Proceedings of the Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona, **STNB 2011**
Barcelona Number Theory Seminar, 25th ed.

Mesures d'irracionalitat i de transcendència

Alberto Cámara

Un nombre irracional és un nombre que no pertany al conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals. Els nombres algebraics són el conjunt de nombres $\mathbf{A} \subset \mathbb{C}$ que poden ser obtinguts com a zeros de polinomis a coeficients en $\mathbb{Q}$. Els nombres transcendents són els elements de $\mathbb{C} \setminus \mathbf{A}$.

L'estudi dels nombres irracionals i transcendents és de molta importància per a l'aritmètica. L'exemple més senzill que se'n pot donar ja ho mostra bé.

Exemple 0.1. *El nombre $\sqrt{2}$ és irracional si i només si l'equació $a^2 = 2b^2$ no té solucions enteres no trivials.*

1. Nombres irracionals

La tradició situa Pitàgores a l'inici de l'estudi dels nombres irracionals. Sabem que l'escola pitagòrica coneixia ja als voltants del segle VI a.C. la irracionalitat de certs nombres com ara $\sqrt{2}$, lligat al triangle rectangle isòsceles, o $\sqrt{5}$, lligat a la raó àuria, que al seu torn apareix en l'estudi del pentacle.

La irracionalitat d'altres radicals de nombres naturals també va ser establerta ja en l'època clàssica. Hi ha un cèlebre passatge en el diàleg *Teetet* de Plató (circa 368 a.C.), on s'esmenta que Teodor, un dels mestres de Plató, havia establert la irracionalitat de $\sqrt{p}$, per a $p < 19$ primer i existeix una disputa filològica per tal de determinar si l'afirmació de Plató inclou el cas $p = 19$ (vegeu [**HW08**, §4.5] per a una discussió detallada). Pels comentaris posteriors a aquest text, encara durant l'època clàssica, es pot deduir que els matemàtics grecs de l'antiguitat sabien que el nombre $\sqrt[m]{N}$ és irracional llevat dels casos en què N és una potència m-èsima.

La irracionalitat de certs logaritmes és també molt fàcil d'establir. Per exemple, suposar que $\log_2 3$ és racional porta a considerar els nombres naturals a i b no nuls que solucionen l'equació $2^a = 3^b$. És raonable suposar que la irracionalitat de logaritmes com $\log_2 3$ va ser establerta de manera immediatament posterior a la introducció dels logaritmes per part de Napier (1614).

No va ser fins el 1744 que Euler va establir la irracionalitat de e. El 1761, Lambert va establir la irracionalitat de π. L'any 1929 Gelfond va demostrar que e^π és transcendent i, per tant, irracional.

Finalment, tot i que no en parlarem en aquest text, els valors de la funció zeta de Riemann en els nombres enters semblen un bon lloc on cercar nombres irracionals.

La resolució del problema de Basilea, deguda a Euler, estableix que $\zeta(2) = \pi^2/6$ i, per tant, $\zeta(2)$ és irracional. A la vegada, la fórmula

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}, \quad k > 0,$$

també deguda a Euler, permet lligar la irracionalitat de $\zeta(2k)$ a la irracionalitat de les potències de π. Aquesta irracionalitat és, si es vol, conseqüència del teorema d'Hermite-Lindemann (1882), que demostra en particular la transcendència de π. No obstant, existeixen resultats anteriors que estableixen la irracionalitat de les potències de π.

La irracionalitat dels valors de ζ en els enters senars és molt més misteriosa i durant molt de temps va ser purament conjectural. Tot i que avui en sabem poca cosa més, cal remarcar la prova donada per Apéry el 1978 sobre la irracionalitat de $\zeta(3)$, en el transcurs d'una conferència a Luminy durant les *Journées Arithmétiques* d'aquell any.

No sabem demostrar la irracionalitat de cap altre valor de ζ en els enters positius senars i els intents d'adaptar els mètodes d'Apéry a $\zeta(5)$ no han donat fruits. No obstant, el resultat que segueix és remarcable.

