Àlgebres de Lie Clàssiques i les seves Representacions

Laia Amorós i Carafí
Universitat de Barcelona

Gener 2013

Objectius:

(1) Classificació de les àlgebres de Lie complexes simples.

(2) Representacions irreductibles d'aquestes àlgebres.

Grups de Lie

Definició.

Un **grup de Lie** G *és una varietat diferenciable que té també una estructura de grup, de manera que:*

(a) *La multiplicació*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (g, g') & \longmapsto & gg' \end{array}$$

és una aplicació diferenciable.

(b) *L'aplicació inversa*

$$\begin{array}{rccc} \iota: & G & \longrightarrow & G \\ & g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

és diferenciable.

Exemples.

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{S}^1, \mathrm{GL}(n, K)$.

Grups de Lie

Cartan: Classifica els grups de Lie simples.

La definició més utilitzada de grup de Lie **simple** és un grup de Lie G sense subgrups normals connexos (no trivials) i tal que G és

- connex
- no abelià
- amb centre no necessàriament trivial

Grups de Lie simples

$\downarrow$

Grups de Lie simples amb centre trivial $\longleftrightarrow$ Àlgebres de Lie simples reals

$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) \longmapsto \mathfrak{sl}_n\mathbb{R}$

$\mathrm{SU}(n,\mathbb{C}) \longmapsto \mathfrak{su}_n\mathbb{C}$

$\downarrow$

$\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$

$\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$

Àlgebres de Lie simples complexes

Proposició

Un subgrup tancat d'un grup de Lie és un grup de Lie respecte la topologia induïda.

Exemples. (Grups de Lie clàssics)

- **Grup especial lineal**, $SL(n, K) = \{g \in GL(n, K) \mid \det(g) = 1\}$.
- **Grup ortogonal especial**, $SO(n, K) = \{g \in SL(n, K) \mid gg^t = I\}$.
- **Grup unitari especial**, $SU(n, \mathbb{C}) = \{g \in SL(n, \mathbb{C}) \mid \overline{g}^t g = I\}$.
- **Grup simplèctic compacte** *o* **grup hiperunitari**, $Sp(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{H}) \mid \overline{g}^t g = I\}$.
- **Grup simplèctic**, $Sp(2n, K) = \{g \in GL(2n, K) \mid g^t Jg = J\}$, *on* $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$

Àlgebres de Lie

Definició.

Una **àlgebra de Lie** *és una àlgebra $\mathfrak{g}$ tal que la multiplicació, que normalment es denota per $[X, Y]$, satisfà les propietats següents:*

(a) *És antisimètrica; és a dir,*

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad \textit{per a tot } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

(b) *Satisfà la* **identitat de Jacobi***:*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

per a tot $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

La **dimensió** d'una àlgebra de Lie és la seva dimensió com a espai vectorial.

A partir d'una àlgebra associativa A sempre es pot construir una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$, definint el claudàtor de Lie de $\mathfrak{g}$ com el commutador de A:

$$[X, Y] = XY - YX, \quad \text{per a tot } X, Y \in A.$$

Àlgebres de Lie

Definició.

Diem que una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ és **simple** *si $dim(\mathfrak{g}) > 1$ i no conté ideals no trivials.*

Es pot associar una àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ a un grup de Lie G, que com a espai vectorial és l'espai tangent a l'element neutre e de G.

Proposició

Sigui G un grup de Lie connex, i sigui $U \subseteq G$ un entorn obert de la identitat $e \in G$. Aleshores U genera G.

Per passar de l'àlgebra al grup:

Si G un subgrup de Lie de $\mathrm{GL}(n, K)$ i $X \in \mathfrak{g}$, aleshores

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \in G.$$

Àlgebres de Lie clàssiques

Grup	Àlgebra
$\mathrm{GL}(n, K)$	$\mathfrak{gl}_n K = \mathrm{M}_{n,n}(K)$
$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \mid \mathrm{tr}X = 0\}$
$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}_n\mathbb{R} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R} \mid \mathrm{tr}X = 0\}$
$\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \mid X^t = -X\}$
$\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}_n\mathbb{R} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R} \mid X^t = -X\}$
$\mathrm{SO}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \mid X^t = -X\}$
$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{so}_n\mathbb{R} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{R} \mid X^t = -X\}$
$\mathrm{U}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{u}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \mid X^* = -X\}$
$\mathrm{SU}(n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{su}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \mid X^* = -X,\ \mathrm{tr}X = 0\}$
$\mathrm{Sp}(n)$	$\mathfrak{sp}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{H} \mid X^* = -X\}$
$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}\mathbb{C} \mid X^t J = -JX\}$
$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}_n\mathbb{R} = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}\mathbb{R} \mid X^t J = -JX\}$

