Invariants modulars i reducció estable

Francesc Bars

STNB 2007, a 30 de gener de 2007

R un anell de valoració discreta,
K cos de fraccions,
$\wp$ el seu ideal maximal
$k = R/\wp$ el seu cos residual.
C/K corba llisa geomètricament connexa de gènere $g \geq 1$
Existeix K'/K i un model estable $\mathfrak{C}$ sobre R' de $C \times_K K'$, on R' denota la clausura integral de R en K'. Sigui $\tilde{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C} \times_{R'} \bar{k}$ la corba estable obtinguda en considerar la fibra especial de $\mathfrak{C}$ sobre una clausura algebraica $\bar{k}$ de k.

C una corba el.líptica
Tenim l'invariant modular j.
Com $dim_{k^{alg}} H^1(\tilde{\mathfrak{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{C}}}) = 1$ tenim dos possibilitats:
si $j \in R$ llavors $\tilde{\mathfrak{C}}$ és llissa, on l'invariant modular és la imatge de j dins el cos residual de R;
si $j \notin R$ llavors $\tilde{\mathfrak{C}}$ és una corba racional amb un sol punt doble ordinari.

A partir d'ara C té gènere 2,
intentarem classificar els tipus de $\tilde{\mathfrak{C}}$ en funció de invariants que fan el paper del j invariant.
Repàs de corbes gènere 2:
Tenim

$$\phi : C \to \mathbb{P}^1$$

grau 2, i té $2g + 2 = 6$ punts de Weierstrass, punts on ramifica ϕ.
Si $car(K) \neq 2$ C té un model

$$y^2 = f(x)$$

amb $grau(f) = 6$, els zeros son punts de Weierstrass. Si fem un punt de Weierstrass ∞ tenim expressió $grau(f) = 5$.

Si $car(K)$ arbitrària, C té model

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

amb P, Q polinomis amb $grau(Q) \leq 3$, $grau(P) \leq 6$. Els punts de Weierstrass corresponen als valors de (x, y) té arrels dobles, i considerem llavors com a polinomi de grau 6:

$$f(x) := Q^2(x) + 4P(x)$$

Si $car(K)$ arbitrària, C té model

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

amb P, Q polinomis amb $grau(Q) \leq 3$, $grau(P) \leq 6$. Els punts de Weierstrass corresponen als valors de (x, y) té arrels dobles, i considerem llavors com a polinomi de grau 6:

$$f(x) := Q^2(x) + 4P(x)$$

(per a $car(K) = 2$ triem un aixecament de P, Q a coefficients en $W(K)$ i els invarients associats seràn reduint-ho a $2W(K)$),

Si $car(K)$ arbitrària, C té model

$$y^2 + Q(x)y = P(x)$$

amb P, Q polinomis amb $grau(Q) \leq 3$, $grau(P) \leq 6$. Els punts de Weierstrass corresponen als valors de (x, y) té arrels dobles, i considerem llavors com a polinomi de grau 6:

$$f(x) := Q^2(x) + 4P(x)$$

(per a $car(K) = 2$ triem un aixecament de P, Q a coefficients en $W(K)$ i els invarients associats seràn reduint-ho a $2W(K)$),
si portem un dels punts de Weierstrass a ∞, es considera el model

$$xy^2 + (1 + ax + bx^2)y + x^2(c + dx + x^2) = 0$$

i en particular,

$$f(x) = (1 + ax + bx^2)^2 - 4x^3(c + dx + x^2)$$

Idea: discutir l'espai de moduli de corbes de gènere 2 en termes dels punts de Weierstrass, i.e. zeros d'una sèxtica.
Les arrels d'una expressió a l'altra són projectivament equivalents. Fixem-nos que per aquesta qüestió no distingim el punt de Weierstrass que triem per a ∞ (Igusa trobarà les funcions equivalents als j invariants) però per a altres qüestions serà important la tria del punt de Weierstrass (Liu introdueix nous invariants). Hecke (cas de funcions), Igusa, Liu introdueixen invariants per a sextiques, tots provinent de resultats clàssics d'invariants per a polinomis de grau 6 però interpretades ara en el món de la Geometria Algebraica.

Com $dim_{k^{alg}}((H^1(\tilde{\mathfrak{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{C}}})) = 2$, tenim 7 possibilitats per a $\tilde{\mathfrak{C}}$(reducció model estable):

1. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és llisa i de gènere 2,
2. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és irreductible amb un sol punt doble, (la normalització de $\tilde{\mathfrak{C}}$ és una corba el.lítica).
3. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és irreductible amb dos punts dobles.
4. $\tilde{\mathfrak{C}}$ està format per dos rectes projectives que es tallen en tres punts,
5. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és la unió de dos components irreductibles que es tallen en un punt,
    1. les components son llises,
    2. un sola de les components és llisa,
    3. les dos components de $\tilde{\mathfrak{C}}$ són singulars.

