



# **El conductor de una curva de género 2 y las representaciones de Galois asociadas a sus variedades Jacobianas**

Sara Arias de Reyna

Universitat de Barcelona

21è Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona

2007

# Introducción

Sea  $K$  un cuerpo de números,

y  $A/K$  una variedad abeliana

# Introducción

Sea  $K$  un cuerpo de números,

y  $A/K$  una variedad abeliana

Sea  $l$  un número primo.

# Introducción

Sea  $K$  un cuerpo de números,

y  $A/K$  una variedad abeliana

Sea  $l$  un número primo.

$$A[l] := \{P \in A(\overline{K}) : \underbrace{P + \cdots + P}_{l \text{ times}} = O\}$$

# Introducción

Sea  $K$  un cuerpo de números,

y  $A/K$  una variedad abeliana

Sea  $l$  un número primo.

$$A[l] \simeq (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{2 \dim A}$$

# Introducción

Sea  $K$  un cuerpo de números,

y  $A/K$  una variedad abeliana

Sea  $l$  un número primo.

$$A[l] \simeq (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{2 \dim A}$$

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(\bar{K}|K) \rightarrow \text{Aut}(A[l])$$

# Introducción

Sea  $K$  un cuerpo de números,

y  $A/K$  una variedad abeliana

Sea  $l$  un número primo.

$$A[l] \simeq (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{2 \dim A}$$

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(\bar{K}|K) \rightarrow \text{Aut}(A[l]) \simeq \text{GL}_{2 \dim A}(\mathbb{F}_l)$$



# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

Pairing de Weil  $e_l : A[l] \times A^\vee[l] \rightarrow \mu_l$

# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

Pairing de Weil  $e_l : A[l] \times A^\vee[l] \rightarrow \mu_l$

Supongamos que  $A$  está principalmente polarizada,  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  isomorfismo.

# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

Pairing de Weil  $e_l : A[l] \times A^\vee[l] \rightarrow \mu_l$

Supongamos que  $A$  está principalmente polarizada,  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  isomorfismo.

$$e_l : A[l] \times A[l] \rightarrow \mu_l$$

es un pairing no degenerado, alternado y compatible por la acción de Galois.

# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

Pairing de Weil  $e_l : A[l] \times A^\vee[l] \rightarrow \mu_l$

Supongamos que  $A$  está principalmente polarizada,  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  isomorfismo.

$$e_l : A[l] \times A[l] \rightarrow \mu_l$$

es un pairing no degenerado, alternado y compatible por la acción de Galois.

$$e_l(\bar{\rho}_l(\sigma)(P), \bar{\rho}_l(\sigma)(Q)) = \chi_l(\sigma) e_l(P, Q),$$

para todo  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}|K)$ ,  $P, Q \in A[l]$ .

# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

Pairing de Weil  $e_l : A[l] \times A^\vee[l] \rightarrow \mu_l$

Supongamos que  $A$  está principalmente polarizada,  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  isomorfismo.

$$e_l : A[l] \times A[l] \rightarrow \mu_l$$

es un pairing no degenerado, alternado y compatible por la acción de Galois.

$$e_l(\bar{\rho}_l(\sigma)(P), \bar{\rho}_l(\sigma)(Q)) = \chi_l(\sigma) e_l(P, Q),$$

para todo  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}|K)$ ,  $P, Q \in A[l]$ .

$$\text{Im } \bar{\rho}_l \subset \text{GSp}_{2n}(\mathbb{F}_l)$$

# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

Pairing de Weil  $e_l : A[l] \times A^\vee[l] \rightarrow \mu_l$

Supongamos que  $A$  está principalmente polarizada,  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  isomorfismo.

$$e_l : A[l] \times A[l] \rightarrow \mu_l$$

es un pairing no degenerado, alternado y compatible por la acción de Galois.

$$e_l(\bar{\rho}_l(\sigma)(P), \bar{\rho}_l(\sigma)(Q)) = \chi_l(\sigma) e_l(P, Q),$$

para todo  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}|K)$ ,  $P, Q \in A[l]$ .

$$\text{Im } \bar{\rho}_l \subset \text{GSp}_{2n}(\mathbb{F}_l) \subset \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_l)$$



# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

Pairing de Weil  $e_l : A[l] \times A^\vee[l] \rightarrow \mu_l$

Supongamos que  $A$  está principalmente polarizada,  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  isomorfismo.

$$e_l : A[l] \times A[l] \rightarrow \mu_l$$

es un pairing no degenerado, alternado y compatible por la acción de Galois.

$$e_l(\bar{\rho}_l(\sigma)(P), \bar{\rho}_l(\sigma)(Q)) = \chi_l(\sigma) e_l(P, Q),$$

para todo  $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}|K)$ ,  $P, Q \in A[l]$ .

$$\text{Im } \bar{\rho}_l \subset \text{GSp}_{2n}(\mathbb{F}_l) \not\subset \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_l)$$

# Introducción

¿Qué sabemos de  $\text{Im } \bar{\rho}_l$ ?

Sea  $A/K$  una variedad abeliana de dimensión  $n$ .

Pairing de Weil  $e_l : A[l] \times A^\vee[l] \rightarrow \mu_l$

Supongamos que  $A$  está principalmente polarizada,  $\lambda : A \rightarrow A^\vee$  isomorfismo.

$$e_l : A[l] \times A[l] \rightarrow \mu_l$$

es un pairing no degenerado, alternado y compatible por la acción de Galois.

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(\bar{K}|K) \rightarrow \text{GSp}_{2n}(\mathbb{F}_l) \subset \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_l).$$

# Introducción

**Teorema (Serre).** Sea  $A$  una variedad abeliana de dimensión  $n$  sobre un cuerpo de números  $K$ , principalmente polarizada, tal que  $\text{End}(A) = \mathbb{Z}$ , y sea  $n = 2, 6$  o  $n$  impar. Entonces

$$\text{Im } \bar{\rho}_l = \text{GSp}_{2n}(\mathbb{F}_l) \text{ para valores de } l \text{ suficientemente grandes .}$$

# Introducción

Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2.

# Introducción

---

Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2.  
Sea  $A = J(C)$ .

# Introducción

---

Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2.  
Sea  $A = J(C)$ .

Tomemos un primo  $l$ . ¿Se verifica  $\text{Im } \bar{\rho}_l = \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l)$ ?

# Introducción

---

Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2.  
Sea  $A = J(C)$ .

Tomemos un primo  $l$ . ¿Se verifica  $\text{Im } \bar{\rho}_l = \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l)$ ?

Luis V. Dieulefait, *Explicit Determination of the Images of the Galois Representations Attached to Abelian Surfaces with  $\text{End}(A) = \mathbb{Z}$* .  
Experimental Mathematics **11**, 503–512 (2002).

# Introducción

---

Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2.  
Sea  $A = J(C)$ .

Tomemos un primo  $l$ . ¿Se verifica  $\text{Im } \bar{\rho}_l = \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l)$ ?

Luis V. Dieulefait, *Explicit Determination of the Images of the Galois Representations Attached to Abelian Surfaces with  $\text{End}(A) = \mathbb{Z}$* .  
Experimental Mathematics **11**, 503–512 (2002).

- El conductor de una curva y de una variedad abeliana.



# Introducción

---

Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2.  
Sea  $A = J(C)$ .

Tomemos un primo  $l$ . ¿Se verifica  $\text{Im } \bar{\rho}_l = \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l)$ ?

Luis V. Dieulefait, *Explicit Determination of the Images of the Galois Representations Attached to Abelian Surfaces with  $\text{End}(A) = \mathbb{Z}$* .  
Experimental Mathematics **11**, 503–512 (2002).

- El conductor de una curva y de una variedad abeliana.
- El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal

# Introducción

---

Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2.  
Sea  $A = J(C)$ .

Tomemos un primo  $l$ . ¿Se verifica  $\text{Im } \bar{\rho}_l = \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l)$ ?

Luis V. Dieulefait, *Explicit Determination of the Images of the Galois Representations Attached to Abelian Surfaces with  $\text{End}(A) = \mathbb{Z}$* .  
Experimental Mathematics **11**, 503–512 (2002).

- El conductor de una curva y de una variedad abeliana.
- El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal
- Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

Sea  $p \neq l$  un número primo.

**Notación.**  $K_v | \mathbb{Q}_p$  extensión finita,  $v$  la extensión de la valoración  $p$ -ádica, normalizada,  $R_v \subset K_v$  el anillo de la valoración  $v$ ,  $\bar{v}$  a la extensión de  $v$  a  $\overline{K}_v$ .

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

Sea  $p \neq l$  un número primo.

**Notación.**  $K_v | \mathbb{Q}_p$  extensión finita,  $v$  la extensión de la valoración  $p$ -ádica, normalizada,  $R_v \subset K_v$  el anillo de la valoración  $v$ ,  $\bar{v}$  a la extensión de  $v$  a  $\bar{K}_v$ .

$$\text{Gal}(\bar{K}_v | K_v)$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

Sea  $p \neq l$  un número primo.

**Notación.**  $K_v | \mathbb{Q}_p$  extensión finita,  $v$  la extensión de la valoración  $p$ -ádica, normalizada,  $R_v \subset K_v$  el anillo de la valoración  $v$ ,  $\bar{v}$  a la extensión de  $v$  a  $\bar{K}_v$ .

$$\text{Gal}(\bar{K}_v | K_v)$$

$$I_p = \{ \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}_v | K_v) : \bar{v}(\sigma(x) - x) > 0 \text{ para todo } x \in R_v \}$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

Sea  $p \neq l$  un número primo.