Teorema de classificació

Teorema

(Classificació de les àlgebres de Lie complexes i simples) *Tota àlgebra de Lie complexa i simple és isomorfa a una de les àlgebres de Lie següents:*

$$\mathfrak{sl}_n\mathbb{C},\ \mathfrak{so}_n\mathbb{C},\ \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C},\quad \textit{per a algun } n > 1,$$

llevat de cinc excepcions, que s'anomenen

$$\mathfrak{e}_6,\ \mathfrak{e}_7,\ \mathfrak{e}_8,\ \mathfrak{f}_4,\ \mathfrak{g}_2.$$

Representació d'àlgebres de Lie

Definició.

Una **representació d'una àlgebra de Lie** $\mathfrak{g}$ *en un K-espai vectorial V de dimensió n és una aplicació d'àlgebres de Lie*

$$\pi_V : \mathfrak{g} \longrightarrow End(V) = \mathfrak{gl}_n K;$$

és a dir, una aplicació lineal que preserva el claudàtor de Lie, o una acció de $\mathfrak{g}$ en V tal que

$$[X, Y](v) = X(Y(v)) - Y(X(v)),$$

per a tot $X, Y \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Exemple.

Sigui $\mathfrak{g}$ *una àlgebra de Lie. Es defineix la* **representació adjunta** *de* $\mathfrak{g}$ *com*

$$\begin{array}{rccl} ad: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & End(\mathfrak{g}) \\ & X & \longmapsto & ad(X): Y \mapsto ad(X)(Y) := [X, Y]. \end{array}$$

Proposició

Tota representació d'una àlgebra de Lie semisimple es pot expressar com a suma directa de representacions irreductibles.

Teorema

Sigui G *un grups de Lie connex i simplement connex, i sigui* $\mathfrak{g}$ *la seva àlgebra de Lie. Hi ha una bijecció entre les representacions de* G *i les representacions de* $\mathfrak{g}$*.*

Demostració del teorema de classificació

Idea de la demostració:

Sigui $\mathfrak{g}$ una àlgebra de Lie complexa i simple. Els passos per demostrar el teorema de classificació són:

1. Trobar una **subàlgebra de Cartan** $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$.
2. Dotar a $\mathfrak{g}$ de producte escalar, amb la **forma de Killing**:
$$B(X,Y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X)\mathrm{ad}(Y)), \text{ per a tot } X, Y \in \mathfrak{g},$$
3. Fer actuar $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$. S'obté la **descomposició de Cartan**:
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus \mathfrak{g}_\alpha \right),$$
on, per a tot $H \in \mathfrak{h}$, i tot $X \in \mathfrak{g}_\alpha$,
$$\mathrm{ad}(H)(X) = [H, X] = \alpha(H) \cdot X, \ \alpha \in \mathfrak{h}^*.$$
Els elements $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ s'anomenen **arrels de l'àlgebra** i formen el **sistema d'arrels de l'àlgebra**.
4. ...

Exemple: $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ =matrius 3×3 amb traça 0.

- **Subàlgebra de cartan**: $\mathfrak{h} = \{\text{matrius diagonals amb traça} = 0\}$.
- **Forma de Killing**: $B(X, Y) = 6\mathrm{tr}(XY)$.
- **Descomposició de Cartan**:

$$\mathfrak{sl}_3\mathbb{C} = \langle \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\oplus \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

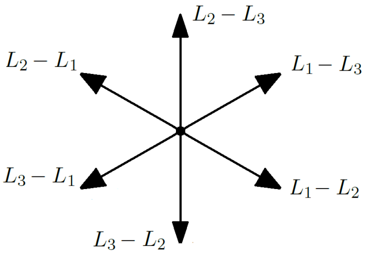
Per a tot $H = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$,

$$[H, E_{i,j}] = (a_i - a_j)E_{i,j} = (L_i - L_j)(H)E_{i,j},$$

on $L_k \in \mathfrak{h}^*$, per a $k = 1, 2, 3$, definida com $L_k \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_k$.