Podem obtenir un anàleg per al model $\tilde{\mathfrak{C}}$ per gènere 2, un cop trobades les funcions o invariants que donen les funcions a l'espai de moduli?

Aquesta expossició es divideix a partir d'ara en dos grans punts:
-**Invariants per la sextica**: invariants clàssics, els invariants d'Igusa (invariants projectius), i altres invariants(els invariants afins).
-**Caracterització de $\tilde{\mathfrak{C}}$ en funció d'invariants projectius.**

Anem primer a introduir com dona invariants a finals del segle XIX Clebsch.
Sigui $f(x)$ un polinomi a coeficients en F (cos, $car = 0$) de grau n escrit per

$$a_0x^n + a_1yx^{n-1} + a_2y^2x^{n-2} + \ldots + a_ny^n$$

un covariant de f és un polinomi $C(a_0, \ldots, a_n, x, y)$ que satisfà donat $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(\overline{F})$, amb $(x, y) = M(x', y')$ s'obté:

$$C(a'_0, \ldots, a'_n, x', y') = det(M)^{-k} C(a_0, \ldots, a_n, x, y),$$

on $k = \frac{nr-l}{2}$ on r és el grau de C respecte a_i's i l l'ordre de C com a polinomi en x, y.
Un invariant de f és un covariant d'ordre 0.

Clebsch va obtenir un càlcul simbòlic per a obtenir tots els invariants associats a f, definim un operador Überschiebung:

$$(fg)_k := \frac{(m-k)!(n-k)!}{m!n!}\left(\frac{\delta f}{\delta x}\frac{\delta g}{\delta y} - \frac{\delta f}{\delta y}\frac{\delta g}{\delta x}\right)^k,$$

on f, g formes binàries de graus n i m respectivament, on $(\frac{\delta f}{\delta x})^l(\frac{\delta f}{\delta y})^m$ és per definició $\frac{\delta^{l+m} f}{\delta x^l \delta y^m}$.

Lema (Clebsch)

Tenim

1. $(fg)_k$ és un covariant simultani per les formes f i g d'ordre $m+n-2k$.
2. $(ff)_k$ és un covariant per a la forma f.
3. Tots els covariants per a f poden obtenir-se a partir de l'operació Überschiebung.

La situació de f forma sextica tenim:

covariants	ordre	grau
$i := (ff)_4$	4	2
$\Delta := (ii)_2$	4	4
$y_1 := (fi)_4$	2	3
$y_2 := (iy_1)_2$	2	5
$y_3 := (iy_2)_2$	2	7
$A := (ff)_6$	0	2
$B := (ii)_4$	0	4
$C := (i\Delta)_4$	0	6
$D := (y_3y_1)_2$	0	10

Clebsch prova que A, B, C, D formen una base d'invariants de grau parell.

I sota una condició obté:
f, f_1 de grau 6 tal que existeix $r \neq 0$ complint

$$A_1 = r^2 A,\ B_1 = r^4 B,\ C_1 = r^6 C,\ D_1 = r^{10} D$$

on $*_1$ denota els invariants de f_1, llavors f, f_1 son GL_2-equivalents i en particular les arrels son projectivament equivalents.

I sota una condició obté:
f, f_1 de grau 6 tal que existeix $r \neq 0$ complint

$$A_1 = r^2 A,\ \ B_1 = r^4 B,\ \ C_1 = r^6 C,\ \ D_1 = r^{10} D$$

on $*_1$ denota els invariants de f_1, llavors f, f_1 son GL_2-equivalents i en particular les arrels son projectivament equivalents.
Aquests invariants van estar estudiats per molts matemàtics buscant anàleg del j invariant per a corbes de gènere 2, per exemple en la disertació de E. Hecke "Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie"(1912)

I sota una condició obté:
f, f_1 de grau 6 tal que existeix $r \neq 0$ complint

$$A_1 = r^2 A,\ \ B_1 = r^4 B,\ \ C_1 = r^6 C,\ \ D_1 = r^{10} D$$

on $*_1$ denota els invariants de f_1, llavors f, f_1 son GL_2-equivalents i en particular les arrels son projectivament equivalents.
Aquests invariants van estar estudiats per molts matemàtics buscant anàleg del j invariant per a corbes de gènere 2, per exemple en la disertació de E. Hecke "Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie"(1912)
Igusa (1960) troba l'anàleg del j invariant per a corbes de gènere 2.

Definició

Sigui $f = u_0x^n + \ldots + u_n \in F[u_0, \ldots, u_n][x]$ *amb* F *cos. Un invariant* **injectiu** *de tipus* $(l, d) \in \mathbb{Z}^2$ *de* f *és un polinomi homogeni* $H \in F[u_0, \ldots, u_n]$ *de grau* d *que verifica la següent propietat:*

1. *Per a tot* $a, b \in F^{alg}$, $a \neq 0$ *si un escriu,*

$$\sum_{0 \leq j \leq n} u_j(ax+b)^{n-j} = \sum_{0 \leq j \leq n} u'_j x^{n-j} \in F^{alg}[u_0, \ldots, u_n][x],$$

llavors es té $H(u'_0, \ldots, u'_n) = a^l H(u_0, \ldots, u_n)$.

