Una introducción a la conjetura de Sato-Tate 3.

El grupo de Sato-Tate y la conjetura generalizada de Sato-Tate.

Elisa Lorenzo

Universitat Politècnica de Catalunya

31 Enero 2013

Índice.

1. El grupo de Sato-Tate.
2. La conjetura generalizada de Sato-Tate.
3. Ejemplos.
4. Clasificación teórica de los grupos de Sato-Tate.
5. Resultados para variedades abeliana de $dim \leq 3$.

1. Seting.

- Sea k un cuerpo de números $(\mathbb{Q})$ y sea X un esquema de tipo finito sobre k $(E:\ y^2 = x^3 + x)$: $X \longrightarrow Spec\,(\mathcal{O}_k)$ $(Spec\,(\mathbb{Q}\,(E)) \longrightarrow Spec\,(\mathcal{O}_k))$.
- Sea S un conjunto finito de primos fuera del cual X tiene buena reducción $(S = \{2\})$.

1. Seting.

- Sea k un cuerpo de números $(\mathbb{Q})$ y sea X un esquema de tipo finito sobre k $(E: \ y^2 = x^3 + x)$: $X \longrightarrow Spec\,(\mathcal{O}_k)$ $(Spec\,(\mathbb{Q}\,(E)) \longrightarrow Spec\,(\mathcal{O}_k))$.
- Sea S un conjunto finito de primos fuera del cual X tiene buena reducción $(S = \{2\})$.
- Sean $n := dim\,(X)$ $(n = 1)$ y tómese un entero $0 \leq \omega \leq 2n$ $(0 \leq \omega = 1 \leq 2)$.
- Para cualquier primo l se considera el $\omega-$ésimo grupo de cohomología étale $H^{\omega}_{\acute{e}t}\,(X, \mathbb{Q}_l)$ $(H^{\omega}_{\acute{e}t}\,(X, \mathbb{Q}_l) = V_l\,(E)^*)$.
- Denotamos por m su dimensión $(m = 2)$.

1. El factor local.

La acción del Galois absoluto G_k $(G_{\mathbb{Q}})$ en $H^{\omega}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}_l)$ da una representación de Galois $l-$ádica:

$$\rho^{\omega}_{X,l}: \; G_k \longrightarrow Aut\left(H^{\omega}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Q}_l)\right) \simeq GL_m(\mathbb{Q}_l)$$

$$\rho^{1}_{E,l} = \rho^{*}_{E,l}: \; G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Aut\left(V_l(E)^{*}\right) \simeq GL_2(\mathbb{Q}_l)$$

Dado un primo $\mathfrak{p} \notin S$ sea $Frob_{\mathfrak{p}}^{-1}$ un Frobenius geométrico de $\mathfrak{p}$, se define el factor local:

$$L_{\mathfrak{p}}(X, T) := det(1 - \rho^{\omega}_{X,l}(Frob_{\mathfrak{p}}^{-1})T; H^{\omega}_{\text{ét}}(X, \mathbb{Q}_l))$$

$$L_p(E, T) = p - a_p T + T^2$$

Las conjeturas de Weil nos dicen que $L_{\mathfrak{p}}(X, T)$ tiene coeficientes enteros y que las m (2) raíces son $N\mathfrak{p}-$Weil integers de peso ω (norma $p^{1/2}$).

1. El factor local normalizado.

Se define el factor local normalizado como:

$$\bar{L}_{\mathfrak{p}}(X,T) := L_{\mathfrak{p}}(X, N\mathfrak{p}^{-\omega/2}T)$$

$$\bar{L}_p(E,T) = 1 - \bar{a}_p T + T^2.$$

- Si $p \equiv 3 \bmod 4$ entonces $\bar{a}_p = 0$ porque $\rho_{E,l}\left(Frob_p^{-1}\right)$ es en una base adecuada $\begin{pmatrix} i\cos\theta_p & i\sin\theta_p \\ i\sin\theta_p & -i\cos\theta_p \end{pmatrix}$ y para un cierto θ_p. Y:

$$\bar{L}_p(E,T) = 1 + T^2.$$

- Si $p \equiv 1 \bmod 4$ entonces $\bar{a}_p = 2\alpha/\sqrt{p}$ donde $p = \alpha^2 + \beta^2$ con $\alpha \equiv -\left(\frac{2}{p}\right) \bmod 4$ porque en este caso $\rho_{E,l}\left(Frob_p^{-1}\right)$ es en la base anterior $\begin{pmatrix} \cos\theta_p & sen\,\theta_p \\ -sen\,\theta_p & \cos\theta_p \end{pmatrix}$ con $\theta_p = arctg\ (\alpha/\beta)$. Y:

$$\bar{L}_p(E,T) = 1 - 2\cos\theta_p T + T^2.$$

1. Definiciones.

- Sea $G_k^1 := Ker\,\chi_l$ donde $\chi_l : G_k \longrightarrow \mathbb{Z}_l$ $(\chi_l : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Z}_l)$ es el carácter ciclotómico $l-$ádico.
- Sea $G_l^{1,\omega}$ la clausura de Zariski de $\rho_X^{\omega}\left(G_k^1\right)$ en $GL_m\left(\mathbb{Q}_l\right)$.
- Fijemos un embedding $\iota : \bar{\mathbb{Q}}_l \hookrightarrow \mathbb{C}$, se define

$$G_{l,\iota}^{1,\omega} := G_l^{1,\omega} \otimes_{\iota} \mathbb{C} \subseteq GL_m\left(\mathbb{C}\right).$$

1. El grupo de Sato-Tate.

Definición: el grupo de Sato-Tate de X de peso ω es un subgrupo maximal compacto de $G_{l,\iota}^{1,\omega}$. De hecho es un grupo compacto de Lie. Lo denotamos por $ST(X,\omega)$. Y fijamos $ST(X) = ST(X,1)$.

1. El grupo de Sato-Tate.

Definición: el grupo de Sato-Tate de X de peso ω es un subgrupo maximal compacto de $G_{l,\iota}^{1,\omega}$. De hecho es un grupo compacto de Lie. Lo denotamos por $ST(X,\omega)$. Y fijamos $ST(X) = ST(X,1)$.

Remark: Todos los subgrupos maximales compactos de $G_{l,\iota}^{1,\omega}$ son conjugados, luego $ST(X,\omega)$ está bien definido salvo conjugación, lo cual es suficiente para estudiar resultados de equidistribución.

$$ST(E) = N(U(1)).$$

1. El factor local.

Sea S_l la unión de S y los primos de k que caen sobre l.

Definición: Para todo $\mathfrak{p} \notin S_l$ sea $s_{\mathfrak{p}}$ la clase de conjugación de $ST(X, \omega)$ correspondiente a $\rho_X^{\omega}(Frob_{\mathfrak{p}}^{-1}) \otimes_{\iota} N\mathfrak{p}^{-\omega/2}$.

1. El factor local.

Sea S_l la unión de S y los primos de k que caen sobre l.

Definición: Para todo $\mathfrak{p} \notin S_l$ sea $s_\mathfrak{p}$ la clase de conjugación de $ST(X, \omega)$ correspondiente a $\rho_X^\omega(Frob_\mathfrak{p}^{-1}) \otimes_\iota N\mathfrak{p}^{-\omega/2}$.

Como $\rho_X^\omega(Frob_\mathfrak{p}^{-1}) \otimes_\iota N\mathfrak{p}^{-\omega/2}$ tiene determinate 1 es de hecho un elemento de $G_{l,\iota}^{1,\omega}$. Y como todos sus autovales tienen módulo 1 pertenece a un subgrupo compacto. Y como todos los subgrupos compactos son conjuagados a $ST(X, \omega)$, define una clase de conjugación en $ST(X, \omega)$. Por construcción se tiene que:

$$det(1 - s_\mathfrak{p} T; H_{\text{ét}}^\omega(X, \mathbb{Q}_l) \otimes_\iota \mathbb{C}) = \bar{L}_\mathfrak{p}(X, T)$$

2. La conjetura generalizada de Sato-Tate.

Conjetura: (Generalizada de Sato-Tate)

i) La clase de conjugación de $ST(X,\omega)$ en $GL_m(\mathbb{C})$ no depende de la elección ni del primo l ni del embedding ι.

ii) Sea $(ST(X,\omega))$ el conjunto de clases de conjugación de $ST(X,\omega)$. Para todo $\mathfrak{p} \notin S_l$, las clases de conjugación $s_{\mathfrak{p}}$ están equidistribuidas en $(ST(X,\omega))$ respecto a la proyección en este conjunto de la medida de Haar en $ST(X,\omega)$.