**Notación.**  $K_v | \mathbb{Q}_p$  extensión finita,  $v$  la extensión de la valoración  $p$ -ádica, normalizada,  $R_v \subset K_v$  el anillo de la valoración  $v$ ,  $\bar{v}$  a la extensión de  $v$  a  $\bar{K}_v$ .

$$I_p \subset \text{Gal}(\bar{K}_v | K_v)$$

$$I_p = \{ \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}_v | K_v) : \bar{v}(\sigma(x) - x) > 0 \text{ para todo } x \in R_v \}$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

Sea  $p \neq l$  un número primo.

**Notación.**  $K_v | \mathbb{Q}_p$  extensión finita,  $v$  la extensión de la valoración  $p$ -ádica, normalizada,  $R_v \subset K_v$  el anillo de la valoración  $v$ ,  $\bar{v}$  a la extensión de  $v$  a  $\bar{K}_v$ .

$$I_p \subset \text{Gal}(\bar{K}_v | K_v)$$

$$I_p = \{ \sigma \in \text{Gal}(\bar{K}_v | K_v) : \bar{v}(\sigma(x) - x) > 0 \text{ para todo } x \in R_v \}$$

¿Cómo es la restricción de  $\bar{\rho}_l$  a  $I_p$ ? Queremos definir un número  $f$ , asociado a  $A$ , que cuantifique la acción de  $I_p$  sobre  $E[l]$ .

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

**Módulo de Tate**  $T_l(A) := \varprojlim_n A[l^n]$



# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

**Módulo de Tate**       $T_l(A) := \varprojlim_n A[l^n]$



$$\rho_l : \text{Gal}(\overline{K_v} | K_v) \rightarrow \text{Aut}(T_l(A)) \simeq \text{GL}_{2n}(\mathbb{Z}_l)$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

**Módulo de Tate**  $T_l(A) := \varprojlim_n A[l^n]$



$$\rho_l : \text{Gal}(\overline{K}_v | K_v) \rightarrow \text{Aut}(T_l(A)) \simeq \text{GL}_{2n}(\mathbb{Z}_l)$$

$$V_l(A) = T_l(A) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$$

$$\rho_l : \text{Gal}(\overline{K}_v | K_v) \rightarrow \text{Aut}(V_l(A)) \simeq \text{GL}_{2n}(\mathbb{Q}_l)$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

Queremos medir el tamaño de  $\rho_l(I_p)$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

Queremos medir el tamaño de  $\rho_l(I_p)$

$$V_l(A)^{I_p} = \{v \in V_l(A) : \rho_l(\sigma)(v) = v \text{ para todo } \sigma \in I_p\}$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

Queremos medir el tamaño de  $\rho_l(I_p)$

$$V_l(A)^{I_p} = \{v \in V_l(A) : \rho_l(\sigma)(v) = v \text{ para todo } \sigma \in I_p\}$$

**Definición.** Sea  $K_v$  una extensión finita de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $l$  un número primo distinto de  $p$  y  $A/K_v$  una variedad abeliana. Se define el *exponente del conductor moderado* de  $A$  como

$$\varepsilon(A/K_v) = \dim V_l(A) - \dim V_l(A)^{I_p}.$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$$I_p = \{\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}_v|K_v) : \bar{v}(\sigma(x) - x) > 0 \text{ para todo } x \in R_v\}$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$$I_p = \{\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}_v|K_v) : \bar{v}(\sigma(x) - x) > 0 \text{ para todo } x \in R_v\}$$

$L_w|K_v$  extensión finita de Galois.

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$$I_p = \{\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}_v|K_v) : \bar{v}(\sigma(x) - x) > 0 \text{ para todo } x \in R_v\}$$

$L_w|K_v$  extensión finita de Galois.

- $w$ , extensión a  $L_w$  de la valoración  $p$ -ádica, normalizada.
- $R_w \subset L$ , anillo de valoración de  $w$ .



# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$$I_p = \{\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}_v|K_v) : \bar{v}(\sigma(x) - x) > 0 \text{ para todo } x \in R_v\}$$

$L_w|K_v$  extensión finita de Galois.

- $w$ , extensión a  $L_w$  de la valoración  $p$ -ádica, normalizada.
- $R_w \subset L$ , anillo de valoración de  $w$ .

**Definición.** Se define el  $i$ -ésimo grupo de ramificación superior de la extensión  $L_w|K_v$  como

$$G_i = \{\sigma \in \text{Gal}(L_w|K_v) \text{ tales que } w(\sigma(x) - x) \geq i + 1 \text{ para todo } x \in R_w\}$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$$I_p = \{\sigma \in \text{Gal}(\overline{K}_v|K_v) : \bar{v}(\sigma(x) - x) > 0 \text{ para todo } x \in R_v\}$$

$L_w|K_v$  extensión finita de Galois.

- $w$ , extensión a  $L_w$  de la valoración  $p$ -ádica, normalizada.
- $R_w \subset L$ , anillo de valoración de  $w$ .

**Definición.** Se define el  $i$ -ésimo grupo de ramificación superior de la extensión  $L_w|K_v$  como

$$G_i = \{\sigma \in \text{Gal}(L_w|K_v) \text{ tales que } w(\sigma(x) - x) \geq i + 1 \text{ para todo } x \in R_w\}$$

$$I_p = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_i \supset \cdots$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(L_w | K_v) \rightarrow \text{GL}(V)$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(L_w | K_v) \rightarrow \text{GL}(V)$$

- $V$ ,  $\mathbb{F}_l$ -espacio vectorial de dimensión finita.

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(L_w|K_v) \rightarrow \text{GL}(V)$$

- $V$ ,  $\mathbb{F}_l$ -espacio vectorial de dimensión finita.
- $V_i := V^{G_i} = \{v \in V : \bar{\rho}_l(\sigma)(v) = v \text{ para todo } \sigma \in G_i\}$ .
- $g_i = \text{card}(G_i)$ .

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(L_w|K_v) \rightarrow \text{GL}(V)$$

- $V$ ,  $\mathbb{F}_l$ -espacio vectorial de dimensión finita.
- $V_i := V^{G_i} = \{v \in V : \bar{\rho}_l(\sigma)(v) = v \text{ para todo } \sigma \in G_i\}$ .
- $g_i = \text{card}(G_i)$ .

**Definición.** Se define el *exponente del conductor de Swan* de  $\bar{\rho}_l$  como

$$\text{sw}(\bar{\rho}_l) = \sum_{i \geq 1} \frac{g_i}{g_0} \dim_{\mathbb{F}_l}(V/V_i).$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$A/K_v, l \neq p.$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$A/K_v, l \neq p.$

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(\bar{K}_v | K_v) \rightarrow \text{GL}(A[l]) \simeq \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_l).$$



# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$A/K_v, l \neq p.$

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(\bar{K}_v|K_v) \rightarrow \text{GL}(A[l]) \simeq \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_l).$$

$K_v(A[l]) := K_v(\text{coordenadas de los puntos de } l\text{-torsión de } A)$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$A/K_v, l \neq p.$

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(K_v(A[l])|K_v) \rightarrow \text{GL}(A[l]) \simeq \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_l).$$

$K_v(A[l]) := K_v(\text{coordenadas de los puntos de } l\text{-torsión de } A)$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$A/K_v, l \neq p.$

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(K_v(A[l])|K_v) \rightarrow \text{GL}(A[l]) \simeq \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_l).$$

$K_v(A[l]) := K_v(\text{coordenadas de los puntos de } l\text{-torsión de } A)$

**Definición.** Sea  $K_v$  una extensión finita de  $\mathbb{Q}_p$ , y sea  $A$  una variedad abeliana definida sobre  $K_v$ . Se define el *exponente del conductor* de  $A$  como

$$f(A/K_v) = \varepsilon(A/K_v) + \text{sw}(\bar{\rho}_l),$$

donde  $l$  es un primo distinto de  $p$ .

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$A/K_v, l \neq p.$

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(K_v(A[l])|K_v) \rightarrow \text{GL}(A[l]) \simeq \text{GL}_{2n}(\mathbb{F}_l).$$

$K_v(A[l]) := K_v(\text{coordenadas de los puntos de } l\text{-torsión de } A)$

**Definición.** Sea  $K_v$  una extensión finita de  $\mathbb{Q}_p$ , y sea  $A$  una variedad abeliana definida sobre  $K_v$ . Se define el *exponente del conductor* de  $A$  como

$$f(A/K_v) = \varepsilon(A/K_v) + \text{sw}(\bar{\rho}_l),$$

donde  $l$  es un primo distinto de  $p$ .

- Esta definición no depende del primo  $l \neq p$  escogido.
- El conductor de una variedad abeliana es un número entero mayor o igual que 0.

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

$A/\mathbb{Q}$ .

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$A/\mathbb{Q}$ .

Se define el *conductor* de  $A$  como el producto

$$f(A/\mathbb{Q}) = \prod_{p \text{ primo}} p^{f(A/\mathbb{Q}_p)}.$$

# **El conductor de una curva y de una variedad abeliana.**

---

$C/K_v$  lisa, geoméricamente conexa, de género  $g \geq 1$ ,  $l \neq p$ .

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

$C/K_v$  lisa, geoméricamente conexa, de género  $g \geq 1$ ,  $l \neq p$ .

$$\rho_l : \text{Gal}(\overline{K}_v | K_v) \rightarrow \text{Aut}(H_{\text{ét}}^1(C_{\overline{K}_v}, \mathbb{Q}_l))$$



# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

$C/K_v$  lisa, geoméricamente conexa, de género  $g \geq 1$ ,  $l \neq p$ .

$$\rho_l : \text{Gal}(\overline{K}_v | K_v) \rightarrow \text{Aut}(H_{\text{ét}}^1(C_{\overline{K}_v}, \mathbb{Q}_l))$$



$$f(C/K_v)$$

# El conductor de una curva y de una variedad abeliana.

---

$C/K_v$  lisa, geoméricamente conexa, de género  $g \geq 1$ ,  $l \neq p$ .

$$\rho_l : \text{Gal}(\overline{K}_v | K_v) \rightarrow \text{Aut}(H_{\text{ét}}^1(C_{\overline{K}_v}, \mathbb{Q}_l))$$



$$f(C/K_v)$$

$$f(C/K_v) = f(J(C)/K_v)$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$C/K_v$  lisa, geoméricamente conexa, de género  $g \geq 1$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$C/K_v$  lisa, geoméricamente conexa, de género  $g \geq 1$



$f(C/K_v)$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$C/K_v$  lisa, geoméricamente conexa, de género  $g \geq 1$



$$f(C/K_v)$$

¿Cómo lo podemos calcular?