Diem que H *és un invariant* **projectiu** *de grau* d *de* f *si és un invariant injectiu del tipus* $(dn/2, d)$ *i satisfà:*

$$H(u_0, \ldots, u_n) = (-1)^{dn/2} H(u_0, \ldots, u_n).$$

Comencem pels invariants injectius(útils per a $\mathfrak{C}$):

Exemple

Per tot $2 \leq i \leq n$, Considerem
$\mathcal{P} := u_0x^n + u_1x^{n-1} + u_2x^{n-2} + \ldots + u_{n-1}x + u_n$. definim

$$A_i' := i(nu_0)^{i-1}\frac{\mathcal{P}^{(n-i)}}{(n-i)!}\left(-\frac{u_1}{nu_0}\right) \in \mathbb{Z}[u_0, \ldots, u_n]$$

a on $\mathcal{P}^{(j)}$ és la derivada j-èssima de $\mathcal{P}$, és un invariant afí del tipus $(i(n-1), i)$.
El primer coeficient u_0 és un invariant afí de tipus $(n, 1)$.

Prenem $n = 6$, posem:

$$\begin{cases} A_2 := A_2' = -5u_1^2 + 12u_0u_2 \\ A_3 := \frac{A_3'}{4} = 5u_1^3 + 9u_0(-2u_2u_1 + 3u_0u_3) \\ A_4 := \frac{A_4'}{6} = -5u_1^4 + 24u_0(u_2u_1^2 - 3u_3u_0u_1 + 6u_4u_0^2) \\ A_5 := \frac{A_5'}{20} = u_1^5 + 3u_0(-2u_2u_1^3 + 9u_0u_3u_1^2 - 36u_0^2u_4u_1 + 108u_0^3u_5) \\ B_2 := \frac{A_2^2+5A_4}{72u_0^2} \\ B_6 := \frac{8A_3^4-5A_4^3+A_2^3A_6'+5A_3^2A_6'+6A_2^2A_4^2-15A_2A_3^2A_4}{5832u_0^6} \end{cases}$$

Tenim A_i invariants afins de tipus $(5i, i)$, B_{2j} tipus $(8j, 2j)$, es té ($car \neq 2, 3$) tot invariant afí s'obté: $F[u_0, u_0^{-1}, A_2, \ldots, A_5, A_6']$.

Els invariants projectius (invariants de grau parell de Clebsch) (útils per a C i $\tilde{\mathfrak{C}}$):

Lema (Igusa)

Siguin $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les arrels de la sexta $u_0 x^6 + \ldots + u_6$. Llavors una expressió de la forma

$$H(u_0, \ldots, u_n) := u_0^m \sum (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_k - \alpha_l) \ldots$$

a on cada α_i apareix m cops en cada producte i que és simètric en $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ defineix invariants enters homogenis de grau m, on enter significa que $H \in \mathbb{Z}[u_0, \ldots, u_n]$.

escrivint $(ij) = (\alpha_i - \alpha_j)$

$$A' := u_0^2 \sum (12)^2(34)^2(56)^2 = -120A$$

$$B' := u_0^4 \sum (12)^2(23)^2(31)^2(45)^2(56)^2(64)^2 = -720A^2 + 6750B$$

$$C' := u_0^6 \sum (12)^2(23)^2(31)^2(45)^2(56)^2(64)^2(14)^2(25)^2(36)^2 =$$

$$8640A^3 - 108000AB + 202500C,$$

$$D' := u_0^{10} \prod (ij)^2 = -62208A^2 + 972000A^3B + 1620000A^2C -$$

$$3037500AB^2 - 6075000BC - 4556250D.$$

Anem a definir els invariants d'Igusa $J_{2i} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, u_0, \ldots, u_6]$ amb $grau(J_{2i}) = 2i$ amb $i = 1, \ldots, 5$ que seran polinomis en A', B', C' i D', amb la propietat que dos polinomis de grau 6 sense arrels múltiples són projectivament equivalents si i només si els invariants d'Igusa associats satisfant que $J_{2i} \to r^{2i} J_{2i}$ per a $i = 1, 2, 3, 5$ per a cert $r \neq 0$.

Podem considerar primer que una de les arrels és ∞ llavors obtenim un polinomi de grau 5, i podem pendre per a qualsevol característica el polinomi

$$(1 + aX + bX^2)^2 - 4X^3(c + dX + X^2)$$

anomenada la forma normal, i els zeros d'aquest polinomi són el 6 punts de Weierstrass associats a la corba de gènere 2.