3. Ejemplos: peso $\omega = 0$.

Sea L/k una extensión finita de Galois y sea X el $k-$esquema $Spec(L)$. Sea S el conjunto de primos de k ramificados en L. Tomamos $\omega = 0$ y en este caso tenemos que:

$$H^0_{\text{ét}}\left(Spec\left(L\right), \mathbb{Q}_l\right) \simeq H^0\left(G_L, \bar{L}\right) \otimes \mathbb{Q}_l = L \otimes \mathbb{Q}_l.$$

Por tanto $m = [L : k]$ y $\rho^0_{X,l}$ es equivalente a la representación regular del grupo $Gal\left(L/k\right)$. Su imagen es claramente Zariski cerrada (finita) y es isomorfa a $Gal\left(L/k\right)$. Y obtenemos:

$$ST(Spec(L), 0) = Gal(L/k).$$

La medida de Haar en este caso en la medida discreta. Para todo $\mathfrak{p} \notin S_l$ la clase de $s_{\mathfrak{p}}$ se identifica con $Frob_{\mathfrak{p}} \in (Gal(L/k))$. Así, en este caso la conjetura generalizada de Sato-Tate se reduce al teorema de densidad de Chebotarev.

3. Ejemplos: Variedades Abelianas.

Sea $X = A/k$ una variedad abeliana de dimensión g. Entonces se tiene que:

$$H^{\omega}_{\acute{e}t}\left(A, \mathbb{Q}_l\right) = \Lambda^{\omega} H^{1}_{\acute{e}t}\left(A, \mathbb{Q}_l\right)$$

donde además $H^{1}_{\acute{e}t}\left(A, \mathbb{Q}_l\right) = V\left(A\right)^{*}$.
Por tanto se tiene que:

$$ST\left(A, \omega\right) = \Lambda^{\omega} ST\left(A, 1\right) = \Lambda^{\omega} ST\left(A\right).$$

Así para variedades abelianas sólo estudiaremos el caso de peso ω.

3. Ejemplos: peso $\omega = 1$. $g = 1$ sin CM.

- Sea $X = E$ una curva elíptica sin multiplicación compleja.
- Por el teorema de la imagen abierta de Serre la clausura de Zariski de $\rho_E^1\left(G_k\right)$ es igual a $GSp_2\left(\mathbb{Q}_l\right)$ y la de $\rho_E^1\left(G_k^1\right)$ es $Sp_2\left(\mathbb{Q}_l\right)$.

3. Ejemplos: peso $\omega = 1$. $g = 1$ sin CM.

- Sea $X = E$ una curva elíptica sin multiplicación compleja.
- Por el teorema de la imagen abierta de Serre la clausura de Zariski de $\rho_E^1\left(G_k\right)$ es igual a $GSp_2\left(\mathbb{Q}_l\right)$ y la de $\rho_E^1\left(G_k^1\right)$ es $Sp_2\left(\mathbb{Q}_l\right)$.
- Salvo conjugación, el grupo maximal compacto de $Sp_2\left(\mathbb{Q}_l\right) \otimes_\iota \mathbb{C}$ es $USp\left(2\right) = SU\left(2\right)$. Y por tanto
$$ST\left(E\right) = SU\left(2\right).$$
- Así la conjetura generalizada de Sato-Tate en este caso resulta ser equivalente a la conjetura original de Sato-Tate.

