Models minimals, canònics i estables

Luis E. García

Departament de Matemàtica Aplicada 4
Universitat Politècnica de Catalunya

Outline

Introducció

Model regular minimal

Model canònic

Reducció i models estables

Objectius

- Introduir els conceptes de model regular minimal, canònic i estable d'una corba C sobre K.
- Analitzar l'existència i unicitat d'aquests models i les relacions entre ells.
- Donar exemples concrets de construcció d'aquests models.

Outline

Introducció

Model regular minimal

Model canònic

Reducció i models estables

Models regulars i minimals

- $X \rightarrow S$ superfície aritmètica
- Un *model regular* de X és $(Y \rightarrow S, f)$, on $Y \rightarrow S$ és regular i $f : Y \dashrightarrow X$ birracional.
- Un morfisme de dos models regulars de X és un morfisme de S-esquemes $Y \rightarrow Z$ compatible amb $Y \dashrightarrow X$, $Z \dashrightarrow X$.
- $Y \rightarrow S$ és *minimal* si per tot $U \subseteq Z$ de Z regular, tot $U \rightarrow Y$ s'estén a $Z \rightarrow Y$.

Exemple de propietat

- **Proposició.** $X \to S$ minimal. Aleshores l'aplicació canònica $Aut_S(X) \to Aut(X_\eta)$ és bijectiva.
  Dem. Un automorfisme $\sigma_\eta \in Aut(X_\eta)$ defineix una aplicació birracional $\sigma : X \dashrightarrow X$. Com X és minimal, σ s'estén a un morfisme. Considerant σ_η^{-1}, veiem que σ es un automorfisme de X.

Divisors excepcionals

- Obstrucció a minimalitat $\Rightarrow$ Divisors excepcionals
- $X \rightarrow S$ regular, E divisor primer.
- E es diu *divisor excepcional* si existeix $Y \rightarrow S$ regular i $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(E)$ és un punt i $f : X \backslash E \rightarrow Y \backslash f(E)$ és un isomorfisme.

Criteri de Castelnuovo

Teorema. (Castelnuovo) $X \to S$ superfície aritmètica projectiva i regular, $E \subseteq X_s$ un divisor primer vertical. Sigui $k' = H^0(E, \mathcal{O}_E)$. Aleshores E és un divisor excepcional si i solament si $E \simeq \mathbb{P}^1_{k'}$ i $E^2 = -[k' : k(s)]$.

$\Rightarrow$ Caracterització intrínseca dels divisors excepcionals

Existència i unicitat

- **Teorema.** $X \to S$ superfície aritmètica projectiva. Existeix Y regular que no conté divisors excepcionals i un morfisme birracional $Y \to X$.
- **Teorema.** $X \to S$ projectiva amb $p_a(X_\eta) \geq 1$. Aleshores X admet un (únic) model minimal sobre S, i qualsevol model que no contingui divisors excepcionals és minimal.

Exemple: llis implica minimal

- $X \to S$ llisa i projectiva amb $g(X_\eta) \geq 1$ és minimal. De fet, donat un divisor vertical V de X, es compleix $V^2 = 0$ i es dedueix que V no és excepcional.

Models de corbes

A partir d'ara fixem:

- A: anell de Dedekind, $S = \mathrm{Spec}(A)$
- K: cos de fraccions de A.
- C corba normal, connexa i projectiva sobre K

Model projectiu de C sobre S: superfície aritmètica projectiva $\mathfrak{C} \to S$ amb un isomorfisme $f : \mathfrak{C}_\eta \to C$.

Morfisme de models $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$: morfisme d'esquemes compatible amb f i f'.

- $(\mathfrak{C}, f)$ verifica (P) $\Leftrightarrow$ el morfisme $\mathfrak{C} \to S$ verifica (P).

Corba projectiva

- C definida per polinomis homogenis $f_1, \dots, f_k \in K[X_0, \dots, X_n]$.
- Multiplicant els polinomis per elements de A podem suposar que $f_1, \dots, f_k \in A[X_0, \dots, X_n]$.
- $\Rightarrow$ Si $X = \mathrm{Proj}(A[X_0, \dots, X_n]/(f_1, \dots, f_k))$ és normal, es dedueix que X és un model de C.

Existència de models minimals de corbes

- C corba llisa i projectiva sobre K de gènere (geomètric) g
- **Teorema.** $i)$ C admet un model regular sobre S que no conté divisors excepcionals.
- $ii)$ Si $g \geq 1 \Rightarrow C$ admet un únic model regular minimal $\mathfrak{C}_{min}$.
- Construcció: com al exemple anterior, després apliquem desingularització i reducció dels divisors excepcionals.

