichikawa T., Schottky uniformization theory on Riemann surfaces Mumford curves of infinite genus, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 486 (1997) 45-68.
- [6] Koebe, P., Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. II. *Math. Ann.* 69 (1910), n<sup>o</sup> 1, 1-81.
- [7] Kurihara A., On some examples of equations defining Shimura curves and the Mumford uniformization. *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo* Sect. 1 A, 25 (1979).
- [8] Manin Yu. I., Three-dimensional hyperbolic geometry as  $\infty$ -adic Arakelov geometry. *Invent. Math.* 104, n<sup>o</sup> 2, (1991).
- [9] Manin, Yu. I., Panchishkin A. A., *Introduction to Modern Number Theory: Fundamental Problems, Ideas and Theories*, Second Edition, Springer 2007.

- [10] Mumford D., An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Compositio Mathematica*, tome 24, n<sup>o</sup> 2 (1970).
- [11] Raynaud, M., Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne (d après Mumford) *Séminaire Bourbaki* 15, Exp. n<sup>o</sup> 427 (1972-1973).
- [12] Serre J. P., *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . (Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass), Astérisque, n<sup>o</sup> 46, Société Mathématique de France, Paris, 1977.
- [13] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G., *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1969