Calculem ara A' com a polinomi en a, b, c i d a coeficients en $\mathbb{Z}$ es té que el màxim comú divisor dels coeficients és 2^3, per tant triem:

$$J_2 := \frac{1}{2^3} A'$$

primer invariant d'Igusa,
Definim

$$J_{10} := 2^{-12} D',$$

on D' denota el discriminant on $2^{12} = gcd(coef(D'))$.
Considerem $mJ_2^2 - B'$ d'ordre 4, $m \in \mathbb{Z}$. Tenim $gcd(coef(mJ_2^2 - B'))$ és maximal amb valor $2^5 3 = 96$ quan $m \equiv 4(modul\ 96)$. Definim

$$J_4 := \frac{1}{96}(4J_2^2 - B').$$

Considerem $mJ_2^3 + nJ_2J_4 - C'$, m, n enters, $gcd(coef(mJ_2^3 + nJ_2J_4 - C'))$ màxim quan $m \equiv 8, n \equiv -160(modul\ 576)$ amb gcd igual a $576 = 2^6 3^2$. Definim

$$J_6 := \frac{1}{576}(8J_2^3 - 160J_2J_4 - C').$$

Mòdul 2 $J_2J_6 - J_4^2$ és zero, i el g.c.d d'aquesta expressió en a, b, c i d és 2^2. Definim

$$J_8 := \frac{1}{4}(J_2J_6 - J_4^2).$$

Altres expressions dels invariants d'Igusa per a $car \neq 2$.

Si prenem una sexta de la forma

$$v_0X^5 - v_1X^4 + v_2X^3 - v_3X^2 + v_4X - v_5$$

per a la corba hiperelliptica els invariants d'Igusa definits corresponen a:

$$J_2 = 5v_0v_1 - 2v_1v_3 + 2^{-2}3v_2^2,$$
$$J_4 = -2^3[5^2v_0^2v_3v_5 - 15v_0^2v_4^2 - 15v_0v_1v_2v_5 + 7v_0v_1v_3v_4$$
$$+2^{-1}v_0v_2^2v_4 - v_0v_2v_3^2 + 2^3v_1^3v_5$$
$$-v_1^2v_2v_4 - v_1^2v_3^2 + v_1v_2^2v_3 - 2^{-4}3v_2^4],$$

$$J_6 = -2^{-4}[2^{-1}5^3 v_0^3 v_2 v_5^2 - 5^2 v_0^3 v_3 v_4 v_5 + 5 v_0^3 v_4^3$$
$$-5^3 v_0^2 v_1^2 v_5^2 - 10 v_0^2 v_1 v_2 v_4 v_5 + 10 v_0^2 v_1 v_3^2 v_5$$
$$-v_0^2 v_1 v_3 v_4^2 - \frac{5}{4} v_0^2 v_2^2 v_3 v_5$$
$$-\frac{11}{4} v_0^2 v_2^2 v_4^2 + \frac{7}{2} v_0^2 v_2 v_3^2 v_4 - v_0^2 v_3^4 +$$
$$6 v_0 v_1^3 v_4 v_5 - 3 v_0 v_1^2 v_2 v_3 v_5 + \frac{7}{2} v_0 v_1^2 v_2 v_4^2 - 2 v_0 v_1^2 v_3^2 v_4$$
$$+\frac{3}{4} v_0 v_1 v_2^3 v_5 - \frac{7}{4} v_0 v_1 v_2^2 v_3 v_4 + v_0 v_1 v_2 v_3^3$$
$$+\frac{7}{2^4} v_0 v_2^4 v_4 - 2^{-2} v_0 v_2^3 v_3^2$$
$$-v_1^4 v_4^2 + v_1^3 v_2 v_3 v_4 - 2^{-3} v_1^2 v_2^3 v_4 - 2^{-2} v_1^2 v_2^2 v_3^2$$
$$+2^{-3} v_1 v_2^4 v_3 - 2^{-6} v_2^6],$$

per a J_8 substituim $\frac{1}{4}(J_1 J_6 - J_4^2)$, e igualment no escrivim $J_{10} = 2^{-12} a_1^2 disc(P)$ ja que és el discriminant de l'anterior polinomi.

Si ∞ no és un punt de Weierstrass, $P(x)$ polinomi de grau 6:

$$P(x) = a_0x^6 + a_1x^5 + \ldots + a_6 \in K[x]$$

amb $a_0 \neq 0$, fent llavors a $P(x)$ una transformació homogràfica que porti una arrel de $P(x)$ a infinit i de la fórmula anterior:

$$J_2 = 2^{-2}(-120a_0a_6 + 20a_1a_5 - 8a_2a_4 + 3a_3^3),$$

$$
\begin{gathered}
J_4 = 2^{-7}(240(a_0a_3a_4a_5 + a_1a_2a_3a_6) - 400(a_0a_2a_5^2 + a_1^2a_4a_6) \\
-64(a_0a_4^3 + a_2^3a_6) + 16(a_1a_3a_4^2 + a_2^2a_3a_5) \\
-672a_0a_3^2a_6 + 240a_1^2a_5^2 \\
-112a_1a_2a_4a_5 - 8a_1a_3^2a_5 \\
+16a_2^2a_4^2 - 16a_2a_3^2a_4 + 3a_3^4 + 2640a_0^2a_6^2 \\
-880a_0a_1a_5a_6 + 1312a_0a_2a_4a_6),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
J_6 = 2^{-10}(1600(a_0^2a_4^2a_5^2 + a_1^2a_2^2a_6^2) + 1600(a_0a_1a_2a_5^3 + a_1^3a_4a_5a_6) \\
+640(a_0a_1a_3a_4a_5^2 + a_1^2a_2a_3a_5a_6) - 4000(a_0^2a_3a_5^3 + a_1^3a_3a_6^2) \\
-384(a_0a_1a_4^3a_5 + a_1a_2^3a_5a_6) - 640(a_0a_2^2a_4a_5^2 + a_1^2a_2a_4^2a_6) \\
+80(a_0a_2a_3^2a_5^2 + a_1^2a_3^2a_4a_6) + 192(a_0a_2a_3a_4^2a_5 + a_1a_2^2a_3a_4a_6) \\
-48(a_0a_3^3a_4a_5 + a_1a_2a_3^3a_6) - 224(a_1^2a_3a_4^2a_5 + a_1a_2^2a_3a_5^2) \\
+64(a_1^2a_4^4 + a_2^4a_5^2) - 64(a_1a_2a_3a_4^3 + a_2^3a_3a_4a_5) + 16(a_1a_3^3a_4^2 + a_2^2a_3^3a_5) \\
-4096(a_0^2a_4^3a_6 + a_0a_2^3a_6^2) + 6400(a_0^2a_2a_5^2a_6 + a_0a_1^2a_4a_6^2) \\
+10560(a_0^2a_3a_4a_5a_6 + a_0a_1a_2a_3a_6^2) + 2624(a_0a_1a_3a_4^2a_6 + a_0a_2^2a_3a_5a_6) \\
-4432a_0a_1a_3^2a_5a_6 - 8a_2a_3^4a_4 + a_3^6 - 320a_1^3a_5^3 + 64a_1^2a_2a_4a_5^2 + 176a_1^2a_3^2a_5^2 \\
+128a_1a_2^2a_4^2a_5 + 112a_1a_2a_3^2a_4a_5 - 28a_1a_3^4a_5 + 16a_2^2a_3^2a_4^2 + 5120a_0^3a_6^3 \\
-2544a_0^2a_3^2a_6^2 + 312a_0a_3^4a_6 - 14336a_0^2a_2a_4a_6^2 + 1024a_0a_2^2a_4^2a_6 - 2560a_0^2a_1a_5a_6^2 \\
-2240a_0a_1^2a_5^2a_6 - 6528a_0a_1a_2a_4a_5a_6 - 1568a_0a_2a_3^2a_4a_6),
\end{gathered}
$$

i $J_{10} = 2^{-12} disc(P)$.

Lema (Igusa, Clebsch, Bolza,...)

Suposem que $F(X) := F(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ un element homogeni de $K[X_1, \ldots, X_5]$. Llavors $F(J_2, J_4, J_6, J_8, J_{10}) = 0$ si i només si $F(X)$ és un múltiple de $X_1X_3 - X_2^2 - 4X_4$.

Lema (Igusa)

Si $J_2', \ldots, J_{10}'$ son invariants d'Igusa de C associats a una altra equació hiperel.líptica, llavors existeix $a \in K \setminus \{0\}$ tal que $J_{2i}' = a^{2i} J_{2i}$. Inversament, si dos corbes C, C' els invariants d'Igusa verifiquen l'anterior igualtat llavors son isomorfes en K^{alg}, la clausura algebraica.

Denotem per $\mathfrak{M}_2 \times K$ l'espai de moduli de corbes de gènere 2 sobre K.
Si $car(K) \neq 2$ s'immersiona espai afí dimensió 8 usant les funcions:

$$J_2^5 J_{10}^{-1},\ J_4^5 J_{10}^{-2},\ J_6^5 J_{10}^{-3}$$

$$J_2^3 J_4 J_{10}^{-1},\ J_2 J_4^2 J_{10}^{-1},\ J_2^2 J_6 J_{10}^{-1},\ J_4 J_6 J_{10}^{-1},\ J_2 J_6^3 J_{10}^{-2},$$

i si $car(K) = 2$ es necessiten 10 funcions.

Tenim $\mathfrak{C} \to R'$ aquest model estable considerem la seva fibra especial en la clausura algebraica mitjançant $\tilde{\mathfrak{C}}$, recordeu:

$$dim_{k^{alg}}(H^1(\tilde{\mathfrak{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{C}}})) = 2,$$

d'aquí s'obté set possibilitats per a $\tilde{\mathfrak{C}}$:

1. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és llisa i per tant de gènere 2,
2. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és no llissa e irreductible amb un sol punt doble, (la normalització de $\tilde{\mathfrak{C}}$ és una corba el.lítica).
3. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és irreductible amb dos punts dobles.
4. $\tilde{\mathfrak{C}}$ està format per dos rectes projectives que es tallen en tres punts,
5. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és la unió de dos components irreductibles que es tallen en un punt,
    1. les components son llises,
    2. un sola de les components és llisa,
    3. les dos components de $\tilde{\mathfrak{C}}$ són singulars.