Outline

Introducció

Model regular minimal

Model canònic

Reducció i models estables

Model canònic

- $X \to S$ superfície minimal amb $p_a(X_\eta) \geq 2$, $K_{X/S}$ un divisor canònic.
- **Definició.** Sigui $f : X \to Y$ la contracció dels divisors primers verticals Γ tals que $K_{X/S} \cdot \Gamma = 0$. La superfície $Y \to S$ es diu el *model canònic* de X.
- Aquest model és singular sempre que existeix una component contreta.
- C corba llisa i projectiva de gènere $g \geq 2 \Rightarrow \mathfrak{C}_{min} \to \mathfrak{C}_{can}$

Exemple de propietat

- **Proposició.** Sigui $Y \to S$ un model canònic de una superfície aritmètica minimal. Sigui $s \in S$ un punt tancat i n el nombre de components irreductibles de Y_s. Aleshores $n \leq 2p_a(X_\eta) - 2$.

Obtenció de $\mathfrak{C}_{min}$ i $\mathfrak{C}_{can}$

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\text{eliminació de denominadors}", "\text{dels coeficients + normalització}"'] & & \text{un model normal sobre } S \\
C_{\text{min}} \arrow[d, "\text{contracció de}"', "\text{-}2\text{-corbes}"] & & \text{un model regular sobre } S \arrow[u, "\text{desingularització}"'] \arrow[ll, "\text{contraccions dels}"', "\text{divisors excepcionals}"] \\
C_{\text{can}} & &
\end{tikzcd}
$$

Figura: Obtenció dels models regular minimal i canònic.

Exemple

- Corba de Fermat sobre $\mathbb{Q}$: $C: \quad x^4 + y^4 + z^4 = 0$
- $\mathfrak{C}_{min}$, $\mathfrak{C}_{can}$?
- $\mathfrak{C}: \quad \mathrm{Proj}(\mathbb{Z}[x, y, z]/(x^4 + y^4 + z^4))$ és model sobre $\mathbb{Z}$.

Exemple

- Corba de Fermat sobre $\mathbb{Q}$: $C: \quad x^4 + y^4 + z^4 = 0$
- $\mathfrak{C}_{min}$, $\mathfrak{C}_{can}$?
- $\mathfrak{C}: \quad \mathrm{Proj}(\mathbb{Z}[x, y, z]/(x^4 + y^4 + z^4))$ és model sobre $\mathbb{Z}$.

Exemple (II)

- Criteri del jacobià: $\mathfrak{C}$ és llis per a tot $p \neq 2$
- $U = \{z \neq 0\}$, $y = v - 1$, $x = u + v$
- $x^4 + y^4 + 1 = 0 \Rightarrow u^4 + 2G = 0$ amb $G = (v^2 - v + 1)^2 + 3v^2u^2 + 2v^3u + 2vu^3$
- $\Rightarrow$ Punts singulars en U_2: zeros de G mòdul 2.

Exemple (*II*)

- Criteri del jacobià: $\mathfrak{C}$ és llis per a tot $p \neq 2$
- $U = \{z \neq 0\}$, $y = v - 1$, $x = u + v$
- $x^4 + y^4 + 1 = 0 \Rightarrow u^4 + 2G = 0$ amb $G = (v^2 - v + 1)^2 + 3v^2u^2 + 2v^3u + 2vu^3$
- $\Rightarrow$ Punts singulars en U_2: zeros de G mòdul 2.

Exemple (*II*)

- Criteri del jacobià: $\mathfrak{C}$ és llis per a tot $p \neq 2$
- $U = \{z \neq 0\}$, $y = v - 1$, $x = u + v$
- $x^4 + y^4 + 1 = 0 \Rightarrow u^4 + 2G = 0$ amb
  $G = (v^2 - v + 1)^2 + 3v^2u^2 + 2v^3u + 2vu^3$
- $\Rightarrow$ Punts singulars en U_2: zeros de G mòdul 2.

Exemple (III)

- punt singular $q \in U_2$: correspon al ideal $\mathfrak{m} = (2, u, v^2 - v + 1)$.
- $U_2 = \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_2[u, v]/(u^4) \Rightarrow$ recta afí amb mult. 4.

Figura: Fibra de $\mathfrak{C}$ sobre 2.