TEOREMA 1.1 (Ball, Rivoal, 2001). *La successió $(\zeta(2k+1))_{k>0}$ conté una infinitat de nombres irracionals.*

1.1. Irracionalitat dels nombres e i π. Tot i que les demostracions d'aquesta secció són d'una natura més aviat senzilla, aquestes il·lustren els mecanismes emprats en moltes demostracions de resultats d'irracionalitat i de transcendència. [**HW08**] és una bona referència per a aquesta secció.

En tots dos casos demostrarem resultats lleugerament més forts que la irracionalitat de π i e. Hem triat aquesta manera de fer perquè les demostracions que tractarem introdueixen dos ingredients que es troben presents en moltes de les receptes que farem servir per a demostrar que un nombre donat és transcendent per reducció a l'absurd.

El primer ingredient és la manera com trobem una contradicció després de suposar que el nombre donat és algebraic; el segon ingredient és l'aparició de la funció exponencial i l'explotació del fet que és solució d'una equació diferencial lineal.

Introduïm a continuació un polinomi que ens auxiliarà durant les demostracions. Sigui

$$f(X) = \frac{X^n(1-X)^n}{n!}. \tag{1.1}$$

Tot i que la notació no ho reflecteix, f és un polinomi que depèn de n. Els seus coeficients, llevat de dividir per $n!$, són enters.

LEMA 1.2. *El polinomi $f(X)$ satisfà:*

(1) *Per a $0 < x < 1$, es té que $0 < f(x) < 1/n!$.*
(2) *$f(0) = 0$ i $f^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$.*
(3) *Com que $f(X) = f(1-X)$, l'apartat anterior és cert si substituïm 0 per 1 en avaluar f i les seves derivades.*

DEMOSTRACIÓ. Per al lector. □

TEOREMA 1.3 (Euler, 1744). *Per a tot $y \in \mathbb{Q}^\times$, el nombre e^y és irracional.*

DEMOSTRACIÓ. Podem assumir sense pèrdua de generalitat que y és un enter positiu. Suposem que $e^y = a/b$ amb a i b enters positius. Sigui

$$F(X) = y^{2n} f(X) - y^{2n-1} f'(X) + \cdots - y f^{(2n-1)}(X) + f^{(2n)}(X).$$

Per l'apartat 2 del lema anterior, $F(0)$ i $F(1)$ són enters. Es té que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{yx} F(x)\right) = y^{2n+1} e^{yx} f(x)$$

i, per tant,

$$b \int_0^1 y^{2n+1} e^{yx} f(x) dx = aF(1) - bF(0) \in \mathbb{Z}.$$

Però, per l'apartat 1 del lema anterior, es té que

$$0 < b \int_0^1 y^{2n+1} e^{yx} f(x) dx < \frac{b y^{2n} e^y}{n!} < 1,$$

si n és prou gran. □

La irracionalitat de e admet una demostració encara més elemental [**HW08**, Theorem 47]. En canvi, sembla que és més fàcil demostrar la irracionalitat de π^2 que la de π.

TEOREMA 1.4 (Lambert, 1761). *El nombre π^2 és irracional.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $\pi^2 = a/b$, amb a i b enters positius. Sigui

$$G(X) = b^n \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \pi^{2n-2k} f^{(2k)}(X) \right).$$

Es calcula que

$$\frac{d}{dx}\big(G'(x) \sin \pi x - \pi G(x) \cos \pi x\big) = \pi^2 a^n \sin(\pi x) f(x)$$

i, per tant,

$$\pi \int_0^1 a^n \sin(\pi x) f(x) dx = G(0) + G(1) \in \mathbb{Z}.$$

No obstant, novament per l'apartat 1 del lema anterior,

$$0 < \pi \int_0^1 a^n \sin(\pi x) f(x) dx < \frac{\pi a^n}{n!} < 1,$$

si n és prou gran. □

2. Nombres transcendents

En religió i en filosofia es diu que allò que és previ a o està més enllà de l'experiència és transcendent. La raó per la qual els nombres transcendents es diuen així és perquè són nombres que viuen més enllà d'allò que podem construir a partir de nombres racionals i d'operacions algebraiques.

