Introducció a la aritmètica de les corbes de gènere alt: Gonalitat

Xavier Xarles

Barcelona

24 de Gener de 2011

Notacions

k: cos perfecte de característica 0 o característica $p \geq 0$ (a vegades $p \neq 2$).

Notacions

k: cos perfecte de característica 0 o característica $p \geq 0$ (a vegades $p \neq 2$).

El cos k serà normalment un cos de nombres.

Notacions

k: cos perfecte de característica 0 o característica $p \geq 0$ (a vegades $p \neq 2$).

El cos k serà normalment un cos de nombres.

Corba C: Corba geomètricament connexa, llisa i projectiva sobre el cos k.

Com és una corba "típica" de gènere g?

Si el gènere és 0, és una recta, o una cònica, o ...?

Com és una corba "típica" de gènere g?

Si el gènere és 0, és una recta, o una cònica, o ...?

Si el gènere és 1, és una cúbica?

Com és una corba "típica" de gènere g?

Si el gènere és 0, és una recta, o una cònica, o ...?

Si el gènere és 1, és una cúbica?

Si el gènere és 2, és hiperel·líptica?

Com és una corba "típica" de gènere g?

Si el gènere és 0, és una recta, o una cònica, o ...?

Si el gènere és 1, és una cúbica?

Si el gènere és 2, és hiperel·líptica?

Si el gènere és 3, és una quàrtica?

Com és una corba "típica" de gènere g?

Si el gènere és 0, és una recta, o una cònica, o ...?

Si el gènere és 1, és una cúbica?

Si el gènere és 2, és hiperel·líptica?

Si el gènere és 3, és una quàrtica?

I si el gènere és 4?

Com és una corba "típica" de gènere g?

Si el gènere és 0, és una recta, o una cònica, o ...?

Si el gènere és 1, és una cúbica?

Si el gènere és 2, és hiperel·líptica?

Si el gènere és 3, és una quàrtica?

I si el gènere és 4?

I si el gènere és 5, 6, etc... ?

Gènere 0

Tota corba C de gènere 0 sobre un cos és isomorfa a una cònica: i.e. d'equació

$$a\,X^2 + b\,Y^2 + c\,Z^2 = 0$$

per certs $a, b, c \in k$.

Gènere 0

Tota corba C de gènere 0 sobre un cos és isomorfa a una cònica: i.e. d'equació

$$a\,X^2 + b\,Y^2 + c\,Z^2 = 0$$

per certs $a, b, c \in k$.

Si $C(k) \neq \emptyset$, aleshores $C \cong \mathbb{P}^1$.

Gènere 0

Tota corba C de gènere 0 sobre un cos és isomorfa a una cònica: i.e. d'equació

$$a\,X^2 + b\,Y^2 + c\,Z^2 = 0$$

per certs $a, b, c \in k$.

Si $C(k) \neq \emptyset$, aleshores $C \cong \mathbb{P}^1$.

Si C té un k-divisor de grau senar, aleshores $C \cong \mathbb{P}^1$.

Divisors i morfismes a $\mathbb{P}^n$.

Sigui C una corba de gènere g, i D un divisor k-racional de grau d, amb fibrat de línia associat $\mathcal{O}(D)$.

Divisors i morfismes a $\mathbb{P}^n$.

Sigui C una corba de gènere g, i D un divisor k-racional de grau d, amb fibrat de línia associat $\mathcal{O}(D)$.

Denotem per

$$L(D) := \{f : C \to \mathbb{P}^1 \mid div(f) + D \geq 0\}$$

Divisors i morfismes a $\mathbb{P}^n$.

Sigui C una corba de gènere g, i D un divisor k-racional de grau d, amb fibrat de línia associat $\mathcal{O}(D)$.

Denotem per

$$L(D) := \{f : C \to \mathbb{P}^1 \mid div(f) + D \geq 0\}$$

Teorema de Riemann-Roch (R-R):

$$\dim L(D) + \dim L(K - D) = \deg D - g + 1$$

Divisors i morfismes a $\mathbb{P}^n$.

Sigui C una corba de gènere g, i D un divisor k-racional de grau d, amb fibrat de línia associat $\mathcal{O}(D)$.

Denotem per

$$L(D) := \{f : C \to \mathbb{P}^1 \mid div(f) + D \geq 0\}$$

Teorema de Riemann-Roch (R-R):

$$\dim L(D) + \dim L(K - D) = \deg D - g + 1$$

Donat un divisor efectiu k-racional D de grau $\geq g + 1$, tenim que $\dim L(D) > 1$ (R.R.).