Exemple (*III*)

- punt singular $q \in U_2$: correspon al ideal $\mathfrak{m} = (2, u, v^2 - v + 1)$.
- $U_2 = \mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_2[u, v]/(u^4) \Rightarrow$ recta afí amb mult. 4.

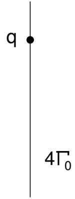

Figura: Fibra de $\mathfrak{C}$ sobre 2.

Exemple (IV)

- Blow-up de q: Model $\tilde{\mathfrak{C}}$ unió de $\mathrm{Spec}\, A_1$, $\mathrm{Spec}\, A_2$, $\mathrm{Spec}\, A_3$
- $A_1 = A[u_1, v_1]$, $u_1 = u/2$, $v_1 = (v^2 - v + 1)/2$.
- Fibra sobre 2:
  $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_2[v, u_1, v_1]/(v^2 - v + 1, v_1^2 + v^2 u_1^2 + v^3 u_1))$
- $\Rightarrow$ Cònica afí llisa sobre $\mathbb{F}_4$.

Exemple (IV)

- Blow-up de q: Model $\tilde{\mathfrak{C}}$ unió de $\mathrm{Spec}\, A_1$, $\mathrm{Spec}\, A_2$, $\mathrm{Spec}\, A_3$
- $A_1 = A[u_1, v_1]$, $u_1 = u/2$, $v_1 = (v^2 - v + 1)/2$.
- Fibra sobre 2: $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_2[v, u_1, v_1]/(v^2 - v + 1, v_1^2 + v^2 u_1^2 + v^3 u_1))$
- $\Rightarrow$ Cònica afí llisa sobre $\mathbb{F}_4$.

Exemple (IV)

- Blow-up de q: Model $\tilde{\mathfrak{C}}$ unió de $\mathrm{Spec}\, A_1$, $\mathrm{Spec}\, A_2$, $\mathrm{Spec}\, A_3$
- $A_1 = A[u_1, v_1]$, $u_1 = u/2$, $v_1 = (v^2 - v + 1)/2$.
- Fibra sobre 2:
  $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_2[v, u_1, v_1]/(v^2 - v + 1, v_1^2 + v^2 u_1^2 + v^3 u_1))$
- $\Rightarrow$ Cònica afí llisa sobre $\mathbb{F}_4$.

Exemple (IV)

- Blow-up de q: Model $\tilde{\mathfrak{C}}$ unió de $\mathrm{Spec}\, A_1$, $\mathrm{Spec}\, A_2$, $\mathrm{Spec}\, A_3$
- $A_1 = A[u_1, v_1]$, $u_1 = u/2$, $v_1 = (v^2 - v + 1)/2$.
- Fibra sobre 2:
  $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_2[v, u_1, v_1]/(v^2 - v + 1, v_1^2 + v^2 u_1^2 + v^3 u_1))$
- $\Rightarrow$ Cònica afí llisa sobre $\mathbb{F}_4$.

Exemple (V)

- Càlcul de A_2, A_3 $\Rightarrow$: obtenim la fibra sobre 2 de $\tilde{\mathfrak{C}}$

Figura: Fibra de $\tilde{\mathfrak{C}}$ sobre 2.

- $\Gamma_0 \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_2}$, Γ_1 una cònica llisa sobre $\mathbb{F}_4$ i $\Gamma_2 \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_4}$
- $\tilde{\mathfrak{C}}$ és regular

Exemple (V)

- Càlcul de A_2, A_3 $\Rightarrow$: obtenim la fibra sobre 2 de $\tilde{\mathfrak{C}}$

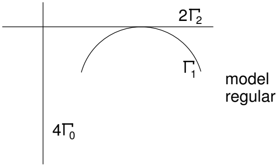

Figura: Fibra de $\tilde{\mathfrak{C}}$ sobre 2.

- $\Gamma_0 \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_2}$, Γ_1 una cònica llisa sobre $\mathbb{F}_4$ i $\Gamma_2 \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_4}$
- $\tilde{\mathfrak{C}}$ és regular

Exemple (V)

- Càlcul de A_2, A_3 $\Rightarrow$: obtenim la fibra sobre 2 de $\tilde{\mathfrak{C}}$

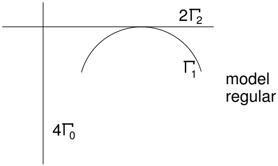

Figura: Fibra de $\tilde{\mathfrak{C}}$ sobre 2.