3. Ejemplos: peso $\omega = 1$. $g = 1$ con CM.

- Sea $X = E$ una curva elíptica sobre k con multiplicación compleja sobre $M \subseteq k$.
- Entonces la clausura de Zariski de $\rho_E^1\left(G_k^1\right)$ es $T_M\left(\mathbb{Q}_l\right)$, donde $T_M = Res_{M/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$ es el toro de dimensión 2 definido por M $\left(T_M\left(\mathbb{Q}_l\right) = \left(\mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Q}} M\right)^*\right)$.
- Por tanto:

$$\rho_E^1\left(G_k^1\right) \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \mathbb{C} = \left(\mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Q}} M\right)^* \otimes_{\bar{\mathbb{Q}}_l} \mathbb{C} = \mathbb{C}^*.$$

- El subgrupo maximal compacto de $\mathbb{C}^*$ es $U(1)$ y por tanto

$$ST(E) = U(1).$$

3. Ejemplos: Variedades abelianas de dimensión g.

- Sea $X = A$ una variedad abeliana de dimensión g tal que $End_{\bar{\mathbb{Q}}}(A) = \mathbb{Z}$.
- Si g es impar (o si $g = 2$ ó $g = 6$) un resultado de Serre muestra que la clausura de Zariski de $\rho_A^1\left(G_k^1\right)$ es $Sp_{2g}(\mathbb{Q}_l)$.
- Por tanto, en este caso,

$$ST(A) = USp(2g)$$

y la conjetura generalizada de Sato-Tate resulta equivalente a uno de los corolarios del teorema de Hecke.

4. Motivos y estructuras de Hodge.

J.-P. Serre [Ser95] ha dado una construcción del grupo de Sato-Tate en un contexto más general: el de motivos.
Además ha deducido una serie de propiedades que deben satisfacer estos grupos como consecuencia de ciertas conjeturas motívicas.
Asi, para motivos auto-duales de peso ω, dimensión m y números de Hodge $h^{p,q}$ enuncia lo que se conoce como axiomas de Sato-Tate.

Motivo: "variedad proyectiva". Sólo se han definido los motivos puros, los mixtos aun no. (X, p, ω)

Estructura de Hodge: descomposición de la complexificación de un grupo abeliano

$$H := H_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \oplus_{p+q=\omega} H^{p,q}$$

4. Axiomas de Sato-Tate.

- (ST1) El grupo G es un subgrupo cerrado de $USp(m)$ (si ω es impar) o de $O(m)$ (si ω es par).
- (ST2) (Condición de Hodge) Existe un subgrupo H de G, llamado círculo de Hodge, tal que es la imagen de un homomorfismo $\theta : U(1) \longrightarrow G^0$, donde G^0 es la componente conexa de G que contiene a la identidad, y tal que $\theta(u)$ tiene autovalores u^{p-q} con multiplicidad $h^{p,q}$. Además, H puede ser escogido de tal modo que los conjugados de H generan un subgrupo denso de G^0.
- (ST3) (Condición de racionalidad) Para cada componente C del grupo G y para cada carácter irreducible χ de $GL_m(\mathbb{C})$ el valor medio de $\chi(\gamma)$ sobre $\gamma \in C$ es un entero.

4. Axiomas de Sato-Tate: finitud.

Teorema: ([FKRS12])
Fijados $\omega, m, h^{p,q}$, hay sólo un número finito de grupos G que verifican los axiomas (ST1), (ST2) y (ST3) salvo conjugación en $USp(m)$ y en $O(m)$.

4. Axiomas de Sato-Tate: finitud.

Teorema: ([FKRS12])
Fijados $\omega, m, h^{p,q}$, hay sólo un número finito de grupos G que verifican los axiomas (ST1), (ST2) y (ST3) salvo conjugación en $USp(m)$ y en $O(m)$.

Así por ejemplo para el caso de peso $\omega = 1$ y números de Hodge $h^{0,1} = h^{1,0} = 1$, la clasificación finita se reduce a los 3 siguientes grupos:

$$U(1), \; N(U(1)), \; SU(2).$$

4. Clasificación teórica de grupos de Sato-Tate. Pesos 1 y 3.

Teorema: ([FKRS12]) Si (ST1), (ST2) y (ST3) son ciertos, entonces el grupo de Sato-Tate de un motivo autodual de peso 1 y números de Hodge $h^{0,1} = h^{1,0} = 2$ es conjugado a uno de 55 grupos. Cuyos grupos de componentes pueden ser:

$U(1)$, $SU(2)$, $U(1) \times U(1)$, $U(1) \times SU(2)$, $SU(2) \times SU(2)$, $USp(4)$.

En cada caso hay 32, 10, 8, 2, 2, 1 grupos diferentes.