Divisors i morfismes a $\mathbb{P}^n$.

Sigui C una corba de gènere g, i D un divisor k-racional de grau d, amb fibrat de línia associat $\mathcal{O}(D)$.

Denotem per

$$L(D) := \{f : C \to \mathbb{P}^1 \mid div(f) + D \geq 0\}$$

Teorema de Riemann-Roch (R-R):

$$\dim L(D) + \dim L(K - D) = \deg D - g + 1$$

Donat un divisor efectiu k-racional D de grau $\geq g + 1$, tenim que $\dim L(D) > 1$ (R.R.).

Un divisor efectiu k-racional D tal que $\ell := \dim L(D) > 1$ ens determina un morfisme $f : C \to \mathbb{P}^{\ell-1}$.

Gènere 0: Perquè?

Tota corba C de gènere 0 té algun divisor k-racional de grau 2: un divisor anticanònic $-K$.

Gènere 0: Perquè?

Tota corba C de gènere 0 té algun divisor k-racional de grau 2: un divisor anticanònic $-K$.

(Recordem que $\deg(K) = 2g - 2$, on g és el gènere de la corba C.)

Gènere 0: Perquè?

Tota corba C de gènere 0 té algun divisor k-racional de grau 2: un divisor anticanònic $-K$.

(Recordem que $\deg(K) = 2g - 2$, on g és el gènere de la corba C.)

R-R ens diu que $\dim L(-K) = 3$. A més és molt ample.

Gènere 0: Perquè?

Tota corba C de gènere 0 té algun divisor k-racional de grau 2: un divisor anticanònic $-K$.

(Recordem que $\deg(K) = 2g - 2$, on g és el gènere de la corba C.)

R-R ens diu que $\dim L(-K) = 3$. A més és molt ample.

Per tant, D ens determina una immersió a $\mathbb{P}^2$ com a una corba de grau 2.

Gènere 0: Perquè?

Tota corba C de gènere 0 té algun divisor k-racional de grau 2: un divisor anticanònic $-K$.

(Recordem que $\deg(K) = 2g - 2$, on g és el gènere de la corba C.)

R-R ens diu que $\dim L(-K) = 3$. A més és molt ample.

Per tant, D ens determina una immersió a $\mathbb{P}^2$ com a una corba de grau 2.

Si tinguéssim un divisor de grau 1, ens donaria un morfisme de grau 1 a $\mathbb{P}^1$.

Gènere 1

Tota corba C de gènere 1 amb un punt k-racional P és isomorfa a una corba el·líptica en forma de Weierstrass.

Gènere 1

Tota corba C de gènere 1 amb un punt k-racional P és isomorfa a una corba el·líptica en forma de Weierstrass.

(El divisor $2P$ té grau 2, i ens dona el morfisme de grau 2 a $\mathbb{P}^1$.)

Gènere 1

Tota corba C de gènere 1 amb un punt k-racional P és isomorfa a una corba el·líptica en forma de Weierstrass.

(El divisor $2P$ té grau 2, i ens dona el morfisme de grau 2 a $\mathbb{P}^1$.)

Donat un cos de nombres k qualsevol i un $n \geq 2$, hi ha infinites corbes de gènere 1 amb gonalitat n sobre k.

Gonalitat

Donada una corba C de gènere g sobre un cos k, la gonalitat sobre k de C, $\gamma_k(C)$, és el mínim grau d'un morfisme $f : C \to \mathbb{P}^1$.

Gonalitat

Donada una corba C de gènere g sobre un cos k, la gonalitat sobre k de C, $\gamma_k(C)$, és el mínim grau d'un morfisme $f : C \to \mathbb{P}^1$.

(Compte: Hi ha qui defineix la gonalitat com la gonalitat a la clausura algebraica.

Gonalitat

Donada una corba C de gènere g sobre un cos k, la gonalitat sobre k de C, $\gamma_k(C)$, és el mínim grau d'un morfisme $f : C \to \mathbb{P}^1$.

(Compte: Hi ha qui defineix la gonalitat com la gonalitat a la clausura algebraica.

També n'hi ha que sols ho defineixen per a corbes amb $g > 1$.)

Gonalitat: Exemples

- $g = 0$ implica $\gamma_k \leq 2$

Gonalitat: Exemples

- $g = 0$ implica $\gamma_k \leq 2$
- $g = 0$ i $\exists D$ divisor de grau 1 si i només si $\gamma_k = 1$

Gonalitat: Exemples

- $g = 0$ implica $\gamma_k \leq 2$
- $g = 0$ i $\exists D$ divisor de grau 1 si i només si $\gamma_k = 1$
- $g = 1$ i $C(k) \neq \emptyset$ implica $\gamma_k = 2$.