- $\Gamma_0 \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_2}$, Γ_1 una cònica llisa sobre $\mathbb{F}_4$ i $\Gamma_2 \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_4}$
- $\tilde{\mathfrak{C}}$ és regular

Exemple (VI)

- Interseccions: $\Gamma_2 \cdot \Gamma_0 = 2$ i $\Gamma_2 \cdot \Gamma_1 = 4$, $\Gamma_0^2 = -1$
- $\Rightarrow \Gamma_0$ divisor excepcional
- Contracció de Γ_0:

Figura: Fibra de $\mathfrak{C}_{min}$ sobre 2

- Obtenim $\mathfrak{C}_{min}$

Exemple (VI)

- Interseccions: $\Gamma_2 \cdot \Gamma_0 = 2$ i $\Gamma_2 \cdot \Gamma_1 = 4$, $\Gamma_0^2 = -1$
- $\Rightarrow \Gamma_0$ divisor excepcional
- Contracció de Γ_0:

Figura: Fibra de $\mathfrak{C}_{min}$ sobre 2

- Obtenim $\mathfrak{C}_{min}$

Exemple (VI)

- Interseccions: $\Gamma_2 \cdot \Gamma_0 = 2$ i $\Gamma_2 \cdot \Gamma_1 = 4$, $\Gamma_0^2 = -1$
- $\Rightarrow \Gamma_0$ divisor excepcional
- Contracció de Γ_0:

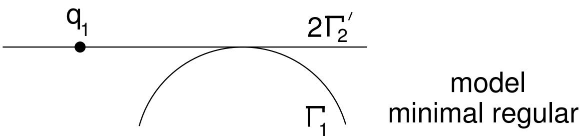

Figura: Fibra de $\mathfrak{C}_{min}$ sobre 2

- Obtenim $\mathfrak{C}_{min}$

Exemple (VII)

- Fòrmula d'adjunció: $\Gamma_2' \cdot K_{\mathfrak{C}_{min}/\mathbb{Z}} = 0$
- Model canònic $\mathfrak{C}_{can}$

Figura: Fibra de $\mathfrak{C}_{can}$ sobre 2

Exemple (VII)

- Fòrmula d'adjunció: $\Gamma_2' \cdot K_{\mathfrak{C}_{min}/\mathbb{Z}} = 0$
- Model canònic $\mathfrak{C}_{can}$

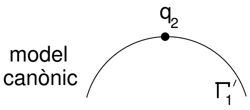

Figura: Fibra de $\mathfrak{C}_{can}$ sobre 2

Resum del Exemple

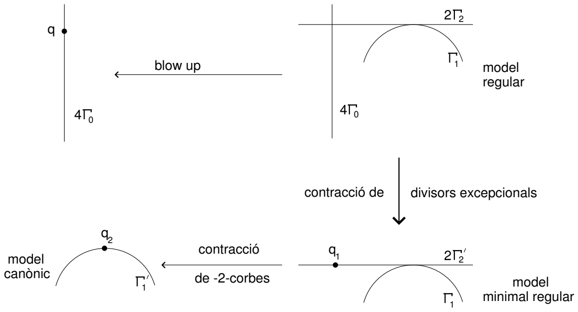

Figura: Models de la corba de Fermat.

Corbes el·líptiques

- A anell de Dedekind, K cos de fraccions
- E: $y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 = x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3$, $a_1, \ldots a_6 \in K$
- Si $a_1, \ldots a_6 \in A$, *model de Weierstrass*:

$$W = \mathrm{Proj}\ A[x, y, z]/(y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 - (x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3))$$

Corbes el·líptiques

- A anell de Dedekind, K cos de fraccions
- E: $y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 = x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3$, $a_1, \dots a_6 \in K$
- Si $a_1, \dots a_6 \in A$, *model de Weierstrass*:

  $W = \mathrm{Proj}\ A[x, y, z]/(y^2z + a_1xyz + a_3yz^2 - (x^3 + a_2x^2z + a_4xz^2 + a_6z^3))$

Model minimal de Weierstrass

- **Definició.** *W minimal per $s \in S = \mathrm{Spec}(A)$* si $\nu_s(\Delta_W)$ és mínim.
- **Definició.** *W minimal* si és minimal per a tot $s \in \mathrm{Spec}(A)$.
- Relació amb $\mathfrak{C}_{min}$?

Model minimal de Weierstrass

- **Definició.** W *minimal per* $s \in S = \mathrm{Spec}(A)$ si $\nu_s(\Delta_W)$ és mínim.
- **Definició.** W *minimal* si és minimal per a tot $s \in \mathrm{Spec}(A)$.
- Relació amb $\mathfrak{C}_{min}$?