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

Curvas elípticas ( $g = 1$ )

$$E/K_v$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

Curvas elípticas ( $g = 1$ )

$E/K_v$

Fórmula de Ogg  $f(E/K_v) = v(\Delta_0(E)) + 1 - m$

donde  $m$  es el número de componentes irreducibles de la fibra especial del model de Néron de  $E/K_v$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

Curvas elípticas ( $g = 1$ )

$E/K_v$

Fórmula de Ogg  $f(E/K_v) = v(\Delta_0(E)) + 1 - m$

donde  $m$  es el número de componentes irreducibles de la fibra especial del model de Néron de  $E/K_v$ .

¿Qué ocurre cuando  $g = 2$ ?



# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Definición.** Una *ecuación entera* de  $C/K_v$  es una ecuación

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

donde  $Q(x), P(x) \in R_v[x]$ ,  $\deg(Q) \leq 3$ ,  $\deg(P) \leq 6$ , tal que  $\{1, y\}$  es una base de la clausura entera de  $R_v[x]$  en  $K_v(C)$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Definición.** Una ecuación de  $C/K_v$  es una ecuación

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

donde  $Q(x), P(x) \in K_v[x]$ ,  $\deg(Q) \leq 3$ ,  $\deg(P) \leq 6$ , tal que  $\text{Spec}K_v[x, y]/\langle y^2 + Q(x)y - P(x) \rangle$  sea isomorfo a un abierto de  $C$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Definición.** Una *ecuación* de  $C/K_v$  es una ecuación

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

donde  $Q(x), P(x) \in K_v[x]$ ,  $\deg(Q) \leq 3$ ,  $\deg(P) \leq 6$ , tal que  $\text{Spec}K_v[x, y]/\langle y^2 + Q(x)y - P(x) \rangle$  sea isomorfo a un abierto de  $C$ .

$$\omega_1 = \frac{dx}{2y + Q(x)}, \quad \omega_2 = \frac{x dx}{2y + Q(x)},$$

formas diferenciales holomorfas en  $C$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Definición.** Una *ecuación* de  $C/K_v$  es una ecuación

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

donde  $Q(x), P(x) \in K_v[x]$ ,  $\deg(Q) \leq 3$ ,  $\deg(P) \leq 6$ , tal que  $\text{Spec}K_v[x, y]/\langle y^2 + Q(x)y - P(x) \rangle$  sea isomorfo a un abierto de  $C$ .

$$\omega_1 = \frac{dx}{2y + Q(x)}, \quad \omega_2 = \frac{x dx}{2y + Q(x)},$$

formas diferenciales holomorfas en  $C$ .

$\{\omega_1, \omega_2\}$  es una base de  $H^0(C, \Omega_{C/K_v}^1)$  sobre  $K_v$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$\mathcal{C}_{\min}$ , modelo minimal regular de  $C$ ,

$\omega_{\mathcal{C}_{\min}/\text{Spec}R_v}$ , haz dualizante

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$\mathfrak{C}_{\min}$ , modelo minimal regular de  $C$ ,

$\omega_{\mathfrak{C}_{\min}/\text{Spec}R_v}$ , haz dualizante

$$H^0(\mathfrak{C}_{\min}, \omega_{\mathfrak{C}_{\min}/\text{Spec}R_v}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, \Omega_{C/K_v}^1).$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$\mathfrak{C}_{\min}$ , modelo minimal regular de  $C$ ,

$\omega_{\mathfrak{C}_{\min}/\text{Spec}R_v}$ , haz dualizante

$$H^0(\mathfrak{C}_{\min}, \omega_{\mathfrak{C}_{\min}/\text{Spec}R_v}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, \Omega_{C/K_v}^1).$$

**Definición.** Una *ecuación minimal* de  $C$  es una ecuación hiperelíptica tal que  $\{\omega_1, \omega_2\}$  es una base del  $R$ -módulo

$$H^0(\mathfrak{C}_{\min}, \omega_{\mathfrak{C}_{\min}/\text{Spec}R_v}).$$

El *discriminante minimal*  $\Delta_{\min}(C)$  de  $C$  es el discriminante de una ecuación minimal de  $C$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

- $v(\Delta_{\min}(C)) \geq 0$ .



# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

- $v(\Delta_{\min}(C)) \geq 0$ .
- $\Delta_0(C)$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

- $v(\Delta_{\min}(C)) \geq 0.$

- $\Delta_0(C)$

$$v(\Delta) \geq v(\Delta_{\min}(C))$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

- $v(\Delta_{\min}(C)) \geq 0.$

- $\Delta_0(C)$

$$v(\Delta_0(C)) \geq v(\Delta_{\min}(C))$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

- $v(\Delta_{\min}(C)) \geq 0.$

- $\Delta_0(C)$

$$v(\Delta_0(C)) \geq v(\Delta_{\min}(C))$$

Si  $C$  admite una ecuación minimal entera,

$$v(\Delta_0(C)) = v(\Delta_{\min}(C))$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$$R_v^{\text{sh}}, \quad K_v^{\text{sh}}, \quad C' = C \times_{K_v} K_v^{\text{sh}}, \quad \mathfrak{e}'_{\text{min}}.$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$$R_v^{\text{sh}}, \quad K_v^{\text{sh}}, \quad C' = C \times_{K_v} K_v^{\text{sh}}, \quad \mathfrak{C}'_{\text{min}}.$$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathfrak{C}'_{\text{min},p}$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$$R_v^{\text{sh}}, \quad K_v^{\text{sh}}, \quad C' = C \times_{K_v} K_v^{\text{sh}}, \quad \mathcal{E}'_{\text{min}}.$$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{E}'_{\text{min},p}$ .

$$E = \{\Gamma_i : p_a(\Gamma_i) = 0, \Gamma_i^2 = -2\}$$

$\Rightarrow \pi : \mathcal{E}'_{\text{min}} \rightarrow \mathcal{E}'_{\text{can}}$  morfismo de contracción.

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$$R_v^{\text{sh}}, \quad K_v^{\text{sh}}, \quad C' = C \times_{K_v} K_v^{\text{sh}}, \quad \mathcal{C}'_{\text{min}}.$$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{C}'_{\text{min},p}$ .

$$E = \{\Gamma_i : p_a(\Gamma_i) = 0, \Gamma_i^2 = -2\}$$

$\Rightarrow \pi : \mathcal{C}'_{\text{min}} \rightarrow \mathcal{C}'_{\text{can}}$  morfismo de contracción.

$\sigma$ , involución hiperelíptica



# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$$R_v^{\text{sh}}, \quad K_v^{\text{sh}}, \quad C' = C \times_{K_v} K_v^{\text{sh}}, \quad \mathcal{E}'_{\text{min}}.$$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{E}'_{\text{min},p}$ .

$$E = \{\Gamma_i : p_a(\Gamma_i) = 0, \Gamma_i^2 = -2\}$$

$\Rightarrow \pi : \mathcal{E}'_{\text{min}} \rightarrow \mathcal{E}'_{\text{can}}$  morfismo de contracción.

$\sigma$ , involución hiperelíptica

$$\mathfrak{Z} = \mathcal{E}'_{\text{can}} / \langle \sigma \rangle$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$$R_v^{\text{sh}}, \quad K_v^{\text{sh}}, \quad C' = C \times_{K_v} K_v^{\text{sh}}, \quad \mathcal{C}'_{\text{min}}.$$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{C}'_{\text{min},p}$ .

$$E = \{\Gamma_i : p_a(\Gamma_i) = 0, \Gamma_i^2 = -2\}$$

$\Rightarrow \pi : \mathcal{C}'_{\text{min}} \rightarrow \mathcal{C}'_{\text{can}}$  morfismo de contracción.

$\sigma$ , involución hiperelíptica

$$\mathfrak{Z} = \mathcal{C}'_{\text{can}} / \langle \sigma \rangle$$

$\tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$ , desingularización minimal

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

$$R_v^{\text{sh}}, \quad K_v^{\text{sh}}, \quad C' = C \times_{K_v} K_v^{\text{sh}}, \quad \mathcal{E}'_{\text{min}}.$$

$\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{E}'_{\text{min},p}$ .

$$E = \{\Gamma_i : p_a(\Gamma_i) = 0, \Gamma_i^2 = -2\}$$

$\Rightarrow \pi : \mathcal{E}'_{\text{min}} \rightarrow \mathcal{E}'_{\text{can}}$  morfismo de contracción.

$\sigma$ , involución hiperelíptica

$$\mathfrak{Z} = \mathcal{E}'_{\text{can}} / \langle \sigma \rangle$$

$\tilde{\mathfrak{Z}} \rightarrow \mathfrak{Z}$ , desingularización minimal

$d$ , número de componentes conexas de la fibra especial  $\tilde{\mathfrak{Z}}_\eta$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Teorema.** Sea  $C/K_v$ , lisa y proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2. Entonces el exponente del conductor  $f$  de  $C/K_v$  se expresa como

$$f(C/K_v) = v(\Delta_{\min}) - \frac{d-1}{2} - n + 1.$$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Teorema.** Sea  $C/K_v$ , lisa y proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2. Entonces el exponente del conductor  $f$  de  $C/K_v$  se expresa como

$$f(C/K_v) = v(\Delta_{\min}) - \frac{d-1}{2} - n + 1.$$

Recordemos:

- $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{C}'_{\min, p}$ .
- $d$ , número de componentes conexas de la fibra especial  $\tilde{\mathfrak{Z}}_s$ .