Gonalitat: Exemples

- $g = 0$ implica $\gamma_k \leq 2$
- $g = 0$ i $\exists D$ divisor de grau 1 si i només si $\gamma_k = 1$
- $g = 1$ i $C(k) \neq \emptyset$ implica $\gamma_k = 2$.
- $\gamma_k = 2$ i $g \geq 2$, diem que C és hiperel·líptica.

Gonalitat: Exemples

- $g = 0$ implica $\gamma_k \leq 2$
- $g = 0$ i $\exists D$ divisor de grau 1 si i només si $\gamma_k = 1$
- $g = 1$ i $C(k) \neq \emptyset$ implica $\gamma_k = 2$.
- $\gamma_k = 2$ i $g \geq 2$, diem que C és hiperel·líptica.
- $\gamma_k = 3$ i $g \geq 2$, diem que C és trigonal.

Gènere 2

Tota corba C de gènere 2 sobre un cos k té gonalitat 2 sobre k.

Gènere 2

Tota corba C de gènere 2 sobre un cos k té gonalitat 2 sobre k.

Tota corba de gènere 2 és hiperel·líptica, donada per un model pla (singular) amb una equació de la forma

$$y^2 = p(x)$$

amb $\deg(p(x)) = 6$.

Gènere 2

Tota corba C de gènere 2 sobre un cos k té gonalitat 2 sobre k.

Tota corba de gènere 2 és hiperel·líptica, donada per un model pla (singular) amb una equació de la forma

$$y^2 = p(x)$$

amb $\deg(p(x)) = 6$.

(En general, una corba hiperel·líptica de gènere g és de la forma anterior amb $\deg(p(x)) = 2g + 2$.)

Gènere 2: Perquè?

Tota corba C de gènere 2 sobre un cos k té un divisor racional de grau 2: el canònic K.

Gènere 2: Perquè?

Tota corba C de gènere 2 sobre un cos k té un divisor racional de grau 2: el canònic K.

R-R ens diu que $\dim L(K) = g = 2$.

Gènere 2: Perquè?

Tota corba C de gènere 2 sobre un cos k té un divisor racional de grau 2: el canònic K.

R-R ens diu que $\dim L(K) = g = 2$.

Obtenim un morfisme $\phi : C \to \mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}^1$ de grau 2.

Gènere 3

Tota corba C de gènere 3 és

Gènere 3

Tota corba C de gènere 3 és o hiperel·líptica o quàrtica a $\mathbb{P}^2$.

Gènere 3

Tota corba C de gènere 3 és o geomètricament hiperel·líptica o quàrtica a $\mathbb{P}^2$.

Gènere 3

Tota corba C de gènere 3 és o geomètricament hiperel·líptica o quàrtica a $\mathbb{P}^2$.
Exemple.

$$C: \left.\begin{array}{rl} y^2 = & -x^2 - 1 \\ z^2 = & x^3 + 1 \end{array}\right\} \subset \mathbb{A}^3$$

té un morfisme de grau 2 a la cònica d'equació

$$x^2 + y^2 = -1,$$

que no té punts a $\mathbb{Q}$. Té gènere 3 i no és hiperel·líptica sobre $\mathbb{Q}$.

Més sobre corbes hiperel·líptiques

Tota corba C hiperel·líptica sobre k té un únic morfisme ψ de grau 2 a $\mathbb{P}^1$.

Més sobre corbes hiperel·líptiques

Tota corba C hiperel·líptica sobre k té un únic morfisme ψ de grau 2 a $\mathbb{P}^1$.

El morfisme $\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ associat al feix canonic K és la composició de ψ amb el morfisme de Veronese $\nu : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ donat per

$$\nu(x) = [1 : x : x^2 : \cdots : x^{g-1}].$$

Més sobre corbes hiperel·líptiques

Tota corba C hiperel·líptica sobre k té un únic morfisme ψ de grau 2 a $\mathbb{P}^1$.

El morfisme $\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ associat al feix canonic K és la composició de ψ amb el morfisme de Veronese $\nu : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ donat per

$$\nu(x) = [1 : x : x^2 : \cdots : x^{g-1}].$$

Demostració: Preneu com a base del feix ω els diferencials

$$\frac{dx}{y},\ x\frac{dx}{y}, \ldots, x^{g-1}\frac{dx}{y}.$$

Més sobre corbes hiperel·líptiques II

Teorema(Mestre)
Tota corba C sobre un cos k, de gènere parell, i hiperel·líptica sobre la clausura algebraica de k, és hiperel·líptica sobre k.