Model minimal de Weierstrass

- **Definició.** *W minimal per* $s \in S = \mathrm{Spec}(A)$ si $\nu_s(\Delta_W)$ és mínim.
- **Definició.** *W minimal* si és minimal per a tot $s \in \mathrm{Spec}(A)$.
- Relació amb $\mathfrak{C}_{min}$?

Relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- E corba el·líptica sobre K, $S = \mathrm{Spec}(A)$
- **Teorema.** $a)$ $\mathcal{E} :=$ divisors primers verticals Γ de $\mathfrak{C}_{min}$ tal que $\Gamma \cap \overline{\{o\}} = \emptyset$. $\mathcal{E}$ és finit.
  $b)$ $\exists$ contracció $f : \mathfrak{C}_{min} \to \tilde{\mathfrak{C}}$ dels divisors de $\mathcal{E}$
  $c)$ Si E admet un model minimal $W \Rightarrow W \simeq \tilde{\mathfrak{C}}$
- El model minimal de Weierstrass és únic.

Relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- E corba el·líptica sobre K, $S = \mathrm{Spec}(A)$
- **Teorema.** a) $\mathcal{E} :=$ divisors primers verticals Γ de $\mathfrak{C}_{min}$ tal que $\Gamma \cap \overline{\{o\}} = \emptyset$. $\mathcal{E}$ és finit.
  b) $\exists$ contracció $f : \mathfrak{C}_{min} \to \tilde{\mathfrak{C}}$ dels divisors de $\mathcal{E}$
  c) Si E admet un model minimal $W \Rightarrow W \simeq \tilde{\mathfrak{C}}$
- El model minimal de Weierstrass és únic.

Relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- E corba el·líptica sobre K, $S = \mathrm{Spec}(A)$
- **Teorema.** *a*) $\mathcal{E}$:= divisors primers verticals Γ de $\mathfrak{C}_{min}$ tal que $\Gamma \cap \overline{\{o\}} = \emptyset$. $\mathcal{E}$ és finit.
  b) $\exists$ contracció $f : \mathfrak{C}_{min} \to \tilde{\mathfrak{C}}$ dels divisors de $\mathcal{E}$
  c) Si E admet un model minimal $W \Rightarrow W \simeq \tilde{\mathfrak{C}}$
- El model minimal de Weierstrass és únic.

Relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- E corba el·líptica sobre K, $S = \mathrm{Spec}(A)$
- **Teorema.** a) $\mathcal{E} :=$ divisors primers verticals Γ de $\mathfrak{C}_{min}$ tal que $\Gamma \cap \overline{\{o\}} = \emptyset$. $\mathcal{E}$ és finit.
  b) $\exists$ contracció $f : \mathfrak{C}_{min} \to \tilde{\mathfrak{C}}$ dels divisors de $\mathcal{E}$
  c) Si E admet un model minimal $W \Rightarrow W \simeq \tilde{\mathfrak{C}}$
- El model minimal de Weierstrass és únic.

Outline

Introducció

Model regular minimal

Model canònic

Reducció i models estables

Reducció de corbes

- C corba normal i projectiva sobre K, $s \in S$
- *Reducció en s* $\Rightarrow$ Fibra $\mathfrak{C}_s$ d'un model de C sobre S.
- $\Rightarrow$ Depén del model escollit.
- *Bona reducció en s* $\Rightarrow \exists$ un model llis $\mathfrak{C} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$

Reducció de corbes

- C corba normal i projectiva sobre K, $s \in S$
- *Reducció en s* $\Rightarrow$ Fibra $\mathfrak{C}_s$ d'un model de C sobre S.
- $\Rightarrow$ Depén del model escollit.
- *Bona reducció en s* $\Rightarrow$ $\exists$ un model llis $\mathfrak{C} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$

Reducció de corbes

- C corba normal i projectiva sobre K, $s \in S$
- *Reducció en s* $\Rightarrow$ Fibra $\mathfrak{C}_s$ d'un model de C sobre S.
- $\Rightarrow$ Depén del model escollit.
- *Bona reducció en s* $\Rightarrow$ $\exists$ un model llis $\mathfrak{C} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$

Reducció de corbes

- C corba normal i projectiva sobre K, $s \in S$
- *Reducció en s* $\Rightarrow$ Fibra $\mathfrak{C}_s$ d'un model de C sobre S.
- $\Rightarrow$ Depén del model escollit.
- *Bona reducció en s* $\Rightarrow \exists$ un model llis $\mathfrak{C} \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$

Exemple de reducció

- $p \neq 2$, $C : \mathrm{Proj}\ \mathbb{Q}[x, y, z]/(xy - p^2z^2)$.
- Dos models :
  $\mathfrak{C}_1 = \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[x, y, z]/(xy - p^2z^2)$
  $\mathfrak{C}_2 = \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[x, y, z]/(xy - z^2)$
- $\mathfrak{C}_2$ és llis, $\mathfrak{C}_1$ no.