Hi ha tres problemes tipus al voltant dels nombres transcendents que, ordenats per ordre creixent de dificultat, són:

(1) **Existència de nombres transcendents**. Després de la rigorització de la teoria de conjunts per Cantor (1874), sabem que $\mathbf{A}$ és numerable. En canvi, $\mathbb{C}$ és no numerable.
(2) **Demostrar que un nombre construït ad hoc és transcendent**. Liouville (1844) va ser el primer a construir un nombre transcendent: $\sum_{n\geq 1} 10^{-n!}$.
(3) **Demostrar que un nombre donat és transcendent**.

Parlarem sobre els primers dos problemes en aquest capítol. El tercer problema és, en comparació, molt més difícil.

El resultat que segueix estableix que els nombres algebraics no poden ser aproximats per nombres racionals amb precisió arbitrària en funció del seu grau. Com veurem, és una eina efectiva per a mostrar que certs nombres són transcendents.

Teorema 2.1 (Liouville, 1844). *Sigui $\alpha \in \mathbb{C}$ un nombre algebraic de grau $n > 1$. Aleshores, existeix una constant $c > 0$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}, \qquad \textit{per a tot } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad q > 0.$$

Demostració. Sens pèrdua de generalitat, podem suposar que $\alpha \in \mathbb{R}$. En cas contrari, podem prendre $c = |\mathrm{Im}\alpha|$. Sigui $f = \mathrm{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$, que és de grau n. Pel teorema del valor mitjà, existeix un nombre real ξ entre α i p/q tal que

$$-f\left(\frac{p}{q}\right) = f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\xi)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right).$$

Com que f és irreductible, podem deduir que $f'(\xi) \neq 0$.

Suposem que $|\alpha - p/q| > 1$. Aleshores,

$$\frac{1}{q^n} \leq 1 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

i $c = 1$ ja serveix en aquest cas.

En cas que sigui $|\alpha - p/q| < 1$, aleshores també es tindrà que $|\alpha - \xi| < 1$. D'aquí, podem deduir que

$$|\xi| < 1 + |\alpha|.$$

Per a acabar, podem fer servir l'equació anterior per a fitar la derivada de f de manera uniforme. Definim c per

$$\frac{1}{c} := \max_{[\alpha-1,\alpha+1]} |f(x)| > |f'(\xi)| > 0.$$

Es té que

$$\left|q^n f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1,$$

ja que es tracta d'un nombre enter no nul. Finalment,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > c\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| > \frac{c}{q^n},$$

com volíem veure. □

Definició 2.2. *Sigui $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Una mesura d'irracionalitat de α és una fita*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^\varepsilon}, \quad \textit{per a tot } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0$$

i per a algun nombre real $\varepsilon > 0$, que anomenem exponent d'irracionalitat.

El teorema de Liouville és, quan s'aplica als nombres reals, equivalent al resultat que segueix.

TEOREMA 2.3. *Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$. Si existeix una successió $(p_n/q_n)_n$ de nombres racionals tal que*
$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n},$$
aleshores α és un nombre transcendent.

DEMOSTRACIÓ. Per a demostrar per contrarecíproc, podem prendre els successius truncats de l'expansió de α com a fracció continuada i aplicar el teorema de Liouville en la formulació anterior. Vegeu [**HW08**, Theorem 191] per als detalls. □

DEFINICIÓ 2.4. *Els nombres transcendents que satisfan la hipòtesi del teorema anterior es diuen nombres de Liouville.*

Com veurem, hi ha nombres transcendents que no són de Liouville. No obstant, el resultat de Liouville ja serveix per demostrar que alguns nombres bastant particulars són transcendents.