Més sobre corbes hiperel·líptiques II

Teorema(Mestre)
Tota corba C sobre un cos k, de gènere parell, i hiperel·líptica sobre la clausura algebraica de k, és hiperel·líptica sobre k.

Demostració:
La imatge del morfisme $\phi : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ associat al feix canonic K és una corba de gènere 0 i grau $g-1$ a $\mathbb{P}^{g-1}$.

Més sobre corbes hiperel·líptiques II

Teorema(Mestre)
Tota corba C sobre un cos k, de gènere parell, i hiperel·líptica sobre la clausura algebraica de k, és hiperel·líptica sobre k.

Demostració:
La imatge del morfisme $\phi : C \to \mathbb{P}^{g-1}$ associat al feix canonic K és una corba de gènere 0 i grau $g-1$ a $\mathbb{P}^{g-1}$.

Qualsevol secció hiperplana ens dona un divisor k-racional de grau $g-1$, senar.

Més sobre corbes hiperel·líptiques III

Sigui k un cos en que no tota cónica té punts. Per a tot g senar, hi ha corbes C sobre k, de gènere g, hiperel·líptiques sobre la clausura algebraica de k, i no sobre k.

Més sobre corbes hiperel·líptiques III

Sigui k un cos en que no tota cónica té punts. Per a tot g senar, hi ha corbes C sobre k, de gènere g, hiperel·líptiques sobre la clausura algebraica de k, i no sobre k.

Exemple. Prenem una cónica sense punts a k donada per $y^2 = p(x)$, $\deg p(x) = 2$. Prenem un polinomi $q(x)$ amb $\deg q(x) = g$ (o $g+1$), amb $p(x)q(x)$ sense arrels repetides. Considerem

$$C: \left.\begin{array}{rl} y^2 = & p(x) \\ z^2 = & q(x) \end{array}\right\} \subset \mathbb{A}^3.$$

Més sobre corbes hiperel·líptiques III

Sigui k un cos en que no tota cónica té punts. Per a tot g senar, hi ha corbes C sobre k, de gènere g, hiperel·líptiques sobre la clausura algebraica de k, i no sobre k.

Exemple. Prenem una cónica sense punts a k donada per $y^2 = p(x)$, $\deg p(x) = 2$. Prenem un polinomi $q(x)$ amb $\deg q(x) = g$ (o $g+1$), amb $p(x)q(x)$ sense arrels repetides. Considerem

$$C : \left.\begin{array}{rl} y^2 = & p(x) \\ z^2 = & q(x) \end{array}\right\} \subset \mathbb{A}^3.$$

Observeu que tenim dos morfismes a corbes hiperel·líptiques donades per $H_1 : y^2 = q(x)$ i $H_2 : y^2 = p(x)q(x)$. Es pot veure que $\operatorname{Jac} C \sim \operatorname{Jac} H_1 \times \operatorname{Jac} H_2$.

Gènere 3: Perquè?

Proposició
Sigui C una corba de gènere $g > 2$ i no geomètricament hiperel·líptica. Aleshores el morfisme $\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ és una immersió (la immersió canònica), i la seva imatge és una corba de grau $2g-2$.

Gènere 3: Perquè?

Proposició
Sigui C una corba de gènere $g > 2$ i no geomètricament hiperel·líptica. Aleshores el morfisme $\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ és una immersió (la immersió canònica), i la seva imatge és una corba de grau $2g - 2$.

Dit d'una altre manera, el feix canònic K és molt ample si i només sí C no és geomètricament hiperel·líptica

Gènere 3: Perquè?

Proposició
Sigui C una corba de gènere $g > 2$ i no geomètricament hiperel·líptica. Aleshores el morfisme $\phi : C \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ és una immersió (la immersió canònica), i la seva imatge és una corba de grau $2g - 2$.

Dit d'una altre manera, el feix canònic K és molt ample si i només sí C no és geomètricament hiperel·líptica

En el cas $g = 3$, obtenim que C és aleshores una quàrtica a $\mathbb{P}^2$.

Gènere 3 i gonalitat

C una corba de gènere 3.

Gènere 3 i gonalitat

C una corba de gènere 3.

C hiperel·líptica $\Leftrightarrow \gamma = 2$

Gènere 3 i gonalitat

C una corba de gènere 3.

C hiperel·líptica $\Leftrightarrow \gamma = 2$

C geomètricament hiperel·líptica $\Rightarrow \gamma = 4$

Gènere 3 i gonalitat

C una corba de gènere 3.