4. Clasificación teórica de grupos de Sato-Tate. Pesos 1 y 3.

Teorema: ([FKRS12]) Si (ST1), (ST2) y (ST3) son ciertos, entonces el grupo de Sato-Tate de un motivo autodual de peso 1 y números de Hodge $h^{0,1} = h^{1,0} = 2$ es conjugado a uno de 55 grupos. Cuyos grupos de componentes pueden ser:

$$U(1),\ SU(2),\ U(1) \times U(1),\ U(1) \times SU(2),\ SU(2) \times SU(2),\ USp(4).$$

En cada caso hay 32, 10, 8, 2, 2, 1 grupos diferentes.

Teorema: ([FKRS12]) Si (ST1), (ST2) y (ST3) son ciertos, entonces el grupo de Sato-Tate de un motivo autodual de peso 3 y números de Hodge $h^{0,3} = h^{1,2} = h^{2,1} = h^{3,0} = 1$ es conjugado a uno de 26 grupos. Cuyos grupos de componentes pueden ser:

$$U(1),\ SU(2),\ U(1)\times U(1),\ U(1)\times SU(2),\ U(2),\ SU(2)\times SU(2),\ USp(4).$$

En cada caso hay 10, 1, 8, 2, 2, 2, 1 grupos diferentes.

5. Conjeturas de Mumford-Tate y algebraica de Sato-Tate.

Para variedades abelianas $X = A$ de dimensión ≤ 3 los axiomas de Sato-Tate se saben ciertos, [BK11].

Un resultado de Deligne afirma que la componente conexa de la clausura de Zariski de la imagen de la representación $l-$ádica asociada a A está contenida en $Hg\,(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$.

5. Conjeturas de Mumford-Tate y algebraica de Sato-Tate.

Para variedades abelianas $X = A$ de dimensión ≤ 3 los axiomas de Sato-Tate se saben ciertos, [BK11].

Un resultado de Deligne afirma que la componente conexa de la clausura de Zariski de la imagen de la representación $l-$ádica asociada a A está contenida en $Hg\,(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$.

Conjetura: (Mumford-Tate) La inclusión $\left(G_l^{1,\omega}\right)^0 \subseteq Hg\,(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$ es una igualdad.

Conjetura: (Algebraica de Sato-Tate) Existe un subgrupo algebraico $AST\,(A)$ de $GSp_{2g}/\mathbb{Q}$, llamado el grupo algebraico de Sato-Tate de A, tal que, para cada primo l, se tiene que: $G_l^{1,\omega} = AST(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$.

5. Conjeturas de Mumford-Tate y algebraica de Sato-Tate.

Teorema: ([FKRS12]) Para el caso de variedades abelianas de dimensión g (peso $\omega = 1$ y números de Hodge $h^{1,0} = h^{0,1} = g$) los axiomas de Sato-Tate son ciertos si A satisface las conjeturas de Mumford-Tate y algebraica de Sato-Tate.

Teorema: ([BK11]) Si $g \leq 3$ entonces las conjeturas de Mumford-Tate y algebraica de Sato-Tate se cumplen.

Idea de la prueba: Se considera el grupo de Lefschtz twistado y se utiliza que en general $G_l^{1,1} \subseteq TL(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$.

5. El grupo de Lefschetz twistado.

El grupo de Lefschetz twistado se define como:

$$TL(A) := \cup_{\tau \in G_k} L(A, \tau)$$

donde

$$L(A, \tau) := \left\{ \gamma \in Sp_{2g} : \gamma^{-1} \alpha \gamma = {}^{\tau} \alpha \, \text{para todo} \, \alpha \in End_{\bar{\mathbb{Q}}}(A) \right\}.$$

Para $g \leq 3$ se tiene que $G_l^{1,1} = TL(A) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_l$ y por tanto la conjetura algebraica de Sato-Tate se cumple con

$$AST(A) = TL(A).$$

5. El grupo de Lefschetz twistado.

Consideremos de nuevo la curva elíptica $E: y^2 = x^3 + x$ definida sobre $\mathbb{Q}$ y con multiplicación compleja por $\mathbb{Q}(i)$.

$$L(E,1) \cap U_{2g} \to \left\{ A = \begin{pmatrix} cos\,\theta & sin\,\theta \\ -sin\,\theta & cos\,\theta \end{pmatrix} \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$L(E,\tau) \cap U_{2g} \to \left\{ B = \begin{pmatrix} icos\,\theta & isin\,\theta \\ isin\,\theta & -icos\,\theta \end{pmatrix} \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