Recordem que una corba el.líptica Y (si $car(k) \neq 2$) té una expressió: $y^2 = x^4 + ax^2 + bx + c$.
Definim

$$I_4 := J_2^2 - 2^3 \cdot 3J_4, \ I_{12} := -2^3 J_4^3 + 3^2 J_2 J_4 J_6 - 3^3 J_6^2 - J_2^2 J_8,$$

observem que aplicant aquestes fórmules als invariants d'Igusa per aquest polinomi de grau 4 un obté

$$I_4 = 2^{-4} c_4(Y), \ I_{12} = 2^{-12} \Delta(Y)$$

d'on

$$j(Y) = I_4^3 I_{12}^{-1}.$$

Aquests invariants permeten estudiar els casos en que la reducció té una component que pot provenir d'una reducció d'una corba el.líptica.
Denotem per

$$I_2 := 12^{-1} J_2, \ I_6 := J_6, \ I_8 := J_8.$$

Teorema (Liu)

1. (Igusa) $\tilde{\mathfrak{C}}$ és llissa si i només si $J_{2i}^5 J_{10}^{-i} \in R$ per a tot $i \leq 5$,
2. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és irreductible amb un sol punt doble, (la normalització de $\tilde{\mathfrak{C}}$ és una corba el.lítica)$\Leftrightarrow$ $J_{2i}^6 I_{12}^{-i} \in R$ per a tot $i \leq 5$ i $J_{10}^6 I_{12}^{-5} \in \wp$. L'invariant j de la corba eliptica és $j = \overline{(I_4^3 I_{12}^{-1})}$.
3. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és irreductible amb dos punts dobles $\Leftrightarrow$ $J_{2i}^2 I_4^{-i} \in R$ per a tot $i \leq 5$, $J_{10}^2 I_4^{-5} \in \wp$, $I_{12} I_4^{-3} \in \wp$ i és té que $J_4 I_4^{-1}$ o bé $J_6^2 I_4^{-3}$ invertible en R.
4. $\tilde{\mathfrak{C}}$ està format per dos rectes projectives que es tallen en tres punts $\Leftrightarrow$ $J_{2i}^2 I_4^{-i} \in \wp$ per a tot $2 \leq i \leq 5$.
5. $\tilde{\mathfrak{C}}$ és la unió de dos components irreductibles que es tallen en un punt si i sol si

$$I_4^{\epsilon} I_{2\epsilon}^{-2} \in \wp, \;\; J_{10}^{\epsilon} I_{2\epsilon}^{-5} \in \wp, \;\; I_{12}^{\epsilon} I_{2\epsilon}^{-6} \in \wp. \tag{1}$$

on $\epsilon = 1$ si $car(k) \neq 2, 3$ (sino: 4,3 respectivament).

5.1 les components són llisses, $\Leftrightarrow$ és compleix (1) i a més $I_4^{3\epsilon} J_{10}^{-\epsilon} I_{2\epsilon}^{-1} \in R$, $I_{12}^{\epsilon} J_{10}^{-\epsilon} I_{2\epsilon}^{-1} \in R$. Siguin j_1, j_2 els invariants modulars de les dues components, es té:

$$\begin{cases} (j_1 j_2)^\epsilon = \overline{(I_4^{3\epsilon} J_{10}^{-\epsilon} I_{2\epsilon}^{-1})}, \\ (j_1 + j_2)^\epsilon = 2^6 \cdot 3^3 + \overline{(I_{12}^{\epsilon} J_{10}^{-\epsilon} I_{2\epsilon}^{-1})} \end{cases}$$

5.2 un sola de les components és llissa, 1 $\Leftrightarrow$ es compleix (1) i a més $I_4^3 I_{12}^{-1} \in R$, $J_{10}^{\epsilon} I_{2\epsilon} I_{12}^{-\epsilon} \in \wp$. L'invariant modular de la component llissa és $j = \overline{(I_4^3 I_{12}^{-1})}$.

5.3 les dos components de $\tilde{\mathfrak{C}}$ són singulars $\Leftrightarrow$ es compleix (1) i a més $I_{12} I_4^{-3} \in \wp$ i $J_{10}^{\epsilon} I_{2\epsilon} I_4^{-3\epsilon} \in \wp$.

Alguns detalls de la prova

Reduim-nos cas R algebraicament tancat, $k = k^{alg}$.

Alguns detalls de la prova

Reduim-nos cas R algebraicament tancat, $k = k^{alg}$.
Restringim-nos $car(k) \neq 2, 3$.