C hiperel·líptica $\Leftrightarrow \gamma = 2$

C geomètricament hiperel·líptica $\Rightarrow \gamma = 4$

C quàrtica plana. Aleshores

$$C(k) \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma = 3.$$

Si no, $\gamma = 4$

Gènere 4

Sigui C una corba de gènere $g = 4$. Aleshores

Gènere 4

Sigui C una corba de gènere $g = 4$. Aleshores

C és hiperel·líptica o

Gènere 4

Sigui C una corba de gènere $g = 4$. Aleshores

C és hiperel·líptica o

$\phi(C) \subset \mathbb{P}^3$ és la intersecció d'una quàdrica i una cúbica.

Gènere 4

Sigui C una corba de gènere $g = 4$. Aleshores

C és hiperel·líptica o

$\phi(C) \subset \mathbb{P}^3$ és la intersecció d'una quàdrica i una cúbica.

Exemple:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= t^2 \\ y^3 + xy^2 + xt^2 &= xz^2 + yz^2 \end{aligned}$$

Gènere 4

Sigui C una corba de gènere $g = 4$. Aleshores

C és hiperel·líptica o

$\phi(C) \subset \mathbb{P}^3$ és la intersecció d'una quàdrica i una cúbica.

Exemple:

$$\begin{aligned} x^2 + z^2 &= t^2 \\ y^3 + xy^2 + xt^2 &= xz^2 + yz^2 \end{aligned}$$

Exercici: C té morfismes de grau 2 a les corbes el·líptiques donades per

$$y^2 = x^3 + x^2 + x + 1 \text{ i } y^2 = x^3 + x + 1.$$

Teoremes

Teorema(Max Noether)
Sigui C una corba de gènere $g > 2$, no hiperel·líptica. Aleshores $\phi(C)$ està dins de $(g-2)(g-3)/2$ quàdriques independents.

Teoremes

Teorema(Max Noether)
Sigui C una corba de gènere $g > 2$, no hiperel·líptica. Aleshores $\phi(C)$ està dins de $(g-2)(g-3)/2$ quàdriques independents.

Teorema(Enriques-Babbage i Petri)
Sigui C una corba de gènere $g > 2$, no hiperel·líptica. Aleshores $\phi(C)$ és la intersecció de quàdriques i cúbiques.

Teoremes

Teorema(Max Noether)
Sigui C una corba de gènere $g > 2$, no hiperel·líptica. Aleshores $\phi(C)$ està dins de $(g-2)(g-3)/2$ quàdriques independents.

Teorema(Enriques-Babbage i Petri)
Sigui C una corba de gènere $g > 2$, no hiperel·líptica. Aleshores $\phi(C)$ és la intersecció de quàdriques i cúbiques.

A més, $\phi(C)$ és la intersecció de quàdriques si i només si no és ni trigonal ni una quíntica plana.

Gènere 4 i Gonalitat

Sigui C una corba de gènere $g = 4$ sobre un cos k.
Aleshores

Gènere 4 i Gonalitat

Sigui C una corba de gènere $g = 4$ sobre un cos k. Aleshores

$\gamma(C) = 2 \Leftrightarrow \gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és hiperel·líptica.

Gènere 4 i Gonalitat

Sigui C una corba de gènere $g = 4$ sobre un cos k. Aleshores

$\gamma(C) = 2 \Leftrightarrow \gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és hiperel·líptica.

$\gamma(\bar{C}) = 3 \Leftrightarrow$ no és hiperel·líptica.

Gènere 4 i Gonalitat

Sigui C una corba de gènere $g = 4$ sobre un cos k. Aleshores

$\gamma(C) = 2 \Leftrightarrow \gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és hiperel·líptica.

$\gamma(\bar{C}) = 3 \Leftrightarrow$ no és hiperel·líptica.

$\gamma(C) \leq 6$

Gènere 4 i Gonalitat

Sigui C una corba de gènere $g = 4$ sobre un cos k. Aleshores

$\gamma(C) = 2 \Leftrightarrow \gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és hiperel·líptica.

$\gamma(\bar{C}) = 3 \Leftrightarrow$ no és hiperel·líptica.

$\gamma(C) \leq 6$

Si $C(k) \neq \emptyset$, aleshores $\gamma(C) \leq 4$.

Gènere 4 i Gonalitat

Sigui C una corba de gènere $g = 4$ sobre un cos k. Aleshores

$\gamma(C) = 2 \Leftrightarrow \gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és hiperel·líptica.

$\gamma(\bar{C}) = 3 \Leftrightarrow$ no és hiperel·líptica.