De donde obtenemos

$$ST(E) = N(U(1)).$$

5. El tipo de Galois.

Definición: Considerese los pares $[G, E]$ donde G es un grupo finito y E es una $\mathbb{R}-$algebra finita equipada con una acción de G. Un isomorfismo de pares $[G, E]$ y $[G', E']$ consiste en un isom. $G \simeq G'$ de grupos y un isom. equivariante $E \simeq E'$ de $\mathbb{R}-$algebras. Dada una var. ab. A/k sea K/k la mínima extensión sobre la cual están definidos todos los endomorfismos de A. El tipo de Galois asociado a A es el par

$$[Gal\,(K/k)\,,\, End_K\,(A) \otimes \mathbb{R}].$$

Variedades abelianas definidas sobre cuerpos de números distintos pueden tener el mismo tipo de Galois.

Teorema: ([FKRS12]) Para $g \leq 3$ el grupo de Sato-Tate determina unicamente el tipo de Galois.
Para $g = 1$ hay 3 posibles grupos de Sato-Tate
$U\,(1)\,,\, N\,(U\,(1))\,,\, SU\,(2)$ y sus tipos de Galois son respectivamente:

$$\mathbb{C}\,(\text{con acción trivial}),\ \mathbb{C}\,(\text{con acción de}\,\mathbb{Z}_2),\ \mathbb{R}\,(\text{con acción trivial})$$

5. Resultados en dimensión 2.

Teorema: ([FKRS12])
El grupo de Sato-Tate y el tipo de Galois de superficies abelianas sobre un cuerpo de números se determinan únicamente cada uno de ellos.
Y hay exactamente 52 posibilidades.

Remark: cuando el cuerpo de números es $\mathbb{Q}$ aparecen exactamente 34 posibilidades y además existen curvas de género 2 definidas sobre $\mathbb{Q}$ cuyas jacobianas realizan cada uno de estos grupos/tipos.

5. Casos probados de la conjetura generalizada de Sato-Tate.

Teorema: ([Gon11]) de entre los 34 casos anteriores 18 resultan ser modulares y en 15 de ellos la conjetura generalizada de Sato-Tate se cumple.

Teorema: ([FS12]) La conjetura generalizada de Sato-Tate es cierta para las jacobianas de los twists de las curvas de género 2: $y^2 = x^6 + 1$ y $y^2 = x^5 - x$. En particular aparecen 18 grupos distintos sobre $\mathbb{Q}$ de los 34 posibles y no todos están cubiertos en el caso anterior.

Teorema: ([FLS12]) La conjetura generalizada de Sato-Tate es cierta para las jacobianas de los twists de las curvas de Fermat y Klein de género 3. En el primer caso aparecen 48 distribuciones diferentes y en el segundo 22.

Bibliografía.

- [BK11]: G. Banaszak and K.S. Kedlaya, An algebraic Sato-Tate group and Sato-Tate conjecture, arXiv:1109.4449v1 (2011).
- [FLS12]: F. Fite, E. Lorenzo, and A.V. Sutherland, Sato-Tate distributions of twists of the Fermat and the Klein curves, Preprint (2012).
- [FS12]: F. Fite and A.V. Sutherland, Sato-Tate distributions of twists of $y^2 = x^5 - x$ and $y^2 = x^6 + 1$, Preprint (2012).
- [FKRS12]: F.Fite, K.S. Kedlaya, A.V. Sutherland, V. Rotger, Sato-Tate distributions and Galois endomorphism modules in genus 2, Compositio Mathematica 148, n. 5 (2012), 1390-1442.
- [Gon11]: J. Gonzlez, The Frobenius traces distribution for modular abelian surfaces, Preprint (2011).
- [Ser95]: J.-P. Serre, Proprietes conjecturales des groupes de Galois motiviques et des representations l-adiques, Motives (Seattle, WA, 1991), Proceedings of Symposia in Pure Math. 55, Amer. Math. Soc., 1994, 377-400.
- [Ser12]: J.-P. Serre, Lectures on $N_X(p)$, A.K. Peters, 2012.