Alguns detalls de la prova

Reduim-nos cas R algebraicament tancat, $k = k^{alg}$.
Restringim-nos $car(k) \neq 2, 3$.

$$C \longrightarrow^{(2:1)} \mathbb{P}^1_K$$

defineix involució hiperelliptica σ.

Alguns detalls de la prova

Reduim-nos cas R algebraicament tancat, $k = k^{alg}$.
Restringim-nos $car(k) \neq 2, 3$.

$$C \rightarrow^{(2:1)} \mathbb{P}^1_K$$

defineix involució hiperelliptica σ.
σ s'esten a una involució en el model $\mathfrak{C}$(Deligne-Mumford):

$$f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Z} := \mathfrak{C}/ < \sigma > .$$

Alguns detalls de la prova

Reduim-nos cas R algebraicament tancat, $k = k^{alg}$.
Restringim-nos $car(k) \neq 2, 3$.

$$C \rightarrow^{(2:1)} \mathbb{P}^1_K$$

defineix involució hiperelliptica σ.
σ s'esten a una involució en el model $\mathfrak{C}$(Deligne-Mumford):

$$f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Z} := \mathfrak{C}/ < \sigma > .$$

Tenim $\mathfrak{Z}$ és normal,$\mathfrak{Z}_s$ fibra especial reduida i $\mathfrak{Z}_\eta \cong \mathbb{P}^1_K$(fibra genèrica).

Alguns detalls de la prova

Reduim-nos cas R algebraicament tancat, $k = k^{alg}$.
Restringim-nos $car(k) \neq 2, 3$.

$$C \rightarrow^{(2:1)} \mathbb{P}^1_K$$

defineix involució hiperelliptica σ.
σ s'esten a una involució en el model $\mathfrak{C}$(Deligne-Mumford):

$$f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Z} := \mathfrak{C}/ < \sigma > .$$

Tenim $\mathfrak{Z}$ és normal,$\mathfrak{Z}_s$ fibra especial reduida i $\mathfrak{Z}_\eta \cong \mathbb{P}^1_K$(fibra genèrica).
f no ramificada en cap punt genèric de $\tilde{\mathfrak{C}}$ i $\tilde{\mathfrak{C}}/ < \sigma > \cong \mathfrak{Z}_s$.

Alguns detalls de la prova

Reduim-nos cas R algebraicament tancat, $k = k^{alg}$.
Restringim-nos $car(k) \neq 2, 3$.

$$C \rightarrow^{(2:1)} \mathbb{P}^1_K$$

defineix involució hiperelliptica σ.
σ s'esten a una involució en el model $\mathfrak{C}$(Deligne-Mumford):

$$f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Z} := \mathfrak{C}/ < \sigma > .$$

Tenim $\mathfrak{Z}$ és normal,$\mathfrak{Z}_s$ fibra especial reduida i $\mathfrak{Z}_\eta \cong \mathbb{P}^1_K$(fibra genèrica).
f no ramificada en cap punt genèric de $\tilde{\mathfrak{C}}$ i $\tilde{\mathfrak{C}}/ < \sigma > \cong \mathfrak{Z}_s$.
Les components de $\mathfrak{Z}_s$ són isomorfes a $\mathbb{P}^1_k$.

-**Cas $\mathfrak{Z}_s$ és irreduible**.
$\Rightarrow \mathfrak{Z} \cong \mathbb{P}^1_R$.
Triem un R-punt Γ de $\mathfrak{C}$ on f ramificada sobre el punt Γ_η
i si $\tilde{\mathfrak{C}}$ no és llissa Γ_s sigui punt doble de $\tilde{\mathfrak{C}}$.
$U := \mathfrak{Z} \setminus \Gamma$, $U = Spec(R[x])$ on $f^{-1}(U)$ és un revestiment de grau 2 de Galois, amb $f^{-1}(U) = Spec(R[x, y])$

$$y^2 = P(x),\ \ P(x) \in R[x],$$

amb $deg(P) = 5$ (f_η ramificat sobre ∞).

Suposem que $\tilde{\mathfrak{C}}$ és llissa, tenim $\overline{P(x)}$ és un polinomi separable del mateix grau que P, d'aquí és suficient $J_{10} \in R^*$,

$$J_{10} \in R^* \Leftrightarrow J_{2i}^5 J_{10}^{-i} \in R, \;\; i \leq 5$$

Observeu $\Leftrightarrow$ segueix que si $J_{10} \in \wp$ tenim $J_{2i} \in \wp$ for all i, per tant la corba $y^2 = x^4(x-1)$(Igusa) no d'un model estable.