$\gamma(C) \leq 6$

Si $C(k) \neq \emptyset$, aleshores $\gamma(C) \leq 4$.

Hi ha exemples de cossos k i corbes C sobre k amb $g(C) = 4$ i $\gamma(C) = i$ per $i = 2, 3, 4, 6$.

Gènere 5

Sigui C una corba de gènere $g = 5$ sobre un cos k.
Aleshores

Gènere 5

Sigui C una corba de gènere $g = 5$ sobre un cos k.
Aleshores

$\gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és geomètricament hiperel·líptica.

Gènere 5

Sigui C una corba de gènere $g = 5$ sobre un cos k. Aleshores

$\gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és geomètricament hiperel·líptica.

$\gamma(\bar{C}) = 3 \Leftrightarrow \phi(C)$ és intersecció de 3 quàdriques i 2 cúbiques a $\mathbb{P}^4$.

Gènere 5

Sigui C una corba de gènere $g = 5$ sobre un cos k. Aleshores

$\gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és geomètricament hiperel·líptica.

$\gamma(\bar{C}) = 3 \Leftrightarrow \phi(C)$ és intersecció de 3 quàdriques i 2 cúbiques a $\mathbb{P}^4$.

$\gamma(\bar{C}) = 4 \Leftrightarrow \phi(C)$ és intersecció de 3 quàdriques a $\mathbb{P}^4$.

Gènere 5

Sigui C una corba de gènere $g = 5$ sobre un cos k. Aleshores

$\gamma(\bar{C}) = 2 \Leftrightarrow$ és geomètricament hiperel·líptica.

$\gamma(\bar{C}) = 3 \Leftrightarrow \phi(C)$ és intersecció de 3 quàdriques i 2 cúbiques a $\mathbb{P}^4$.

$\gamma(\bar{C}) = 4 \Leftrightarrow \phi(C)$ és intersecció de 3 quàdriques a $\mathbb{P}^4$.

El cas trigonal no és intersecció completa.

Gènere 5: Exemples

Exemple: La següent corba té gènere 5 i gonalitat 4:

$$C : \begin{cases} 2x_0^2 - 3x_1^2 + x_2^2 = 0, \\ 5x_0^2 - 6x_1^2 + x_3^2 = 0, \\ 9x_0^2 - 10x_1^2 + x_4^2 = 0, \end{cases} \subset \mathbb{P}^5$$

Gènere 5: Exemples

Exemple: La següent corba té gènere 5 i gonalitat 4:

$$C : \begin{cases} 2x_0^2 - \ 3x_1^2 + x_2^2 = 0, \\ 5x_0^2 - \ 6x_1^2 + x_3^2 = 0, \\ 9x_0^2 - 10x_1^2 + x_4^2 = 0, \end{cases} \subset \mathbb{P}^5$$

Podeu comprovar que té 5 morfismes diferents a les corbes el·líptiques,
$E_0 =$ 1680G2, $E_1 =$ 20160BG2, $E_2 =$ 960H2 , $E_3 =$ 840H2 and $E_4 =$ 360E2.
i que la jacobiana és isogena al seu producte.

Gènere 5: Exemples

Exemple: La corba donada amb una equació plana singular, té gènere 5 i gonalitat 3:$X^5 + XY^3Z + Z^5 = 0$.

Gènere 5: Exemples

Exemple: La corba donada amb una equació plana singular, té gènere 5 i gonalitat 3:$X^5 + XY^3Z + Z^5 = 0$.

La imatge de la immersió canònica és

$$\phi(C) : \left. \begin{array}{rl} x_1x_2 & = x_0x_3 \\ x_1x_3 & = x_0x_4 \\ x_3^2 & = x_2x_4 \\ x_0^2x_1 + x_2^3 & +x_3x_4^2 = 0 \\ x_0x_1^2 + x_2^2x_3 & +x_4^3 = 0 \end{array} \right\} \subset \mathbb{P}^4$$

Teoremes de Gonalitat

k cos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

- $\gamma(C) \leq 2g - 2$ i es dóna la igualtat ("Conjectura de Franchetta").

Teoremes de Gonalitat

k cos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

- $\gamma(C) \leq 2g - 2$ i es dóna la igualtat ("Conjectura de Franchetta").
- Si $C(k) \neq \emptyset$, aleshores $\gamma(C) \leq g$ i es dóna la igualtat.

Teoremes de Gonalitat

k cos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

- $\gamma(C) \leq 2g - 2$ i es dóna la igualtat ("Conjectura de Franchetta").
- Si $C(k) \neq \emptyset$, aleshores $\gamma(C) \leq g$ i es dóna la igualtat.
- Si $k = \bar{k}$, aleshores $\gamma(C) \leq \left\lfloor \frac{g+3}{2} \right\rfloor$ i hi ha exemples per tots els valors intermedis ≥ 2 ("Teoria de Brill-Noether").