Exemple: $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$

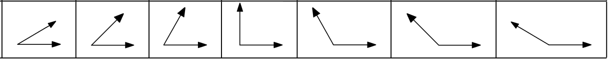
- **Arrels**: L'àlgebra $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ té sis arrels: $L_i - L_j$, per a $i, j \in \{1, 2, 3\}$.
- **Sistema d'arrels**:



Demostració del teorema de classificació

Continuem amb la demostració: Combinacions possibles de dues arrels d'un mateix sistema d'arrels qualsevol:

θ	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$



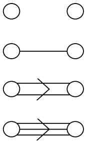
4. Considerem un **sistema d'arrels** Φ qualsevol de rang n (dimensió de l'espai vectorial subjacent de Φ).
5. En el conjunt d'arrels $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ del sistema d'arrels es defineix un ordre. Del conjunt d'arrels que formen el sistema d'arrels, ens quedem només amb n **arrels simples**. A partir d'aquestes es pot recuperar el sistema d'arrels Φ.
6. Finalment, a partir del conjunt d'arrels simples es construeix un graf, que s'anomena **diagrama de Dynkin**.

cap segment: $\theta = \pi/2$

un segment: $\theta = 2\pi/3$

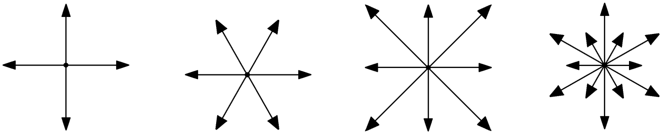
dos segments: $\theta = 3\pi/4$

tres segments: $\theta = 5\pi/6$

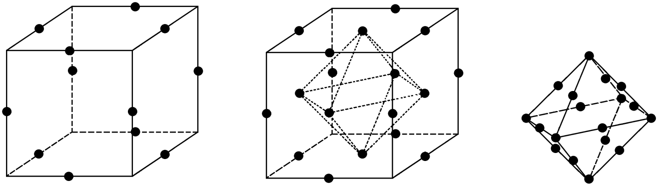


Rang 1.

Rang 2.



Rang 3.



Demostració del teorema de classificació

Teorema

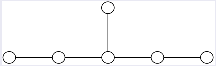
Donat un sistema d'arrels irreductible, el seu diagrama de Dynkin associat és un dels següents:

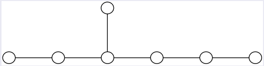
(A_n) 

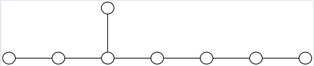
(B_n) 

(C_n) 

(D_n) 

(E_6) 

(E_7) 

(E_8) 

(F_4) 

(G_2) 

Àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ complexa $\longrightarrow$ Subàlgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimensió n $\longrightarrow$ Sistema d'arrels de $\mathfrak{g}$ = {elements de $\mathfrak{h}^*$}

$\longrightarrow$ Sistema d'arrels abstracte de rang n $\longrightarrow$ n arrels simples $\longrightarrow$ Diagrama de Dynkin

Representacions de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$

Base de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$: $H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),$

i aquestes matrius satisfan:
$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$

La subàlgebra de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ és la matriu H.

Com que $\mathfrak{h}$ té dimensió 1, sabem que $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ només té una arrel simple α, i el conjunt d'arrels és $A = \{\alpha, -\alpha\}$.

La representació adjunta queda determinada doncs per:

$$\mathrm{ad}(H)(X) = [H, X] = 2X, \quad \mathrm{ad}(H)(Y) = [H, Y] = -2Y.$$

Sigui π_V una representació de dimensió finita i irreductible qualsevol de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Si considerem l'acció de $\pi_V(H)$ en V, tenim:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda,$$

on P és el conjunt de **pesos de la representació** V, de manera que, per a tot vector $v \in V_\lambda$,

$$(\pi_V(H))(v) = \lambda(H) \cdot v.$$

Podem representar l'acció de H, X i Y de la manera següent:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left, "X"] & V_{n-4} \arrow[l, "Y"'] \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, bend left, "X"] & V_{n-2} \arrow[l, "Y"'] \arrow[loop below, "H"] \arrow[r, bend left, "X"] & V_n \arrow[l, "Y"'] \arrow[loop below, "H"]
\end{tikzcd}
$$

Proposició

Sigui $v \in V_n$ un vector no nul. Aleshores, $(\pi_V(X))(v) = 0$ i els vectors $\{v, (\pi_V(Y))(v), (\pi_V(Y))^2(v), \ldots\}$ generen V.

Teorema

Per a cada enter $n \geq 0$ hi ha una única representació $\pi_{V^{(n)}}$, on

$$V^{(n)} = V_{-n} \oplus V_{-n+2} \oplus \ldots \oplus V_{n-2} \oplus V_n,$$

de dimensió $n+1$. A més, totes les representacions irreductibles són d'aquesta forma.