EXEMPLE 2.5. *Sigui $\xi = \sum_{n\geq 1} 10^{-n!}$. Siguin*
$$p_j = 10^{j!}\sum_{n=1}^{j} 10^{-n!},\ q_j = 10^{j!},\quad \text{per a } j \geq 1.$$
És té que $\operatorname{mcd}(p_j, q_j) = 1$. La desigualtat
$$\left|\xi - \frac{p_j}{q_j}\right| = \sum_{n\geq j+1} 10^{-n!} < 10^{-(j+1)!}\sum_{k\geq 0} 10^{-k} = \frac{10}{9q_j^{j+1}} < \frac{1}{q_j^j},$$
per a $j \geq 1$, implica la transcendència de ξ.

La millora de la fita inferior en el teorema de Liouville i, en general, trobar millores a l'aproximació racional dels nombres algebraics va ser motiu per al desenvolupament d'altres mètodes. Després de les aportacions de Thue, Siegel i Dyson, el millor resultat conegut avui és el de Roth.

TEOREMA 2.6 (Roth, 1955). *Siguin α un nombre real algebraic de grau com mínim igual a 2 i $\varepsilon > 0$. Aleshores existeix una constant $c(\alpha, \varepsilon) > 0$, tal que*
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c(\alpha,\varepsilon)}{q^{2+\varepsilon}},\quad \text{per a tot } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ q > 0.$$

3. Classificació de Mahler

De la mateixa manera que els nombres algebraics irracionals poden ser estudiats a través de les seves aproximacions per nombres racionals, podem estudiar l'aproximació dels nombres transcendents pels nombres algebraics.

Com que un nombre transcendent no pot ser el zero de cap polinomi a coeficients enters, podem demanar-nos fins a quin punt els valors que prenen els polinomis a coeficients enters en aquest nombre s'aproximen a zero. Per tal d'estudiar aquest fenomen, ens caldrà parametritzar els polinomis mitjançant la seva altura, a banda del seu grau.

Definició 3.1. *Sigui* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un polinomi no nul, amb* $a_k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$. *L'altura de* P *és l'enter*

$$\mathrm{ht}(P) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

Observació 3.2. *Siguin* n, h *nombres naturals. El conjunt de polinomis* $Q \in \mathbb{Z}[X]$ *tals que* $\deg Q = n$ *i* $\mathrm{ht}\, Q = h$ *és finit.*

Definició 3.3. *Sigui* ξ *un nombre complex. Siguin* n, h *dos nombres naturals. Dels polinomis de* $\mathbb{Z}[X]$ *de grau* n *i altura* h, *sigui* P *aquell per al qual el valor* $|P(\xi)|$ *és mínim. Definim el nombre real* $\omega(\xi, n, h) > 0$ *per l'equació*

$$|P(\xi)| = h^{-n\omega(\xi,n,h)}.$$

Definim, també:

$$\omega(\xi, n) = \limsup_{h \to \infty} \omega(\xi, n, h),$$
$$\omega(\xi) = \limsup_{n \to \infty} \omega(\xi, n).$$

El nombre $\omega(\xi)$ *s'anomena el tipus de* ξ. *Sigui, a més,* $\nu(\xi)$ *el mínim* $N \geq 0$ *tal que* $\omega(\xi, N) = \infty$, *amb el benentès que* $\nu(\xi) = \infty$ *si* $\omega(\xi, n) < \infty$ *per a tot* $n \geq 0$.

L'estudi de quins possibles valors poden prendre $\omega(\xi)$ i $\nu(\xi)$ per a $\xi \in \mathbb{C}$ és l'objecte de la classificació de Mahler.

Teorema 3.4 (Classificació de Mahler, 1932). *Considerem els conjunts*

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \{\xi \in \mathbb{C};\ \omega(\xi) = 0\}, \\
\mathbf{S} &= \{\xi \in \mathbb{C};\ 0 < \omega(\xi) < \infty\}, \\
\mathbf{U} &= \{\xi \in \mathbb{C};\ \omega(\xi) = \infty,\ \nu(\xi) < \infty\}, \\
\mathbf{T} &= \{\xi \in \mathbb{C};\ \omega(\xi) = \infty,\ \nu(\xi) = \infty\}.
\end{aligned}$$

És té que aquests quatre conjunts són no buits, disjunts dos a dos i la seva reunió és $\mathbb{C}$.