Teoremes de Gonalitat

k cos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

- $\gamma(C) \leq 2g - 2$ i es dóna la igualtat ("Conjectura de Franchetta").
- Si $C(k) \neq \emptyset$, aleshores $\gamma(C) \leq g$ i es dóna la igualtat.
- Si $k = \bar{k}$, aleshores $\gamma(C) \leq \left\lfloor \frac{g+3}{2} \right\rfloor$ i hi ha exemples per tots els valors intermedis ≥ 2 ("Teoria de Brill-Noether").
- Si $f : C \to C'$ és un morfisme no constant k-definit, aleshores $\gamma(C) \leq \deg(f)\gamma(C')$ i $\gamma(C') \leq \gamma(C)$.

Com calcular (cotes per) la gonalitat?

k cos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Com calcular (cotes per) la gonalitat?

k cos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Calculant $\gamma(\bar{C}) \leq \gamma$ via "mètodes cohomològics" (conjectura de Green).

Com calcular (cotes per) la gonalitat?

k cos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Calculant $\gamma(\bar{C}) \leq \gamma$ via "mètodes cohomològics" (conjectura de Green).

Es una generalització dels mètodes utilitzant la forma canònica per saber si és hiperel·líptica o trigonal (o quíntica plana)

Com calcular (cotes per) la gonalitat? II

k cos **FINIT**. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Com calcular (cotes per) la gonalitat? II

k cos **FINIT**. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Calculant $\sharp C(k)$.

Com calcular (cotes per) la gonalitat? II

k cos **FINIT**. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Calculant $\sharp C(k)$.

Si tenim un morfisme $f : C \to \mathbb{P}^1$ de grau d, aleshores

$$\sharp C(k) \leq d \sharp \mathbb{P}^1(k) = d(\sharp k + 1)$$

Com calcular (cotes per) la gonalitat? II

k cos **FINIT**. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Calculant $\sharp C(k)$.

Si tenim un morfisme $f\colon C \to \mathbb{P}^1$ de grau d, aleshores

$$\sharp C(k) \leq d \sharp \mathbb{P}^1(k) = d(\sharp k + 1)$$

Per tant

$$\gamma \geq \frac{\sharp C(k)}{\sharp k + 1}$$

Com calcular (cotes per) la gonalitat? III

k cos **GLOBAL**. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Com calcular (cotes per) la gonalitat? III

k cos **GLOBAL**. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Calculant $\sharp C(k_\wp)$, on $k_\wp$ és el cos residual a un primer de bona reducció.

Com calcular (cotes per) la gonalitat? III

k cos **GLOBAL**. C una corba sobre k, de genere $g > 1$ i gonalitat γ.

Calculant $\sharp C(k_\wp)$, on $k_\wp$ és el cos residual a un primer de bona reducció.

Això es degut a que

$$\gamma(C_k) \geq \gamma(C_{k_\wp}) \geq \frac{\sharp C(k_\wp)}{\sharp k_\wp + 1}$$

Com calcular (cotes per) la gonalitat? IV

L/k una extensió de cossos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$, i $\gamma(C_k) = \gamma$

Com calcular (cotes per) la gonalitat? IV

L/k una extensió de cossos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$, i $\gamma(C_k) = \gamma$

Suposem $C(k) \neq \emptyset$.

Aleshores

$$(\gamma(C_L) - 1)^2 \geq \gamma(C_k)$$

Com calcular (cotes per) la gonalitat? IV

L/k una extensió de cossos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$, i $\gamma(C_k) = \gamma$

Suposem $C(k) \neq \emptyset$.

Aleshores

$$(\gamma(C_L) - 1)^2 \geq \gamma(C_k)$$

Degut principalment a la desigualtat de Casnelnuovo-Severi.

Com calcular (cotes per) la gonalitat? IV

L/k una extensió de cossos. C una corba sobre k, de genere $g > 1$, i $\gamma(C_k) = \gamma$

Suposem $C(k) \neq \emptyset$.

Aleshores

$$(\gamma(C_L) - 1)^2 \geq \gamma(C_k)$$

Degut principalment a la desigualtat de Casnelnuovo-Severi.
Combinat amb els anteriors podem obtenir cotes inferiors de la gonalitat sobre qualsevol cos, i es especialment útil per a "corbes modulars".