Exemple: La representació estàndard

Si x, y és la base estàndard per $\mathbb{C}^2$, aleshores tenim que

$$
\begin{array}{rccl}
\mathrm{Id}: & \mathfrak{sl}_2\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{End}(V) \\
 & H & \longmapsto & \mathrm{Id}(H) = H : \begin{array}[t]{ccc} V & \to & V \\ x & \mapsto & H(x) = x \\ y & \mapsto & H(y) = -y, \end{array}
\end{array}
$$

de manera que

$$V = \mathbb{C} \cdot x \oplus \mathbb{C} \cdot y = V_{-1} \oplus V_1 = V^{(1)}.$$

Exemple: La representació adjunta

Abans hem vist que les arrels de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ eren -2 i 2. Això vol dir que la representació adjunta és

$$V^{(2)} = V_{-2} \oplus V_0 \oplus V_2.$$

Una altra manera de pensar aquesta representació és la següent. Considerem la base $\{x^2, xy, y^2\}$ de $\mathbb{C}^2$ amb el producte simètric. Denotem aquest espai per $W = \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^2$ (polinomis homogenis en dues variables). La representació $\pi_W = \mathrm{Sym}^2\mathbb{C}^2$ ve donada per

$$\begin{array}{rccllcl} \mathrm{Sym}^2 : & \mathfrak{sl}_2\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathrm{End}(W) & & & \\ & H & \longmapsto & \mathrm{Sym}^2(H): & W & \to & W \\ & & & & v \cdot w & \mapsto & \mathrm{Sym}^2(H)(v \cdot w) = \\ & & & & & & v \cdot H(w) + H(w) \cdot v, \end{array}$$

Aleshores,

$$(\mathrm{Sym}^2(H))(x^2) = x \cdot H(x) + H(x) \cdot x = 2x^2,$$

$$(\mathrm{Sym}^2(H))(xy) = H(x \cdot y) = x \cdot H(x) + H(x) \cdot y = 0,$$

$$(\mathrm{Sym}^2(H))(y^2) = y \cdot H(y) + H(y) \cdot y = -2y^2.$$

En general es té que tota representació irreductible $V^{(n)}$ de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ és de la forma

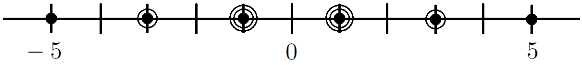
$$V^{(n)} = \mathrm{Sym}^n V,$$

Producte tensorial de representacions:

Sigui $V \cong \mathbb{C}^2$ la representació estàndrad de $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Considerem, per exemple, les representacions $\mathrm{Sym}^2(V)$ i $\mathrm{Sym}^3(V)$, i estudiem la representació

$$\mathrm{Sym}^2(V) \otimes \mathrm{Sym}^3(V).$$

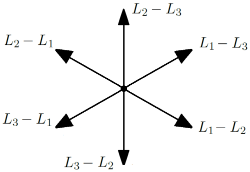
Hem vist abans que els valors propis de $\mathrm{Sym}^2(V)$ són $-2, 0, 2$, i els valors propis de $\mathrm{Sym}^3(V)$ són $-3, -1, 1, 3$. Aleshores, els 12 valors propis de $\mathrm{Sym}^2(V) \otimes \mathrm{Sym}^3(V)$ són 5 i -5, 3 i -3 (amb multiplicitat doble), i 1 i -1 (amb multiplicitat triple). Ho podem representar amb un diagrama.



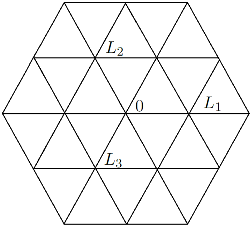
A partir del dibuix podem deduir que

$$\mathrm{Sym}^2(V) \otimes \mathrm{Sym}^3(V) \cong \mathrm{Sym}^5(V) \oplus \mathrm{Sym}^3(V) \oplus V.$$

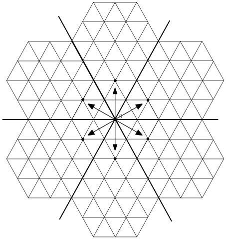
- El primer pas és determinar una subàlgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ i les seves arrels.
- Ja em vist que el sistema d'arrels és:



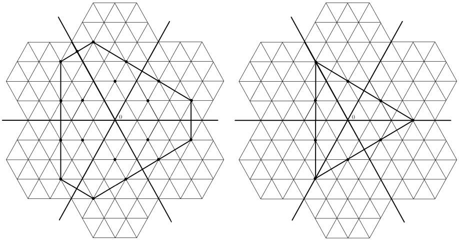
- La xarxa de pesos és:



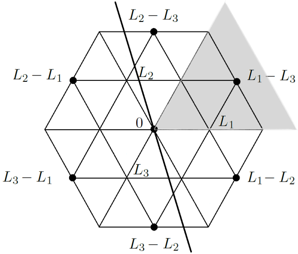
- El grup de Weyl de $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ està generat per les reflexions de les rectes ortogonals a les arrels de l'àlgebra.