Demostració. Cal demostrar que cap classe és buida; ens n'ocuparem en els paràgrafs present i següent. Si assumim aquest fet, les condicions que defineixen les classes són excloents i tot nombre complex cau en alguna classe. □

Definició 3.5. *Els conjunts definits en l'enunciat del teorema anterior s'anomenen les classes de Mahler.*

L'elecció de la notació **A** per a la primera de les classes de Mahler no és accidental.

Teorema 3.6. **A** *és el conjunt dels nombres algebraics.*

Demostració. Suposem primer que $\alpha \in \mathbb{R}$ és un nombre transcendent. Sigui

$$\mathcal{R}(n, h) = \left\{ Q(\xi);\ 0 \neq Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,\ a_k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq a_k \leq h \right\}.$$

Es té que $\#\mathcal{R}(n, h) = (h + 1)^{n+1} - 1$, i existeix una constant $c = c(n, h) > 0$ tal que per a tot $Q \in \mathcal{R}(n, h)$ se satisfà que $|Q| < ch$.

Dividim l'interval $[-ch, ch]$ en h^{n+1} subintervals disjunts de longitud $2ch^{-n}$. Pel principi del colomar, existeixen dos elements diferents de $\mathcal{R}(n,h)$ que pertanyen al mateix subinterval. Siguin $Q_1(\xi) \neq Q_2(\xi)$ aquests dos elements. El polinomi $P = Q_1 - Q_2$ satisfà que $|P(\xi)| < 2ch^{-n}$. Aquesta fita uniforme permet concloure que $\omega(\xi, n) \geq 1$.

Anàlogament, si $\xi \in \mathbb{C}$ és transcendent, $\omega(\xi, n) \geq 1/2(1 - 1/n)$. Per a arribar a tal conclusió, és suficient subdividir l'interval $[-ch, ch]$ en els eixos real i imaginari.

Recíprocament, si $\xi \in \mathbb{C}$ és algebraic de grau m, per a qualsevol polinomi $P \in \mathcal{R}(n,h)$, $P(\xi)$ és un nombre algebraic de grau com a molt m i altura com a molt ch, per a una certa constant $c = c(n,h) > 0$. Per tant, o bé $P(\xi) = 0$ o $|P(\xi)| > c'h^{-m}$, per a certa constant $c' = c'(n,h) > 0$. A conseqüència d'això, $n\omega(\xi, n, h)$ és uniformement fitat per a tot n, h, i això mostra que $\omega(\xi) = 0$. $\square$

Una de les primeres propietats interessants de la classificació de Mahler és la que segueix.

TEOREMA 3.7. *Dos nombres que són algebraicament dependents pertanyen a la mateixa classe de Mahler.*

DEMOSTRACIÓ. Suposem que $\xi, \eta \in \mathbb{C}$ són algebraicament dependents. Existeix un polinomi $Q \in \mathbb{Z}[X, Y]$ tal que $Q(\xi, \eta) = 0$. Siguin $k = \deg_X Q$ i $l = \deg_Y Q$. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que ξ, η són transcendents i que els zeros $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ del polinomi $Q(X, \eta)$ són també transcendents.

Sigui $P \in \mathbb{Z}[X]$ el polinomi que defineix $\omega(\xi, n, h)$. Sigui

$$J = P(\xi_1) \cdots P(\xi_k).$$

Es té que

$$|J| \leq c_1 h^{-n\omega(n,h)+k-1},$$

on $c_1 > 0$ és una constant que, a l'igual que les constants c_2 i c_3 que apareixen a continuació, només depèn de ξ, η, n i Q.

Com que J és simètric en els ξ_i, es tracta d'un polinomi en les funcions simètriques elementals, de grau total menor o igual que n i amb altura menor o igual a $c_2 h^k$, amb $c_2 > 0$.