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Teorema.** Sea  $C/K_v$ , lisa y proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2. Entonces el exponente del conductor  $f$  de  $C/K_v$  se expresa como

$$f(C/K_v) = v(\Delta_{\min}) - \frac{d-1}{2} - n + 1.$$

Recordemos:

- $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{C}'_{\min, p}$ .
- $d$ , número de componentes conexas de la fibra especial  $\tilde{\mathfrak{Z}}_s$ .

Cuando  $p \neq 2$ ,  $d$  está completamente determinado por:

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Teorema.** Sea  $C/K_v$ , lisa y proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2. Entonces el exponente del conductor  $f$  de  $C/K_v$  se expresa como

$$f(C/K_v) = v(\Delta_{\min}) - \frac{d-1}{2} - n + 1.$$

Recordemos:

- $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{C}'_{\min, p}$ .
- $d$ , número de componentes conexas de la fibra especial  $\tilde{\mathfrak{J}}_s$ .

Cuando  $p \neq 2$ ,  $d$  está completamente determinado por:

- Fibra especial  $\mathcal{C}'_{\min, p}$

# El conductor de una curva de género 2 y el discriminante minimal.

---

**Teorema.** Sea  $C/K_v$ , lisa y proyectiva, geoméricamente conexa, de género 2. Entonces el exponente del conductor  $f$  de  $C/K_v$  se expresa como

$$f(C/K_v) = v(\Delta_{\min}) - \frac{d-1}{2} - n + 1.$$

Recordemos:

- $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  a las componentes conexas de la fibra especial  $\mathcal{C}'_{\min, p}$ .
- $d$ , número de componentes conexas de la fibra especial  $\tilde{\mathfrak{Z}}_s$ .

Cuando  $p \neq 2$ ,  $d$  está completamente determinado por:

- Fibra especial  $\mathcal{C}'_{\min, p}$
- Número de componentes conexas de la reducción estable  $\tilde{\mathcal{C}}'$ .



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Problema.** Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, geoméricamente conexa, de género 2,  $J(C)/\mathbb{Q}$  su Jacobiana.

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Problema.** Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, geoméricamente conexa, de género 2,  $J(C)/\mathbb{Q}$  su Jacobiana.

Sea  $l$  un número primo y  $\bar{\rho}_l$  la representación de Galois asociada a los puntos de  $l$ -torsión de  $J(C)$ .

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Problema.** Sea  $C/\mathbb{Q}$  una curva lisa, geoméricamente conexa, de género 2,  $J(C)/\mathbb{Q}$  su Jacobiana.

Sea  $l$  un número primo y  $\bar{\rho}_l$  la representación de Galois asociada a los puntos de  $l$ -torsión de  $J(C)$ .

$$\text{¿ } \text{Im } \bar{\rho}_l = \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l) \text{?}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

- Elementos de Frobenius.

Sea  $p$  un número primo,  $\bar{v}_p | v_p$ .

$$1 \longrightarrow I_p \longrightarrow D_{\bar{v}_p}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p|\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

- Elementos de Frobenius.

Sea  $p$  un número primo,  $\bar{v}_p | v_p$ .

$$1 \longrightarrow I_p \longrightarrow D_{\bar{v}_p}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p|\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

$$\phi_p$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

- Elementos de Frobenius.

Sea  $p$  un número primo,  $\bar{v}_p | v_p$ .

$$1 \longrightarrow I_p \longrightarrow D_{\bar{v}_p}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p|\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

$$\text{Frob}_p \longmapsto \phi_p$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

- Elementos de Frobenius.

Sea  $p$  un número primo,  $\bar{v}_p | v_p$ .

$$1 \longrightarrow I_p \longrightarrow D_{\bar{v}_p}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p|\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

$$\text{Frob}_p \longmapsto \phi_p$$

Si  $p \neq l$  tiene buena reducción  $\Rightarrow \bar{\rho}_l(\text{Frob}_p)$  está bien definido

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

- Elementos de Frobenius.

Sea  $p$  un número primo,  $\bar{v}_p | v_p$ .

$$1 \longrightarrow I_p \longrightarrow D_{\bar{v}_p}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p|\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

$$\text{Frob}_p \longmapsto \phi_p$$

Si  $p \neq l$  tiene buena reducción  $\Rightarrow \bar{\rho}_l(\text{Frob}_p)$  está bien definido

$$\text{Pol}_p(x) = x^4 - a_p x^3 + b_p x^2 - p a_p x + p^2$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

- Elementos de Frobenius.

Sea  $p$  un número primo,  $\bar{v}_p | v_p$ .

$$1 \longrightarrow I_p \longrightarrow D_{\bar{v}_p}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_p|\mathbb{F}_p) \longrightarrow 1$$

$$\text{Frob}_p \longmapsto \phi_p$$

Si  $p \neq l$  tiene buena reducción  $\Rightarrow \bar{\rho}_l(\text{Frob}_p)$  está bien definido

$$\text{Pol}_p(x) = x^4 - a_p x^3 + b_p x^2 - p a_p x + p^2$$

Si  $\text{Im } \bar{\rho}_l \neq \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l) \Rightarrow \text{¿}a_p\text{?, ¿}b_p\text{?}$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

- Elementos de Frobenius.

Si  $p \neq l$  tiene buena reducción  $\Rightarrow \bar{\rho}_l(\text{Frob}_p)$  está bien definido

$$\text{Pol}_p(x) = x^4 - a_p x^3 + b_p x^2 - p a_p x + p^2$$

Si  $\text{Im } \bar{\rho}_l \neq \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l) \Rightarrow \text{¿}a_p\text{?, ¿}b_p\text{?}$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

- Elementos de Frobenius.

Si  $p \neq l$  tiene buena reducción  $\Rightarrow \bar{\rho}_l(\text{Frob}_p)$  está bien definido

$$\text{Pol}_p(x) = x^4 - a_p x^3 + b_p x^2 - p a_p x + p^2$$

Si  $\text{Im } \bar{\rho}_l \neq \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l) \Rightarrow \text{¿}a_p\text{?, ¿}b_p\text{?}$

$$\begin{cases} a_p = p + 1 - N_1 \\ b_p = (N_1^2 + N_2)/2 + p - N_1 - pN_1, \end{cases}$$

donde

$$N_1 = \text{card}(\tilde{C}(\mathbb{F}_p))$$

$$N_2 = \text{card}(\tilde{C}(\mathbb{F}_{p^2}))$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

{  
Caso  
reducible  
  
Caso  
irreducible

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

Caso  
reducible

Caso  
irreducible

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

Caso  
reducible

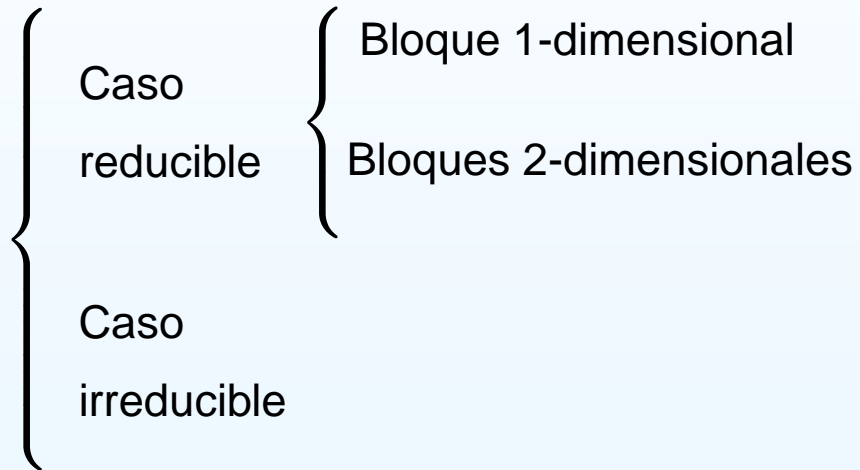
Caso  
irreducible

$$\left( \begin{array}{c|ccc} a & * & * & * \\ \hline & & A & \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c|cc} * & * & * \\ \hline A_1 & * & * \\ \hline & & A_2 \end{array} \right)$$

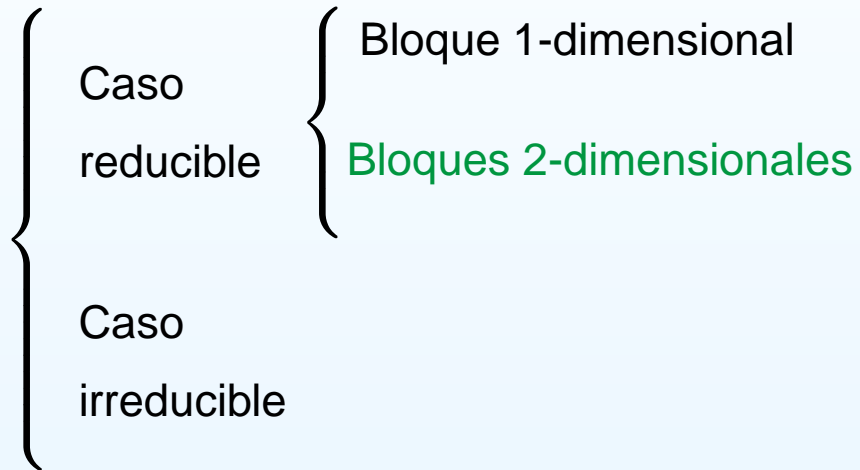
# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

