Estudi de la propietat Hopf-Galois

Anna Rio

Departament de Matemàtica Aplicada II

STNB 2012

Setup

K/k separable

$$\begin{tikzcd} \tilde{K} \arrow[d, dash, "G'"'] \\ K \arrow[d, dash, "n"'] \\ k \end{tikzcd}$$

$\tilde{K}/k$ clausura galoisiana

$G = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/k)$

$\boxed{K/k \text{ és Hopf-Galois?}}$

- Acció de G sobre G/G' identifica G com a subgrup transitiu de $\mathrm{Perm}(G/G') \simeq S_n$
- Enumeració de les classes laterals $\leftrightsquigarrow$ conjugació a S_n

Hopf-Galois

- K/k Hopf-Galois: existeix una $k-$àlgebra de Hopf H tal que $\tilde{K} \otimes_k H \simeq \tilde{K}[N]$ per a un N subgrup regular de $\mathrm{Perm}(G/G')$.

- N subgrup regular de $\mathrm{Perm}(G/G')$ normalitzat per G: per descens de $\tilde{K}[N]$, la $k-$àlgebra de Hopf $H = \tilde{K}[N]^G$ dóna a K/k una H-estructura de Hopf-Galois

quasigalosiana: $N \subseteq G$

Hopf-Galois en versió teoria de grups

Teorema (Greither-Pareigis)

- *K/k és quasigaloisiana si G' té un complement normal N a G.*
- *K/k és Hopf-Galois ssi existeix N subgrup regular de S_n tal que $G \subseteq \mathrm{Norm}_{S_n}(N)$. Equiv. $G \subseteq \mathrm{Hol}(N)$, l'holomorf de N.*

Exemple $[K:k] = n$ i $G \simeq D_{2n}$ $\Rightarrow$ K/k quasigalosiana

G' no normal d'ordre 2 $\Rightarrow$ complement normal $N \simeq C_n$

Holomorf

$\boxed{\mathrm{Hol}(N) = N \rtimes \mathrm{Aut}(N)}$

$$(g,\sigma)(h,\tau) = (g\sigma(h), \sigma\tau)$$

- $\mathrm{Hol}(C_2) \simeq C_2$
- $\mathrm{Hol}(C_3) \simeq S_3$
- $\mathrm{Hol}(C_4) \simeq D_8$
- $\mathrm{Hol}(C_2 \times C_2) \simeq S_4$
- $\mathrm{Hol}(C_5) \simeq F(5)$
- $\mathrm{Hol}(C_6) \simeq D_{12}$
- $\mathrm{Hol}(S_3) \simeq S_3 \times S_3$
- $\#\,\mathrm{Hol}(C_8) = 32$
- $\#\,\mathrm{Hol}(C_2 \times C_4) = \#\,\mathrm{Hol}(D_8) = 64$
- $\#\,\mathrm{Hol}(H_8) = 192$

$\mathrm{Hol}(C_2 \times C_2 \times C_2)$ té ordre 1344

$\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2 \times C_2) \simeq \mathrm{GL}(3,2) = \mathrm{SL}(3,2) \Rightarrow$ l'holomorf té un subgrup simple, d'ordre 168, i no és resoluble

Holomorf

$\boxed{\mathrm{Hol}(N) = N \rtimes \mathrm{Aut}(N)}$

$$(g, \sigma)(h, \tau) = (g\sigma(h), \sigma\tau)$$

- $\mathrm{Hol}(C_2) \simeq C_2$
- $\mathrm{Hol}(C_3) \simeq S_3$
- $\mathrm{Hol}(C_4) \simeq D_8$
- $\mathrm{Hol}(C_2 \times C_2) \simeq S_4$
- $\mathrm{Hol}(C_5) \simeq F(5)$
- $\mathrm{Hol}(C_6) \simeq D_{12}$
- $\mathrm{Hol}(S_3) \simeq S_3 \times S_3$
- $\# \mathrm{Hol}(C_8) = 32$
- $\# \mathrm{Hol}(C_2 \times C_4) = \# \mathrm{Hol}(D_8) = 64$
- $\# \mathrm{Hol}(H_8) = 192$

$\boxed{\mathrm{Hol}(C_2 \times C_2 \times C_2) \text{ té ordre } 1344}$

$\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2 \times C_2) \simeq \mathrm{GL}(3,2) = \mathrm{SL}(3,2) \Rightarrow$ l'holomorf té un subgrup simple, d'ordre 168, i no és resoluble

Holomorf

N grup

- Identifiquem N amb un subgrup de $\mathrm{Perm}(N)$ usant la representació regular: $g \to T_g : x \mapsto gx$
- Identifiquem $\mathrm{Hol}(N)$ amb un subgrup de $\mathrm{Perm}(N)$ usant

$$\begin{array}{ccc} N \rtimes \mathrm{Aut}(N) & \hookrightarrow & \mathrm{Perm}(N) \\ (g, \sigma) & \longrightarrow & T_g \cdot \sigma \end{array}$$

Aleshores $\boxed{\mathrm{Hol}(N) = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Perm}(N)}(N)}$

- $\sigma\,\mathrm{Hol}(N)\sigma^{-1} = \mathrm{Hol}(\sigma N \sigma^{-1}) \qquad \forall \sigma \in \mathrm{Perm}(N)$

Subgrups regulars

S conjunt
$N \subseteq \mathrm{Perm}(S)$ és regular, o simplement transitiu, si

$$i, j \in S \Rightarrow \exists ! \sigma \in N \text{ tal que } \sigma(i) = j$$

- N regular $\Rightarrow |N| = |S|$
- Tot grup d'ordre n és realitza com a subgrup regular de S_n