Ara bé, les funcions simètriques elementals vénen donades per $\pm q_j/q_0$, on

$$Q(X, \eta) = q_0(\eta) X^k + q_1(\eta) X^{k-1} + \cdots + q_k(\eta).$$

És per aquest motiu que $q_0^n J$ és un polinomi en η de grau menor o igual que ln i altura menor o igual que $h_1 = c_3 h$, amb $c_3 > 0$. Per tant, es té que

$$h_1^{ln\omega(\eta, ln, h')} \geq c_1 h^{n\omega(\xi,n,h)-k+1},$$

d'on es dedueix que

$$kln\omega(\eta, ln) \geq n\omega(\xi, n) - k + 1.$$

Si prenem límits superiors respecte de n, obtenim

$$kl\omega(\eta) \geq \omega(\xi).$$

Podem intercanviar ξ i η per tal d'obtenir una fita anàloga, que ens permet deduir el resultat. $\square$

El resultat següent, que es pot trobar a [**Bak90**, Theorem 8.2], mostra que S és no buit.

TEOREMA 3.8. *El conjunt* $\mathbf{A} \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{T} \subset \mathbb{C}$ *té mesura de Lebesgue igual a zero.*

De la mateixa manera que hem definit una mesura d'irracionalitat com una fita per a un nombre irracional a partir de nombres racionals, amb control de la mida dels denominadors, definim una mesura de transcendència com una fita dels valors de polinomis a coeficients enters, amb control sobre el grau i l'altura dels polinomis.

DEFINICIÓ 3.9. *Sigui* ξ *un nombre complex transcendent. Una mesura de transcendència per a* ξ *és una fita*

$$|P(\xi)| \geq \mathrm{ht}(P)^{-c \deg P},$$

satisfeta per una constant $c > 0$*, i per tot* $P \in \mathbb{Z}[X]$ *no nul.*

Hi ha una línia de recerca en la direcció d'obtenir mesures de transcendència i d'irracionalitat de nombres, i també en la direcció de millorar les fites ja conegudes. [**Wal00**] conté una bona descripció dels resultats que són producte d'aquesta línia.

3.1. Classificació d'alguns nombres. La principal dificultat de la classificació de Mahler és mostrar que les quatre classes d'equivalència són no buides. Aquest problema, de fet, va restar obert durant més de trenta anys.

No és molt complicat mostrar que els nombres de Liouville pertanyen a $\mathbf{U}$ i que, a més, tenen tots $\nu = 1$. És possible mostrar que, per a

$$\xi = \frac{1}{3} + \sum_{k \geq 1} 10^{-k!},$$

se satisfà que $\nu(\xi^{1/n}) = n$ [**Bak90**, §8.6]. Per tant, hi ha nombres en $\mathbf{U}$ per a cada possible valor enter de ν.

Saber que les altres classes són de mesura zero és suficient per a provar que $\mathbf{S} \neq \emptyset$. A més, Popken (1929) havia demostrat, ja abans de la classificació de Mahler, que $\omega(e) = 1$ [**Bak90**, §8.1] i que, per tant, $e \in \mathbf{S}$.

El problema no va ser tancat fins que Schmidt (1968) va demostrar que $\mathbf{T} \neq \emptyset$. La construcció d'Schmidt és feta *ad hoc* [**Bak90**, §8.7].

Cal dir que, fora de certs nombres construïts a mida del problema, determinar la classificació d'un nombre donat és un problema molt difícil. Després del teorema d'Hermite-Lindemann (1822), se sap que si α és un nombre algebraic no nul, aleshores $e^{\alpha} \in \mathbf{S}$.

Una conseqüència dels treballs de Baker (1966) amb formes lineals en logaritmes és que tota combinació $\mathbb{Z}$-lineal de logaritmes de nombres algebraics és a $\mathbf{S} \cup \mathbf{T}$, conjecturalment a $\mathbf{S}$. En particular, destaquem que se sap que $\pi \in \mathbf{S} \cup \mathbf{T}$ i que es conjectura que $\pi \in \mathbf{S}$.