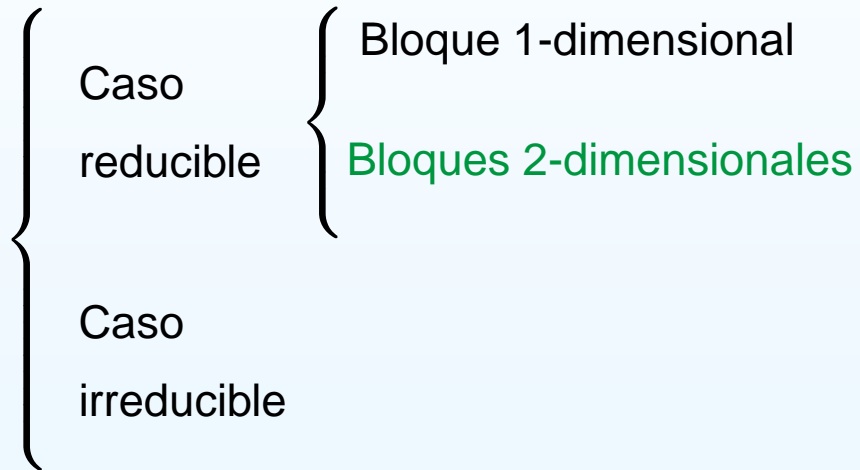
---





# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

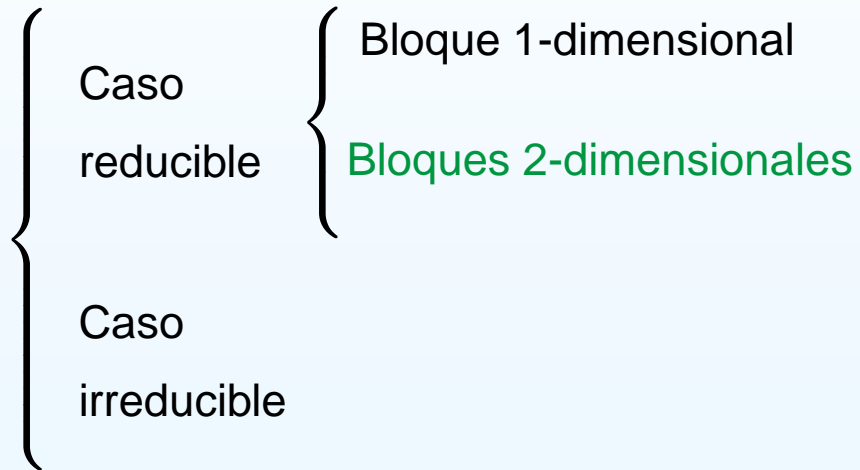
---



$$\text{Pol}_p(x) = x^4 - a_p x^3 + b_p x^2 - p a_p x + p^2$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

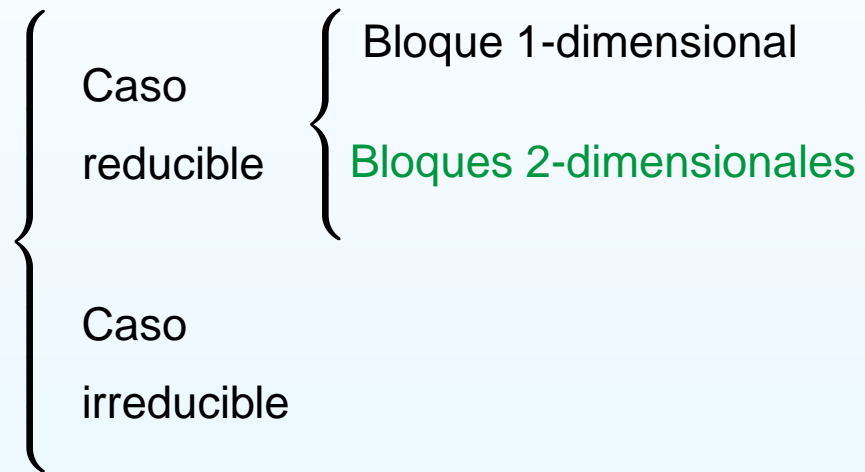


$$\text{Pol}_p(x) = x^4 - a_p x^3 + b_p x^2 - p a_p x + p^2$$

Raíces de  $\text{Pol}_p(x)$  :  $\alpha, \beta, p/\alpha, p/\beta$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

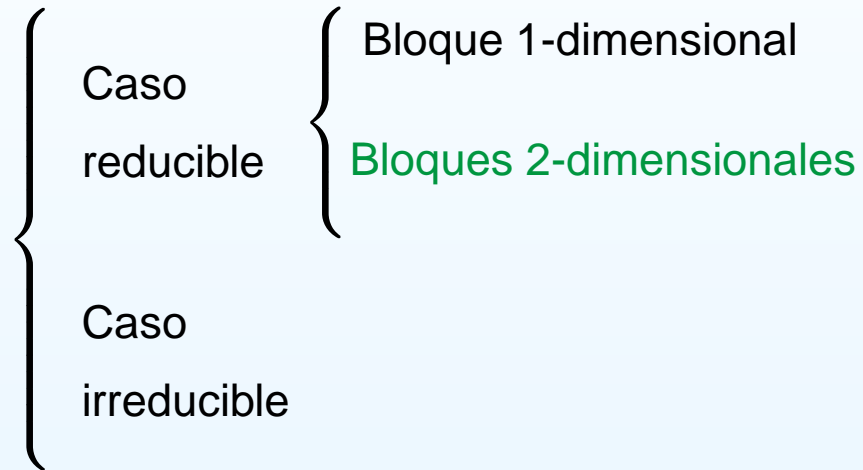
---



$$\left( \begin{array}{c|cc} & * & * \\ A_1 & * & * \\ \hline & & A_2 \end{array} \right)$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

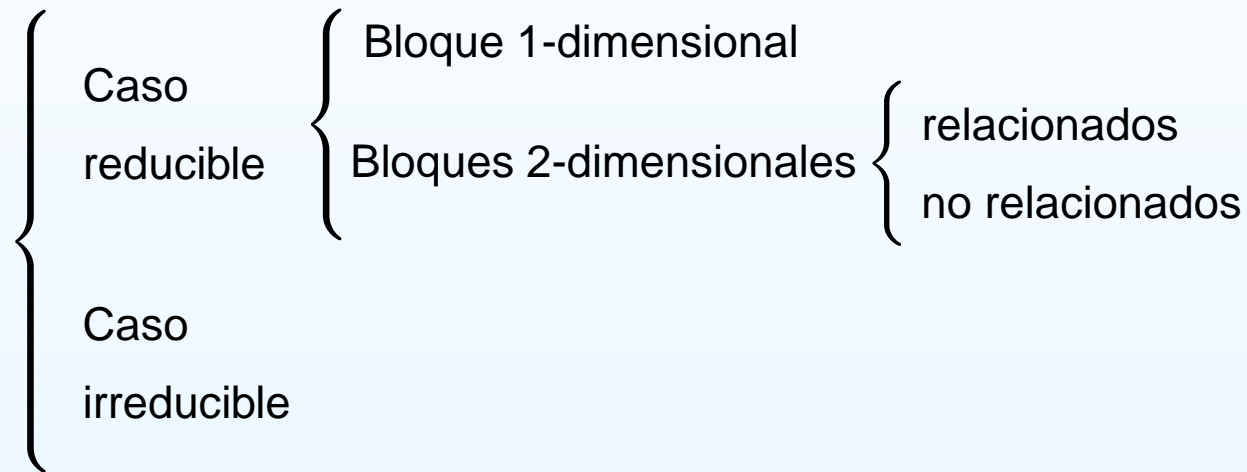


$$\left( \begin{array}{c|cc} & * & * \\ \hline A_1 & * & * \\ \hline & & A_2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l|l} A_1 \sim \{\alpha, \beta\} & A_1 \sim \{\alpha, p/\alpha\} \\ A_2 \sim \{p/\alpha, p/\beta\} & A_2 \sim \{\beta, p/\beta\} \end{array}$$

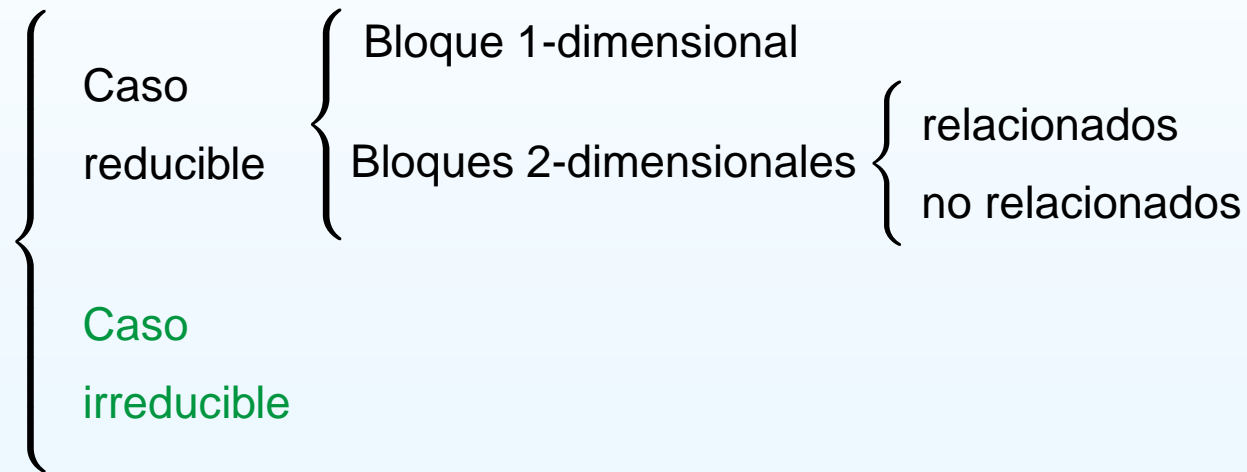
# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---