Exemple de reducció

- $p \neq 2$, $C : \mathrm{Proj}\ \mathbb{Q}[x, y, z]/(xy - p^2 z^2)$.
- Dos models :
  $\mathfrak{C}_1 = \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[x, y, z]/(xy - p^2 z^2)$
  $\mathfrak{C}_2 = \mathrm{Proj}\ \mathbb{Z}[x, y, z]/(xy - z^2)$
- $\mathfrak{C}_2$ és llis, $\mathfrak{C}_1$ no.

Propietats i relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- C corba llisa i projectiva sobre K, $g(C) \geq 1$
- **Teorema.** a) Punts de mala reducció $\Rightarrow$ conjunt finit.
  b) Bona reducció sobre $S \Leftrightarrow \mathfrak{C}_{min}$ és llis.
  c) Si $\exists$ model llis, és únic.
- **Corol·lari.** E corba el·líptica sobre K, W model minimal de Weierstrass sobre $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$
  i) E té bona reducció en S
  ii) W_s llis sobre $k(s)$.
  iii) $\Delta \in \mathcal{O}^*_{S,s}$

Propietats i relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- C corba llisa i projectiva sobre K, $g(C) \geq 1$
- **Teorema.** a) Punts de mala reducció $\Rightarrow$ conjunt finit.
  b) Bona reducció sobre $S \Leftrightarrow \mathfrak{C}_{min}$ és llis.
  c) Si $\exists$ model llis, és únic.
- **Corol·lari.** E corba el·líptica sobre K, W model minimal de Weierstrass sobre $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$
  i) E té bona reducció en S
  ii) W_s llis sobre $k(s)$.
  iii) $\Delta \in \mathcal{O}_{S,s}^*$

Propietats i relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- C corba llisa i projectiva sobre K, $g(C) \geq 1$
- **Teorema.** a) Punts de mala reducció $\Rightarrow$ conjunt finit.
  b) Bona reducció sobre $S \Leftrightarrow \mathfrak{C}_{min}$ és llis.
  c) Si $\exists$ model llis, és únic.
- **Corol·lari.** E corba el·líptica sobre K, W model minimal de Weierstrass sobre $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$
  i) E té bona reducció en S
  ii) W_s llis sobre $k(s)$.
  iii) $\Delta \in \mathcal{O}_{S,s}^*$

Propietats i relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- C corba llisa i projectiva sobre K, $g(C) \geq 1$
- **Teorema.** a) Punts de mala reducció $\Rightarrow$ conjunt finit.
  b) Bona reducció sobre $S \Leftrightarrow \mathfrak{C}_{min}$ és llis.
  c) Si $\exists$ model llis, és únic.
- **Corol·lari.** E corba el·líptica sobre K, W model minimal de Weierstrass sobre $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$
  i) E té bona reducció en S
  ii) W_s llis sobre $k(s)$.
  iii) $\Delta \in \mathcal{O}^*_{S,s}$

Propietats i relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- C corba llisa i projectiva sobre K, $g(C) \geq 1$
- **Teorema.** *a*) Punts de mala reducció $\Rightarrow$ conjunt finit.
  b) Bona reducció sobre $S \Leftrightarrow \mathfrak{C}_{min}$ és llis.
  c) Si $\exists$ model llis, és únic.
- **Corol·lari.** E corba el·líptica sobre K, W model minimal de Weierstrass sobre $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$
  i) E té bona reducció en S
  ii) W_s llis sobre $k(s)$.
  iii) $\Delta \in \mathcal{O}^*_{S,s}$

Propietats i relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- C corba llisa i projectiva sobre K, $g(C) \geq 1$
- **Teorema.** a) Punts de mala reducció $\Rightarrow$ conjunt finit.
  b) Bona reducció sobre $S \Leftrightarrow \mathfrak{C}_{min}$ és llis.
  c) Si $\exists$ model llis, és únic.
- **Corol·lari.** E corba el·líptica sobre K, W model minimal de Weierstrass sobre $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$
  i) E té bona reducció en S
  ii) W_s llis sobre $k(s)$.
  iii) $\Delta \in \mathcal{O}^*_{S,s}$