- L'envolvent convexa del sistema de pesos és una de les següents:



- Determinar un **vector de pes més alt**.
- Escollir una ordenació de les arrels i determinar-ne la **cambra de Weyl** associada.



Teorema

Per a tota parella d'enters positius a, b existeix una representació $\Gamma_{a,b}$ de dimensió finita i irreductible única de $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ de pes més alt $aL_1 - bL_3$.

Representacions de $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$

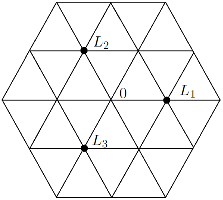


Figura : Representació estàndard

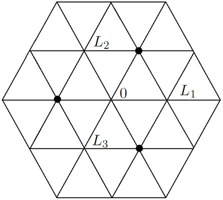
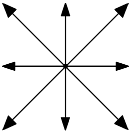
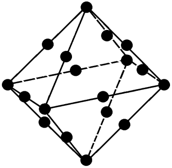


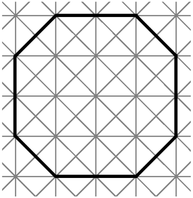
Figura : Representació dual

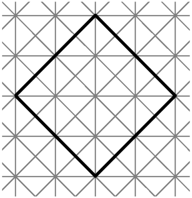
Sistemes d'arrels de $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ i $\mathfrak{sp}_6\mathbb{C}$

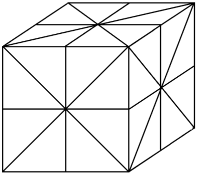




Xarxes de pesos de $\mathfrak{sp}_4\mathbb{C}$ i $\mathfrak{sp}_6\mathbb{C}$

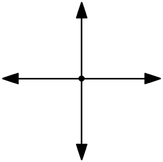
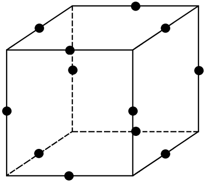




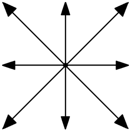
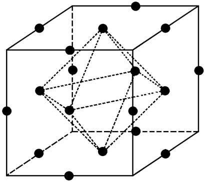


Representacions de $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$ i $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$

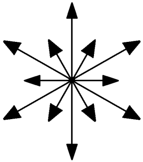
Sistemes d'arrels de $\mathfrak{so}_4\mathbb{C}$ i $\mathfrak{so}_6\mathbb{C}$

Sistemes d'arrels de $\mathfrak{so}_5\mathbb{C}$ i $\mathfrak{so}_7\mathbb{C}$

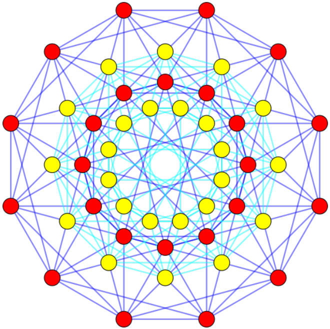



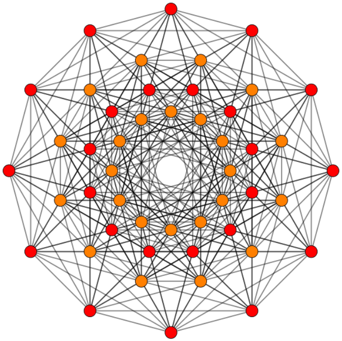
- $\mathfrak{g}_2$: té rang 2 (dimensió de la subàlgebra de Cartan) i dimensió 14. El seu sistema d'arrels és:



Les àlgebres de Lie esporàdiques

- $\mathfrak{f}_4$: té rang 4 i dimensió 52. En la primera figura podem veure el seu sistema d'arrels projectat al pla.
- $\mathfrak{e}_6$: té rang 6 i dimensió 78. En la segona figura podem veure el seu sistema d'arrels projectat al pla.





Les àlgebres de Lie esporàdiques

- $\mathfrak{e}_7$: té rang 7 i dimensió 133. En la primera figura podem veure el seu sistema d'arrels projectat al pla.
- $\mathfrak{e}_8$: té rang 8 i dimensió 248. En la segona figura podem veure el seu sistema d'arrels projectat al pla.