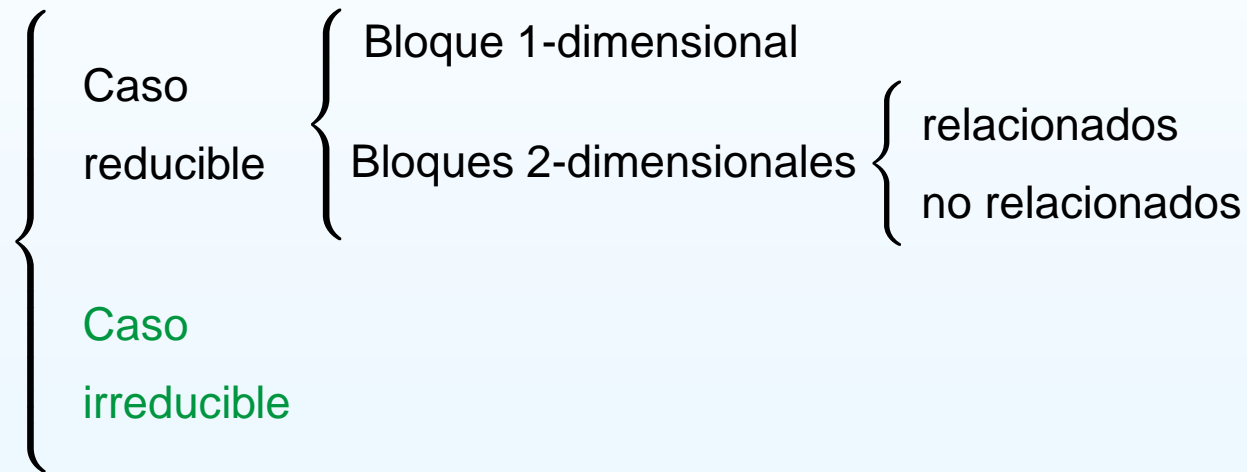
# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

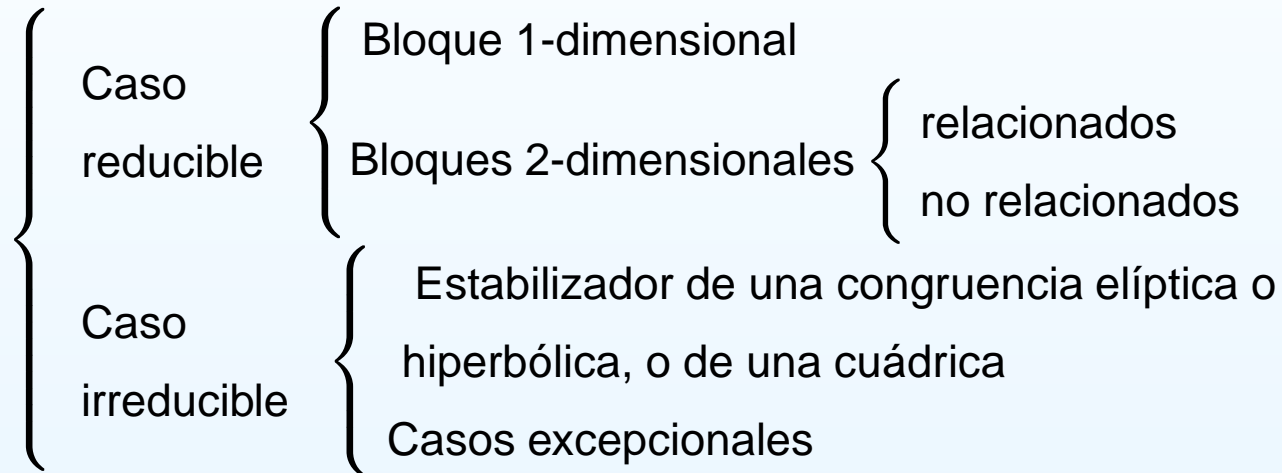
---



Clasificación de Mitchell de los subgrupos maximales propios de  $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_l)$ .

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

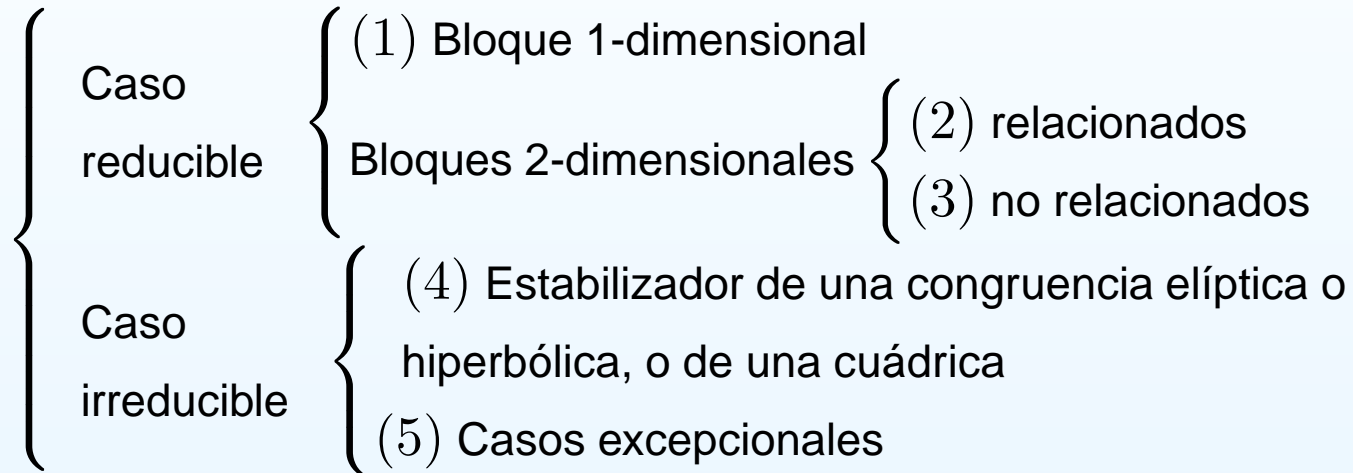
---





# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

Procedimiento general

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

Caso (1):  $\rightsquigarrow$

$$\left( \begin{array}{c|c} \varepsilon_l \cdot \chi_l^i & \\ \hline & A \end{array} \right)$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

Caso (2):  $\rightsquigarrow$

$$\left( \begin{array}{c|cc} & * & * \\ \hline A_1 & * & * \\ \hline & & A_2 \end{array} \right)$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

Caso (2):  $\rightsquigarrow$

$$\left( \begin{array}{c|cc} & * & * \\ \hline A_1 & * & * \\ \hline & & A_2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} \det A_1 = \varepsilon_l \cdot \chi_l^2, & \det A_2 = \varepsilon_l^{-1} \\ \det A_1 = \varepsilon_l \cdot \chi_l, & \det A_2 = \varepsilon_l^{-1} \cdot \chi_l \end{cases}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l \subset G$ , donde

$$1 \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow 1$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l \subset G$ , donde

$$1 \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow 1$$

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\rho}_l} \text{Im } \bar{\rho}_l \subset G \longrightarrow G/M \simeq \{\pm 1\}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l \subset G$ , donde

$$1 \rightarrow M \rightarrow G \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow 1$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \varepsilon_l & & \\ & & \curvearrowright & & \\ \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\bar{\rho}_l} & \text{Im } \bar{\rho}_l \subset G & \longrightarrow & G/M \simeq \{\pm 1\} \end{array}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

La ramificación de  $\varepsilon_l$  está limitada por la ramificación de  $\overline{\rho}_l$ .

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

La ramificación de  $\varepsilon_l$  está limitada por la ramificación de  $\overline{\rho}_l$ .

$\overline{\rho}_l$  es no ramificada fuera de  $l \cdot N$ .

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

La ramificación de  $\varepsilon_l$  está limitada por la ramificación de  $\overline{\rho}_l$ .

$\overline{\rho}_l$  es no ramificada fuera de  $l \cdot N$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ramificación en } l \rightsquigarrow \text{Resultados de Raynaud.} \\ \text{Ramificación en } N \rightsquigarrow \text{Conductor de } A. \end{array} \right.$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Casos (1), (2), (4).

$$\varepsilon_l : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_l^*$$

La ramificación de  $\varepsilon_l$  está limitada por la ramificación de  $\overline{\rho}_l$ .

$\overline{\rho}_l$  es no ramificada fuera de  $l \cdot N$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ramificación en } l \rightsquigarrow \text{Resultados de Raynaud.} \\ \text{Ramificación en } N \rightsquigarrow \text{Conductor de } A. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \varepsilon_l \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Caso (3).

Supongamos que

$$\bar{\rho}_l \sim \left( \begin{array}{c|c} \pi_1 & * \\ \hline 0 & \pi_2 \end{array} \right),$$

donde  $\det \pi_1 = \det \pi_2 = \chi_l$ .

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Conjetura de Serre (versión fuerte).** Sea  $l$  un número primo impar, y

$$\bar{\rho}_l : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\bar{\mathbb{F}}_l)$$

una representación de Galois continua, impar e irreducible.

Sean  $k(\bar{\rho}_l)$ ,  $N(\bar{\rho}_l)$ ,  $\varepsilon(\bar{\rho}_l)$  el peso, nivel y carácter asociados a  $\bar{\rho}_l$ . Then  $\bar{\rho}_l$  es la representación asociada a una forma parabólica nueva, vector propio de los operadores de Hecke

$$f \in S_{k(\bar{\rho}_l)}(N(\bar{\rho}_l), \varepsilon(\bar{\rho}_l)).$$

La conjetura está demostrada cuando  $N$  es impar.



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

Supongamos que

$$\bar{\rho}_l \sim \left( \begin{array}{c|c} \pi_1 & * \\ \hline 0 & \pi_2 \end{array} \right),$$

where  $\det \pi_1 = \det \pi_2 = \chi_l$ .