Propietats i relació amb $\mathfrak{C}_{min}$

- C corba llisa i projectiva sobre K, $g(C) \geq 1$
- **Teorema.** *a*) Punts de mala reducció $\Rightarrow$ conjunt finit.
  b) Bona reducció sobre $S \Leftrightarrow \mathfrak{C}_{min}$ és llis.
  c) Si $\exists$ model llis, és únic.
- **Corol·lari.** E corba el·líptica sobre K, W model minimal de Weierstrass sobre $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$
  i) E té bona reducció en S
  ii) W_s llis sobre $k(s)$.
  iii) $\Delta \in \mathcal{O}_{S,s}^*$

Bona reducció potencial

- C corba llisa i projectiva sobre K
- *Bona reducció potencial* en $s \in S$: $\exists$ A' anell de Dedekind, $f : \mathrm{Spec}(A') \to S$ i s' amb $f(s') = s$ tal que C_L té bona reducció en s'.

Estabilitat

- C corba llisa i projectiva sobre K
- x *punt doble ordinari* $\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{C,x}} \simeq k[[T_1, T_2]]/(T_1 T_2)$
- C *semiestable* $\Leftrightarrow C_{\overline{K}}$ reduïda amb punts singulars dobles
- C *estable*: semiestable i
  i) $C_{\overline{K}}$ connexa amb $p_a(C_{\overline{K}}) \geq 2$
  ii) $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ component irreductible de $C_{\overline{K}} \Rightarrow \Gamma$ talla a les altres components en 3 o més punts.

Estabilitat

- C corba llisa i projectiva sobre K
- *x punt doble ordinari* $\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{C,x}} \simeq k[[T_1, T_2]]/(T_1 T_2)$
- *C semiestable* $\Leftrightarrow C_{\overline{K}}$ reduïda amb punts singulars dobles
- C *estable*: semiestable i
  i) $C_{\overline{K}}$ connexa amb $p_a(C_{\overline{K}}) \geq 2$
  ii) $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ component irreductible de $C_{\overline{K}} \Rightarrow \Gamma$ talla a les altres components en 3 o més punts.

Estabilitat

- C corba llisa i projectiva sobre K
- *x punt doble ordinari* $\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{C,x}} \simeq k[[T_1, T_2]]/(T_1 T_2)$
- C *semiestable* $\Leftrightarrow C_{\overline{K}}$ reduïda amb punts singulars dobles
- C *estable*: semiestable i

  i) $C_{\overline{K}}$ connexa amb $p_a(C_{\overline{K}}) \geq 2$
  ii) $\Gamma \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ component irreductible de $C_{\overline{K}} \Rightarrow \Gamma$ talla a les altres components en 3 o més punts.

Estabilitat

- C corba llisa i projectiva sobre K
- *x punt doble ordinari* $\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{C,x}} \simeq k[[T_1, T_2]]/(T_1 T_2)$
- C *semiestable* $\Leftrightarrow C_{\overline{K}}$ reduïda amb punts singulars dobles
- C *estable*: semiestable i
  $i)$ $C_{\overline{K}}$ connexa amb $p_a(C_{\overline{K}}) \geq 2$
  $ii)$ $\overline{\Gamma} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ component irreductible de $C_{\overline{K}} \Rightarrow \Gamma$ talla a les altres components en 3 o més punts.

Estabilitat

- C corba llisa i projectiva sobre K
- x *punt doble ordinari* $\Leftrightarrow \widehat{\mathcal{O}_{C,x}} \simeq k[[T_1, T_2]]/(T_1 T_2)$
- C *semiestable* $\Leftrightarrow C_{\overline{K}}$ reduïda amb punts singulars dobles
- C *estable*: semiestable i
  i) $C_{\overline{K}}$ connexa amb $p_a(C_{\overline{K}}) \geq 2$
  ii) $\overline{\Gamma} \simeq \mathbb{P}^1_{\overline{K}}$ component irreductible de $C_{\overline{K}} \Rightarrow \Gamma$ talla a les altres components en 3 o més punts.

Exemple: corbes estables de gènere 2

- C corba estable sobre $K = \overline{K}$ amb components irreductibles $X_1, \ldots, X_n$.
- $p_a(X) + n - 1 = \sum_{i=1}^{n} p_a(X_i') + S$.

Figura: Corbes estables de gènere 2.

Exemple: corbes estables de gènere 2

- C corba estable sobre $K = \overline{K}$ amb components irreductibles $X_1, \ldots, X_n$.
- $p_a(X) + n - 1 = \sum_{i=1}^{n} p_a(X_i') + S$.