Si $\tilde{\mathfrak{C}}$ no és llissa:

$$P(x) = \pi x^5 + x^4 + ax^2 + bx + c$$

amb $\pi \in \wp$, $J_{10} \in \wp$ i càlculs en l'anterior expressió de P s'obté:

$$\overline{J_2} = -2\overline{a},\ \overline{J_4} = 2^{-3}(\overline{a}^2 - 4\overline{c}),\ \overline{I_4} = \overline{a}^2 + 12\overline{c},$$

$$\overline{J_6} = 2^{-4}\overline{b}^2,\ \overline{I_{12}} = 2^{-8} disc(\overline{P}).$$

Si $I_{12} \neq 0$ llavors la normalització de $\tilde{\mathfrak{C}}$ és una corba eliptica d'equació $y^2 = \overline{P}(x)$, i $j(E) = \overline{(I_4^3 I_{12}^{-1})}$.
(Tercer cas): Considerem ara $\overline{J_{10}} = \overline{I_{12}} = 0$ i $\tilde{\mathfrak{C}}$ irreductible. D'on $\overline{J_4}$ o $\overline{J_6}$ no son zero. Es té $I_4 \neq 0$ ja que $I_4 = 0$ $\overline{P}$ no tindria discriminant zero o únicament punts dobles.
(Quart cas): $\overline{J_{2i}} = 0$ per a tot $2 \leq i \leq 5$, i argument semblants a l'anterior $\overline{I_4} \neq 0$.

-Cas $\mathfrak{Z}_s$ té dos components irreductibles

$\mathfrak{Z}_s$ són dues rectes projectives que es tallen en un punt.
Existeixen dues seccions Γ_1, Γ_2 on $(\mathfrak{Z} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2))_s$ afí i connex,
$U = \mathfrak{Z} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ amb $U = Spec(R[x, v]/xv = pi^2)$, $\pi \in \wp \setminus \{0\}$.
Triem Γ_i dins la ramificació de f i de la part llissa de $\mathfrak{C}$, un té
$f^{-1}(U) = Spec(R[x, v, y, z])$ complint,

$$y^2 = x^3 + ax^2 + x + b\pi^2 + \pi^2 v, \;\; a, b \in R$$

$$z^2 = v^3 + bv^2 + v + a\pi^2 + \pi^2 x, \;\; yz = \pi(x^2 + ax + 1 + bv + v^2).$$

Les components irreductibles de $\tilde{\mathfrak{C}}$ provenen de

$$y^2 = x^3 + \overline{a}x^2 + x, \;\; z^2 = v^3 + \overline{b}v^2 + v.$$

Si la primera component (per exemple) és llisa, el seu invariant modular és $2^8(\overline{a}^2 - 3)^3/(\overline{a}^2 - 4)$.
De les anteriors expressions, tenim una equació afí de C:

$$w^2 = x^5 + ax^4 + x^3 + b\pi^2x^2 + \pi^4x.$$

S'observa que de $w^2 = x^5 + ax^4 + x^3 + b\pi^2x^2 + \pi^4x$ s'obté: $J_{2i} \in R$, $I_2 - 2^{-4} \in \wp$ si $car(k) \neq 2,3$, $I_6 - 1 \in \wp$ si $car(k) = 3$ i es té:

$$I_4 - (a^2-3)(b^2-3)\pi^4 \in \pi^5 R,\ J_{10} - 2^{-12}(a^2-4)(b^2-4)\pi^{12} \in \pi^{13}R,$$

$$I_{12} - 2^{-10}\{4(a^2-3)^3(b^2-4) + 4(b^2-3)^3(a^2-4) - 27(a^2-4)(b^2-4)\}\pi^{12}$$

és en $\pi^{13}R$.
Les conclusions de l'enunciat s'obtenen a partir d'aquí.

Exemple

Sigui C: $y^2 = x^5 + x$. Els invariants d'Igusa:

$$J_2 = 5,\ J_4 = 2^{-3} \cdot 15,\ I_4 = -2^2 \cdot 5,\ J_6 = -2^{-4} \cdot 5,\ J_8 = -2^{-8} \cdot 325,$$

$$J_{10} = 2^{-4},\ I_{12} = -2 \cdot 25.$$

D'on C té bona reducció en tota valoració diferent a 2.
La reducció estable en 2 cas 5(a), d'invariant modular zero.

Seguint les notacions introduides obtenim,

Corol.lari

$\tilde{\mathfrak{C}}$ és totalment degenerat(és dir totes les components irreductibles són corbes racionals)

$$\Leftrightarrow I_{12}I_4^{-3} \in \wp,\ \ J_{10}^2 I_4^{-5} \in \wp,\ \ J_{10}^{\epsilon} I_{2\epsilon} I_4^{-3\epsilon} \in \wp.$$

Seguint les notacions introduides obtenim,

Corol.lari

$\tilde{\mathfrak{C}}$ és totalment degenerat(és dir totes les components irreductibles són corbes racionals)

$$\Leftrightarrow I_{12}I_4^{-3} \in \wp,\ \ J_{10}^2 I_4^{-5} \in \wp,\ \ J_{10}^{\epsilon} I_{2\epsilon} I_4^{-3\epsilon} \in \wp.$$

Demostració.

Cas totalment degenerat correspon situacions:(3),(4),(5.3). Les condicions són suficients i és un calcul que un cop satisfates aquestes condicions no es troben en les altres situacions. □