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

Supongamos que

$$\bar{\rho}_l \sim \left( \begin{array}{c|c} \pi_1 & * \\ \hline 0 & \pi_2 \end{array} \right),$$

where  $\det \pi_1 = \det \pi_2 = \chi_l$ .

$k_1 = k_2 = 2, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, N_1 \cdot N_2 | f(C/\mathbb{Q})$ .

$$\Rightarrow f_1 \in S_2(N_1), f_2 \in S_2(N_2).$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

Supongamos que

$$\bar{\rho}_l \sim \left( \begin{array}{c|c} \pi_1 & * \\ \hline 0 & \pi_2 \end{array} \right),$$

where  $\det \pi_1 = \det \pi_2 = \chi_l$ .

$$k_1 = k_2 = 2, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, N_1 \cdot N_2 | f(C/\mathbb{Q}).$$

$$\Rightarrow f_1 \in S_2(N_1), f_2 \in S_2(N_2).$$

If  $p \neq l$  es un primo de buena reducción,

$$Pol_p(x) \equiv P_{f_1,p}(x) \cdot P_{f_2,p}(x) \pmod{l}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Caso (5).

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Caso (5).

$\text{Im } \bar{\rho}_l$  está contenida en un grupo excepcional.

⇒ Sus elementos son de orden pequeño.

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Caso (5).

$\text{Im } \bar{\rho}_l$  está contenida en un grupo excepcional.

⇒ Sus elementos son de orden pequeño.

⇒  $l$  es pequeño

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Procedimiento general

Caso (5).

$\text{Im } \bar{\rho}_l$  está contenida en un grupo excepcional.

⇒ Sus elementos son de orden pequeño.

⇒  $l$  es pequeño

Cuando  $l$  es pequeño, buscamos un primo  $p$  de buena reducción de forma que  $\bar{\rho}_l(\text{Frob}_p)$  tenga orden suficientemente grande.

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Ejemplo

$$C : y^2 = x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Ejemplo

$$C : y^2 = x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$f(C/\mathbb{Q}) = 2^* \cdot 587$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Ejemplo

$$C : y^2 = x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$f(C/\mathbb{Q}) = 2^* \cdot 587$$

$$y^2 + (x^3 + x + 1) \cdot y = -x^3 - x^2$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Ejemplo

$$C : y^2 = x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$f(C/\mathbb{Q}) = 2^* \cdot 587$$

$$y^2 + (x^3 + x + 1) \cdot y = -x^3 - x^2$$

$$\Delta = -587$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Ejemplo

$$C : y^2 = x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$y^2 + (x^3 + x + 1) \cdot y = -x^3 - x^2$$

$$\Delta = -587$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Ejemplo

$$C : y^2 = x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

$$f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$y^2 + (x^3 + x + 1) \cdot y = -x^3 - x^2$$

$$\Delta = -587$$

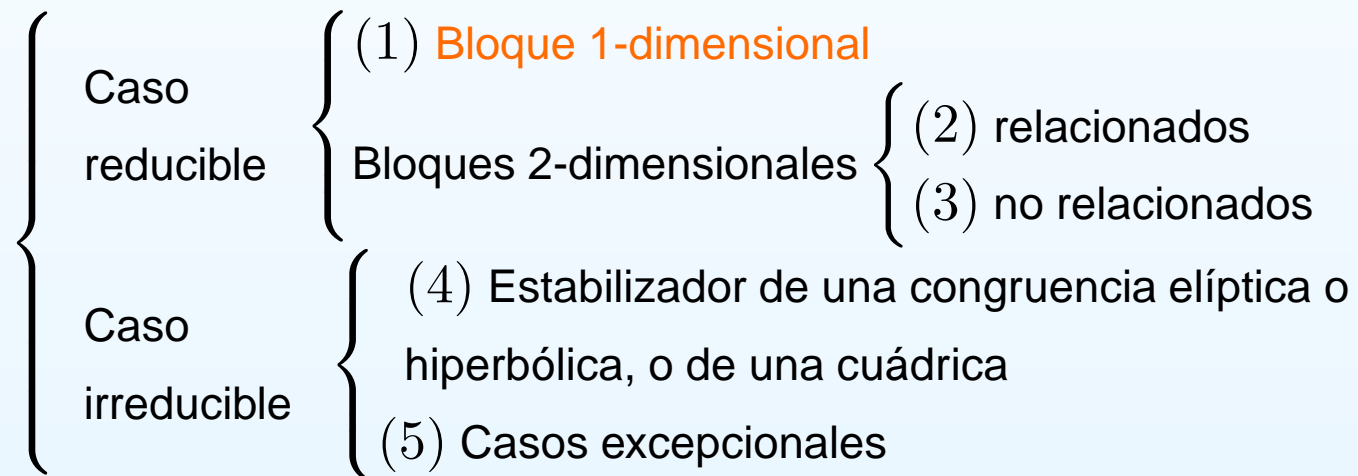
Sea  $l > 3, l \neq 587$ .

$$\text{¿ } \text{Im}(\bar{\rho}_l) = \text{GSp}_4(\mathbb{F}_l) \text{?}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (1):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

$$\left( \begin{array}{c|c} \mu & \\ \hline & A \end{array} \right)$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

$$\mu = \varepsilon_l \chi_l^i$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

$$\mu = \varepsilon_l \chi_l^i$$

$$\text{cond}(\varepsilon_l)^2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

$$\mu = \varepsilon_l \chi_l^i$$

$$\text{cond}(\varepsilon_l)^2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$\Rightarrow \varepsilon_l = \text{Id}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

$$\mu = \varepsilon_l \chi_l^i$$

$$\text{cond}(\varepsilon_l)^2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$\Rightarrow \varepsilon_l = \text{Id}$$

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$\text{Pol}_p(x) = x^4 - a_p x^3 + b_p x^2 - p a_p x + p^2$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

$$\mu = \varepsilon_l \chi_l^i$$

$$\text{cond}(\varepsilon_l)^2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$\Rightarrow \varepsilon_l = \text{Id}$$

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$\mu_l(\text{Frob}_p)^4 - a_p \mu_l(\text{Frob}_p)^3 + b_p \mu_l(\text{Frob}_p)^2 - p a_p \mu_l(\text{Frob}_p) + p^2 = 0$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

$$\mu = \varepsilon_l \chi_l^i$$

$$\text{cond}(\varepsilon_l)^2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$\Rightarrow \varepsilon_l = \text{Id}$$

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$\mu_l(\text{Frob}_p)^4 - a_p \mu_l(\text{Frob}_p)^3 + b_p \mu_l(\text{Frob}_p)^2 - p a_p \mu_l(\text{Frob}_p) + p^2 = 0$$

$$\mu(\text{Frob}_p) = \chi_l^i(\text{Frob}_p) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ p & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

$$\mu = \varepsilon_l \chi_l^i$$

$$\text{cond}(\varepsilon_l)^2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$\Rightarrow \varepsilon_l = \text{Id}$$

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{l}$$

$$\mu(\text{Frob}_p) = \chi_l^i(\text{Frob}_p) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \\ p & \text{si } i = 1 \end{cases}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{l}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (1):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{l}$$

Para  $p = 3$ ,  $a_p = -4$ ,  $b_p = 9$

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 = 35 \equiv 0 \pmod{l}$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{l}$$

Para  $p = 3$ ,  $a_p = -4$ ,  $b_p = 9$

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 = 35 \equiv 0 \pmod{l}$$

$$\Rightarrow l = 3, l = 5 \text{ ó } l = 7.$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{l}$$

Para  $p = 3$ ,  $a_p = -4$ ,  $b_p = 9$

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 = 35 \equiv 0 \pmod{l}$$

$$\Rightarrow l = 3, l = 5 \text{ ó } l = 7.$$

Para  $p = 19$ ,  $a_p = -7$ ,  $b_p = 31$

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 = 533 = 13 \cdot 41 \equiv 0 \pmod{l}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{l}$$

Para  $p = 3$ ,  $a_p = -4$ ,  $b_p = 9$

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 = 35 \equiv 0 \pmod{l}$$

$$\Rightarrow l = 3, l = 5 \text{ ó } l = 7.$$

Para  $p = 19$ ,  $a_p = -7$ ,  $b_p = 31$

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 = 533 = 13 \cdot 41 \equiv 0 \pmod{l}$$

$$\Rightarrow l = 19, l = 13 \text{ ó } l = 41.$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo Caso (1):**  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con un bloque 1-dimensional.

Para todo  $p \neq l, 587$ ,

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{l}$$

Para  $p = 3$ ,  $a_p = -4$ ,  $b_p = 9$

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 = 35 \equiv 0 \pmod{l}$$

$$\Rightarrow l = 3, l = 5 \text{ ó } l = 7.$$

Para  $p = 19$ ,  $a_p = -7$ ,  $b_p = 31$

$$b_p - a_p(p + 1) + p^2 + 1 = 533 = 13 \cdot 41 \equiv 0 \pmod{l}$$

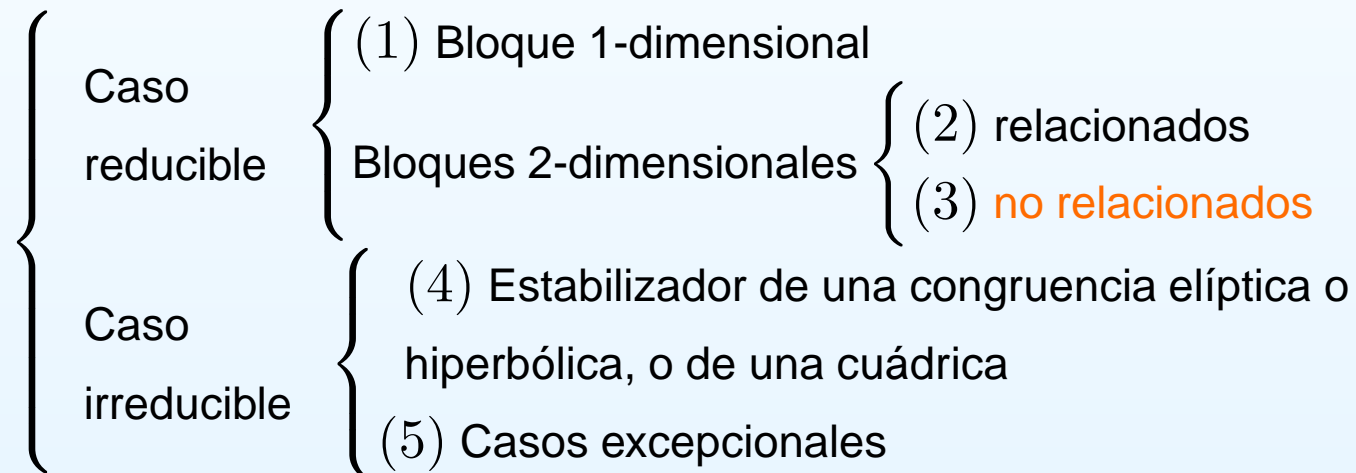
$$\Rightarrow l = 19, l = 13 \text{ ó } l = 41.$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (3):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con dos bloques 2-dimensionales no relacionados.