Exemple: corbes modulars

Sigui $X_0(N) \to X$ un morfisme dominant definit sobre $\mathbb{Q}$, amb X una corba de gènere $g \geq 2$. Sigui p un primer que no divideixi N. Aleshores

Exemple: corbes modulars

Sigui $X_0(N) \to X$ un morfisme dominant definit sobre $\mathbb{Q}$, amb X una corba de gènere $g \geq 2$. Sigui p un primer que no divideixi N. Aleshores

X té bona reducció a p, i, comptant "punts supersingulars", tenim que

$$(p-1)(g-1) \leq \sharp X(\mathbb{F}_{p^2})$$

Exemple: corbes modulars

Sigui $X_0(N) \to X$ un morfisme dominant definit sobre $\mathbb{Q}$, amb X una corba de gènere $g \geq 2$. Sigui p un primer que no divideixi N. Aleshores

X té bona reducció a p, i, comptant "punts supersingulars", tenim que

$$(p-1)(g-1) \leq \sharp X(\mathbb{F}_{p^2})$$

Per tant

$$\gamma(X_{\mathbb{Q}}) \geq \gamma(X_{\mathbb{F}_p}) \geq \gamma(X_{\mathbb{F}_{p^2}}) \geq \frac{(g-1)(p-1)}{p^2+1}$$

Aritmètica i Gonalitat

k cos de nombres. C una corba sobre k, de genere g i gonalitat γ.

Aritmètica i Gonalitat

k cos de nombres. C una corba sobre k, de genere g i gonalitat γ.
Definim els punts de grau d de C som el conjunt

$$C_d(k) := \{P \in C(\bar{k}) \mid [k(P) : k] = d\}.$$

Aritmètica i Gonalitat

k cos de nombres. C una corba sobre k, de genere g i gonalitat γ.
Definim els punts de grau d de C som el conjunt

$$C_d(k) := \{P \in C(\bar{k}) \mid [k(P) : k] = d\}.$$

Podem definir una aplicació d-a-1 de $C_d(k)$ al producte simètric $C^{(d)}(k)$ donada per

$$P \mapsto \sum_{\sigma : K(P) \to \bar{k}} \sigma(P).$$

Aritmètica i Gonalitat II

Teorema(Frey, Abramovich, Harris)
Si $\gamma > 2d$, aleshores $C_d(k)$ és finit.

Aritmètica i Gonalitat II

Teorema(Frey, Abramovich, Harris)
Si $\gamma > 2d$, aleshores $C_d(k)$ és finit.

Idea demostració: Considerem l'aplicació "suma"

$$C^{(d)} \longrightarrow \mathrm{Jac}(C)$$

Aritmètica i Gonalitat II

Teorema(Frey, Abramovich, Harris)
Si $\gamma > 2d$, aleshores $C_d(k)$ és finit.

Idea demostració: Considerem l'aplicació "suma"

$$C^{(d)} \longrightarrow \mathrm{Jac}(C)$$

Com que $\gamma > d$), podem veure que l'aplicació és injectiva a nivell dels punts k-racionals. Denotem (com és habitual) la imatge de $C^{(d)}(k)$ per $W_d(C)(k)$.

Aritmètica i Gonalitat II

Teorema(Frey, Abramovich, Harris)
Si $\gamma > 2d$, aleshores $C_d(k)$ és finit.

Idea demostració: Considerem l'aplicació "suma"

$$C^{(d)} \longrightarrow \mathrm{Jac}(C)$$

Com que $\gamma > d$), podem veure que l'aplicació és injectiva a nivell dels punts k-racionals. Denotem (com és habitual) la imatge de $C^{(d)}(k)$ per $W_d(C)(k)$.
El punt clau es veure que $\gamma > 2d$ implica que $W_d(C)(k)$ no conté cap traslladat d'una subvarietat abeliana.

Aritmètica i Gonalitat II

Teorema(Frey, Abramovich, Harris)
Si $\gamma > 2d$, aleshores $C_d(k)$ és finit.

Idea demostració: Considerem l'aplicació "suma"

$$C^{(d)} \longrightarrow \mathrm{Jac}(C)$$

Com que $\gamma > d$), podem veure que l'aplicació és injectiva a nivell dels punts k-racionals. Denotem (com és habitual) la imatge de $C^{(d)}(k)$ per $W_d(C)(k)$.
El punt clau es veure que $\gamma > 2d$ implica que $W_d(C)(k)$ no conté cap traslladat d'una subvarietat abeliana.
Finalment, pel teorema de Faltings (Mordell generalitat), deduïm que $W_d(C)(K)$, i, per tant, $C^{(d)}(k)$ és finit.