4. Valors d'exponencials. Problemes oberts

El teorema de Lindemann és el primer resultat que estableix la transcendència de certes expressions exponencials. Hilbert va considerar que estendre aquest resultat a expressions exponencials més generals era un problema important.

Conjectura 4.1 (7è problema de Hilbert, 1900). *Siguin* $\alpha, \beta \in \mathbf{A}$*, amb* $\alpha \neq 0, 1$ *i* $\beta \notin \mathbb{Q}$*. Aleshores* $\alpha^\beta \notin \mathbf{A}$*.*

Aquesta conjectura va ser resolta per Gelfond i Schneider de manera independent l'any 1934. Una manera de reformular el problema és el corol·lari que segueix.

Corol.lari 4.2. *Siguin* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{A} \setminus \{0\}$*. Si els dos nombres complexos* $\log \alpha_1$ *i* $\log \alpha_2$ *són linealment independents sobre* $\mathbb{Q}$*, aleshores per a qualssevol* $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ *algebraicament independents, es té que*

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0.$$

En l'enunciat anterior, i en endavant, log és una determinació del logaritme complex.

Gelfond va conjecturar que el resultat anterior és cert si prenem combinacions lineals de logaritmes de longitud indeterminada; aquest resultat va ser demostrat per Baker el 1966. També és deguda a Gelfond una aplicació important d'aquests resultats a la teoria de nombres algebraica: n'hi ha prou amb tenir el resultat amb tres logaritmes per tal de poder donar una demostració del *problema del nombre de classes 1.* Gauss va notar (1802) que els discriminants fonamentals de cossos quadràtics imaginaris

$$d = -3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163$$

satisfan que $h(d) = 1$, i va conjecturar que no n'hi ha cap altre amb aquesta propietat. El teorema de Baker (1966) permet donar resposta satisfactòria a aquesta conjectura de Gauss. Cal dir que Stark va demostrar aquesta conjectura el mateix any amb un mètode independent.

Hi ha conjectures més generals que tenen a veure amb independència algebraica de valors d'exponencials. En destaquem dues.

Conjectura 4.3 (Schanuel, 1960s). *Siguin* $z_1, \ldots, z_n$ *nombres complexos linealment independents sobre* $\mathbb{Q}$*. El grau de transcendència de l'extensió*

$$\mathbb{Q}\left(z_1, \ldots, z_n, e^{z_1}, \ldots, e^{z_1}\right) |\mathbb{Q}$$

és més gran que o igual a n*.*

Cal indicar que la conjectura de Schanuel, en el cas en què prenem $z_1, \ldots, z_n \in A$, implica el teorema de Lindemann-Weierstrass. En el cas en què els nombres e^{z_i} són algebraics per a $1 \leq i \leq n$ implica una millora del teorema de Baker, que a la seva vegada implica el teorema de Gelfond-Schneider i la conjectura dels quatre exponents.

Conjectura 4.4 (dels quatre exponents). *Siguin* (x_1, x_2) *i* (y_1, y_2) *dues parelles de nombres complexos. Suposem que els membres de cada parella són linealment independents sobre* $\mathbb{Q}$*. Aleshores un dels quatre nombres*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_2 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_2 y_2}$$

és transcendent.

Aquesta conjectura pot ésser entesa com a cas extrem del teorema dels sis exponents de Lang (1960s).

Referències

[Bak90] Alan Baker. *Transcendental number theory*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1990.

[BT04] Edward B. Burger and Robert Tubbs. *Making transcendence transparent*. Springer-Verlag, New York, 2004. An intuitive approach to classical transcendental number theory.

[HW08] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman.

[Wal00] Michel Waldschmidt. Un demi-siècle de transcendance. In *Development of mathematics 1950–2000*, pages 1121–1186. Birkhäuser, Basel, 2000.

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

Current address: Institut de Matemàtica, Universitat de Barcelona, Gran Via de les Corts Catalanes 585, 08007 Barcelona

E-mail address: `camara@ub.edu`