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (3):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con dos bloques 2-dimensionales no relacionados.

$$f_1 \in S_2(N_1), f_2 \in S_2(N_2)$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (3):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con dos bloques 2-dimensionales no relacionados.

$$f_1 \in S_2(N_1), f_2 \in S_2(N_2)$$

$$N_1 \cdot N_2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (3):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con dos bloques 2-dimensionales no relacionados.

$$f_1 \in S_2(N_1), f_2 \in S_2(N_2)$$

$$N_1 \cdot N_2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$N_1 = 1 \text{ ó } N_2 = 1$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (3):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con dos bloques 2-dimensionales no relacionados.

$$f_1 \in S_2(N_1), f_2 \in S_2(N_2)$$

$$N_1 \cdot N_2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$N_1 = 1 \text{ ó } N_2 = 1$$

Pero  $S_2(1) = 0$ .

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

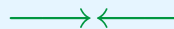
**Ejemplo** Caso (3):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no es reducible con dos bloques 2-dimensionales no relacionados.

$$f_1 \in S_2(N_1), f_2 \in S_2(N_2)$$

$$N_1 \cdot N_2 | f(C/\mathbb{Q}) = 587$$

$$N_1 = 1 \text{ ó } N_2 = 1$$

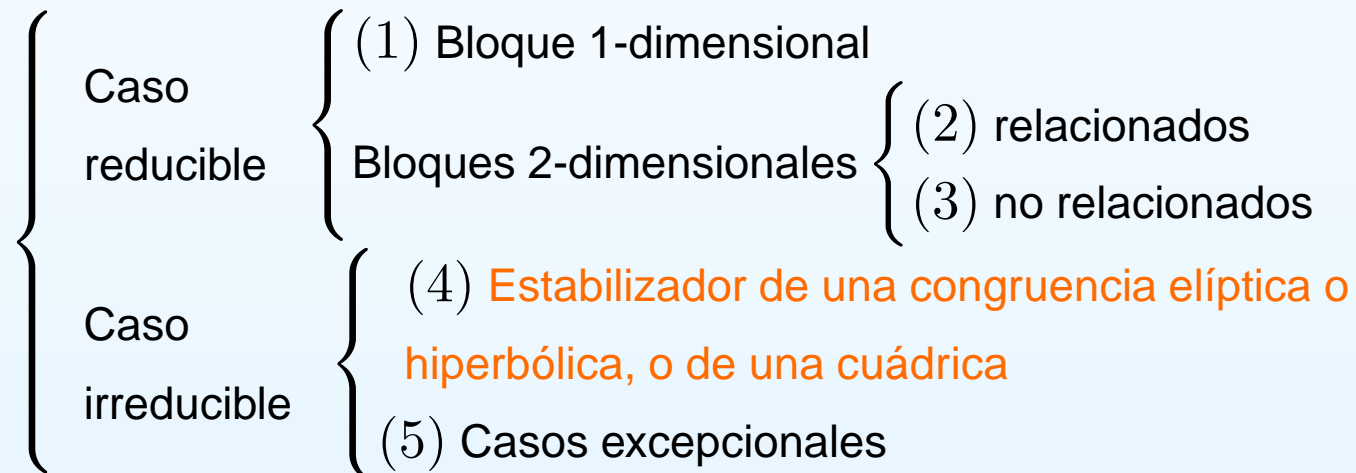
Pero  $S_2(1) = 0$ .



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

$$\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\rho}_l} \text{Im } \bar{\rho}_l \subset G \longrightarrow G/M \simeq \{\pm 1\}$$

The diagram illustrates a commutative relationship between Galois groups and their images. It shows a sequence of maps:  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \xrightarrow{\bar{\rho}_l} \text{Im } \bar{\rho}_l \subset G \longrightarrow G/M \simeq \{\pm 1\}$ . A curved arrow labeled  $\varepsilon_l$  connects  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$  directly to  $G/M \simeq \{\pm 1\}$ .

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

$$\begin{array}{ccccc} & & \varepsilon_l & & \\ & & \text{---} & & \\ & & \text{---} & & \\ & & \text{---} & & \\ \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\bar{\rho}_l} & \text{Im } \bar{\rho}_l \subset G & \longrightarrow & G/M \simeq \{\pm 1\} \end{array}$$

$\varepsilon_l$  es cuadrático no trivial, no ramificado fuera de  $f(C/\mathbb{Q}) = 587$

$$\Rightarrow \varepsilon_l = \begin{pmatrix} -587 \\ \cdot \end{pmatrix}$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\varepsilon_l} & \\ \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\bar{\rho}_l} \text{Im } \bar{\rho}_l \subset G & \longrightarrow G/M \simeq \{\pm 1\} \end{array}$$

$\varepsilon_l$  es cuadrático no trivial, no ramificado fuera de  $f(C/\mathbb{Q}) = 587$

$$\Rightarrow \varepsilon_l = \begin{pmatrix} -587 \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Si  $p \neq l, 587$ , entonces

$$\begin{pmatrix} -587 \\ p \end{pmatrix} = -1 \Rightarrow a_p \equiv 0 \pmod{l}.$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

Si  $p \neq l, 587$ , entonces

$$\left( \begin{array}{c} -587 \\ p \end{array} \right) = -1 \Rightarrow a_p \equiv 0 \pmod{l}.$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

Si  $p \neq l, 587$ , entonces

$$\binom{-587}{p} = -1 \Rightarrow a_p \equiv 0 \pmod{l}.$$

Si  $p = 5$ ,

$$\binom{-587}{5} = -1 \text{ y } a_p = -2 \equiv 0 \pmod{l}.$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

Si  $p \neq l, 587$ , entonces

$$\left( \begin{array}{c} -587 \\ p \end{array} \right) = -1 \Rightarrow a_p \equiv 0 \pmod{l}.$$

Si  $p = 5$ ,

$$\left( \begin{array}{c} -587 \\ 5 \end{array} \right) = -1 \text{ y } a_p = -2 \equiv 0 \pmod{l}. \Rightarrow l = 5$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

Si  $p \neq l, 587$ , entonces

$$\binom{-587}{p} = -1 \Rightarrow a_p \equiv 0 \pmod{l}.$$

Si  $p = 5$ ,

$$\binom{-587}{5} = -1 \text{ y } a_p = -2 \equiv 0 \pmod{l}. \Rightarrow l = 5$$

Si  $p = 11$ ,

$$\binom{-587}{11} = -1 \text{ y } a_p = -1 \equiv 0 \pmod{l}.$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

Si  $p \neq l, 587$ , entonces

$$\binom{-587}{p} = -1 \Rightarrow a_p \equiv 0 \pmod{l}.$$

Si  $p = 5$ ,

$$\binom{-587}{5} = -1 \text{ y } a_p = -2 \equiv 0 \pmod{l}. \Rightarrow l = 5$$

Si  $p = 11$ ,

$$\binom{-587}{11} = -1 \text{ y } a_p = -1 \equiv 0 \pmod{l}. \Rightarrow l = 11$$

# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

**Ejemplo** Caso (4):  $\text{Im } \bar{\rho}_l$  no está contenida en el estabilizador de una congruencia elíptica o hiperbólica, o de una cuádrica.

Si  $p \neq l, 587$ , entonces

$$\binom{-587}{p} = -1 \Rightarrow a_p \equiv 0 \pmod{l}.$$

Si  $p = 5$ ,

$$\binom{-587}{5} = -1 \text{ y } a_p = -2 \equiv 0 \pmod{l}. \Rightarrow l = 5$$

Si  $p = 11$ ,

$$\binom{-587}{11} = -1 \text{ y } a_p = -1 \equiv 0 \pmod{l}. \Rightarrow l = 11$$



# Imágenes de representaciones de Galois de Jacobianas de curvas de género 2.

---

## Ejemplo

**Proposición.** Sea  $C$  la curva de género 2 dada por la ecuación hiperelíptica

$$y^2 = x^6 + 2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1.$$

Entonces, para todo primo  $l > 3$ ,  $l \neq 587$ , la representación  $\bar{\rho}_l$  asociada a los puntos de  $l$ -torsión de la jacobiana de  $C$  satisface

$$\mathrm{Im}(\bar{\rho}_l) = \mathrm{GSp}_4(\mathbb{F}_l).$$

# **El conductor de una curva de género 2 y las representaciones de Galois asociadas a sus variedades Jacobianas**

Sara Arias de Reyna

Universitat de Barcelona

21è Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona

2007



**¡Ey! ¡Le has dado a la  
tecla EQUIVOCADA!**

Vuelve al **principio**