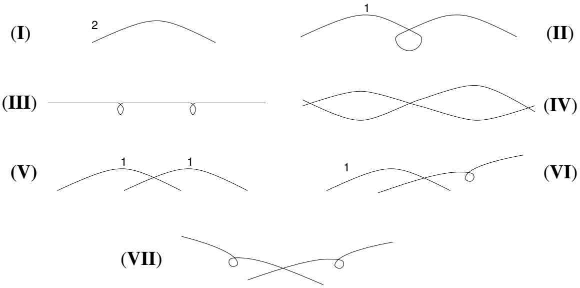

Figura: Corbes estables de gènere 2.

Reducció estable

- $X \to S$ sup. aritmètica. X *semiestable* $\Leftrightarrow$ X_s semiestable $\forall s$.
- $X \to S$ *estable* $\Leftrightarrow$ X propi amb fibres estables.
- C té reducció semiestable (estable) en s $\Leftrightarrow$ $\exists\ \mathfrak{C} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ semiestable (estable).
- Existència models estables?

Reducció estable

- $X \rightarrow S$ sup. aritmètica. X *semiestable* $\Leftrightarrow X_s$ semiestable $\forall s$.
- $X \rightarrow S$ *estable* $\Leftrightarrow X$ propi amb fibres estables.
- C té reducció semiestable (estable) en $s \Leftrightarrow \exists\ \mathfrak{C} \rightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ semiestable (estable).
- Existència models estables?

Reducció estable

- $X \to S$ sup. aritmètica. X *semiestable* $\Leftrightarrow X_s$ semiestable $\forall s$.
- $X \to S$ *estable* $\Leftrightarrow X$ propi amb fibres estables.
- C té reducció semiestable (estable) en $s \Leftrightarrow \exists\ \mathfrak{C} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ semiestable (estable).
- Existència models estables?

Reducció estable

- $X \to S$ sup. aritmètica. X *semiestable* $\Leftrightarrow$ X_s semiestable $\forall s$.
- $X \to S$ *estable* $\Leftrightarrow$ X propi amb fibres estables.
- C té reducció semiestable (estable) en s $\Leftrightarrow$ $\exists\ \mathfrak{C} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ semiestable (estable).
- Existència models estables?

Existència

- Sigui C corba projectiva llisa sobre K, $g \geq 1$.
- Si C té reducció semiestable sobre S:

a) $\mathfrak{C}_{min}$ de C sobre S és semiestable.

b) Si $g \geq 2$ i C és geomètricament connex sobre $K \Rightarrow \mathfrak{C}_{can}$ és l'únic model estable sobre S.

c) Si C té reducció estable sobre S, aleshores té un model estable sobre S.

Existència

- Sigui C corba projectiva llisa sobre K, $g \geq 1$.
- Si C té reducció semiestable sobre S:

a) $\mathfrak{C}_{min}$ de C sobre S és semiestable.

b) Si $g \geq 2$ i C és geomètricament connex sobre $K \Rightarrow \mathfrak{C}_{can}$ és l'únic model estable sobre S.

c) Si C té reducció estable sobre S, aleshores té un model estable sobre S.

Existència

- Sigui C corba projectiva llisa sobre K, $g \geq 1$.
- Si C té reducció semiestable sobre S:

a) $\mathfrak{C}_{min}$ de C sobre S és semiestable.

b) Si $g \geq 2$ i C és geomètricament connex sobre $K \Rightarrow \mathfrak{C}_{can}$ és l'únic model estable sobre S.

c) Si C té reducció estable sobre S, aleshores té un model estable sobre S.

Teorema de Deligne-Mumford

- L/K extensió de cossos, A' clausura integral de A en K, $S = \mathrm{Spec}(A')$
- **Teorema.** C una corba llisa, projectiva i geomètricament connexa sobre K, $g \geq 2$. Aleshores existeix una extensió finita i separable L/K tal que C_L té un únic model estable sobre S'.

Teorema de Deligne-Mumford

- L/K extensió de cossos, A' clausura integral de A en K, $S = \mathrm{Spec}(A')$
- **Teorema.** C una corba llisa, projectiva i geomètricament connexa sobre K, $g \geq 2$. Aleshores existeix una extensió finita i separable L/K tal que C_L té un únic model estable sobre S'.

Models minimals, canònics i estables

Luis E. García

Departament de Matemàtica Aplicada 4
Universitat Politècnica de Catalunya