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & \mathrm{Perm}\, N \simeq S_n \\ g & \mapsto & T_g \end{array}$$

- Enumeració dels elements de N $\leftrightsquigarrow$ conjugació a S_n
- $N \simeq N' \Rightarrow$ subgrups regulars conjugats a S_n
- Conjugat d'un subgrup regular és regular

Subgrups regulars

S conjunt
$N \subseteq \mathrm{Perm}(S)$ és regular, o simplement transitiu, si

$$i, j \in S \Rightarrow \exists ! \sigma \in N \text{ tal que } \sigma(i) = j$$

- N regular $\Rightarrow |N| = |S|$
- Tot grup d'ordre n és realitza com a subgrup regular de S_n

$$\begin{array}{ccc} N & \hookrightarrow & \mathrm{Perm}\, N \simeq S_n \\ g & \mapsto & T_g \end{array}$$

- Enumeració dels elements de N $\leftrightsquigarrow$ conjugació a S_n
- $N \simeq N' \Rightarrow$ subgrups regulars conjugats a S_n
- Conjugat d'un subgrup regular és regular

La condició Hopf-Galois

K/k separable

$$\begin{array}{c} \tilde{K} \\ G' \big| \\ K \\ n \big| \\ k \end{array}$$

$\tilde{K}/k$ clausura galoisiana

$G = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/k) \hookrightarrow \mathrm{Perm}(G/G')$

$\boxed{K/k \text{ és Hopf-Galois?}}$

$S = G/G'$
$N \subseteq \mathrm{Perm}(S)$ subgrup regular. La bijecció

$$\begin{array}{ccc} N & \to & S \\ g & \mapsto & g(\bar{1}_G) \end{array}$$

indueix isomorfisme $\mathrm{Perm}(S) \simeq \mathrm{Perm}(N)$ i la imatge de N en $\mathrm{Perm}(N)$ coincideix amb la imatge per la representació regular

$\boxed{G \text{ normalitza } N \text{ a } \mathrm{Perm}(S) \iff G \subseteq \mathrm{Hol}(N) \text{ a } \mathrm{Perm}(N)}$

Algoritme

- N representant d'una classe d'isomorfisme de grups d'ordre n
- Calcular $\mathrm{Hol}(N) \subseteq S_n$
- $G \subseteq \mathrm{Hol}(N)$?

$$\langle (35)(46), (145)(236), (12)(56), (34)(56) \rangle$$

$$\langle (14)(23)(56), (125)(346), (13)(24), (13)(56) \rangle$$

són subgrups transitius de S_6, isomorfs (a S_4) però no conjugats

$\mathrm{Hol}(C_6)$ té cardinal 12 i $\mathrm{Hol}(S_3)$ té cardinal 36

Una extensió de grau 6 amb grup de Galois S_4 no és Hopf-Galois

Algoritme

- N representant d'una classe d'isomorfisme de grups d'ordre n
- Calcular $\mathrm{Hol}(N) \subseteq S_n$
- $G \subseteq \mathrm{Hol}(N)$?

$$\langle (35)(46), (145)(236), (12)(56), (34)(56) \rangle$$

$$\langle (14)(23)(56), (125)(346), (13)(24), (13)(56) \rangle$$

són subgrups transitius de S_6, isomorfs (a S_4) però no conjugats

$\mathrm{Hol}(C_6)$ té cardinal 12 i $\mathrm{Hol}(S_3)$ té cardinal 36

Una extensió de grau 6 amb grup de Galois S_4 no és Hopf-Galois

Algoritme

- N representant d'una classe d'isomorfisme de grups d'ordre n
- Calcular $\mathrm{Hol}(N) \subseteq S_n$
- $G \subseteq \mathrm{Hol}(N)$?

$$\langle (35)(46), (145)(236), (12)(56), (34)(56) \rangle$$

$$\langle (14)(23)(56), (125)(346), (13)(24), (13)(56) \rangle$$

són subgrups transitius de S_6, isomorfs (a S_4) però no conjugats

$\mathrm{Hol}(C_6)$ té cardinal 12 i $\mathrm{Hol}(S_3)$ té cardinal 36

$\boxed{\text{Una extensió de grau 6 amb grup de Galois } S_4 \text{ no és Hopf-Galois}}$

Accions transitives

- Acció transitiva de $G \cong$ Acció per translació sobre G/H
  Es pot prendre com a H l'estabilitzador d'un punt qualsevol.
- Accions sobre G/H i G/K isomorfes $\iff$ H i K conjugats

Proposició

$G \subseteq S_n$ transitiu

$$\left\{H \subset G \text{ subgrup d'índex } n \text{ tal que } \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = 1\right\}$$

és no buit i reunió de classes de conjugació de subgrups de G.
Si és una única classe de conjugació, tots els subgrups transitius de S_n isomorfs a G són conjugats de G

Exemple $H_1 = \langle (1234) \rangle \quad H_2 = \langle (12), (12)(34) \rangle$
són d'índex 6 no conjugats a S_4

Accions transitives

- Acció transitiva de $G \cong$ Acció per translació sobre G/H
  Es pot prendre com a H l'estabilitzador d'un punt qualsevol.
- Accions sobre G/H i G/K isomorfes $\iff$ H i K conjugats

Proposició

$G \subseteq S_n$ transitiu

$$\left\{H \subset G \text{ subgrup d'índex } n \text{ tal que } \bigcap_{g\in G} gHg^{-1} = 1\right\}$$

és no buit i reunió de classes de conjugació de subgrups de G.
Si és una única classe de conjugació, tots els subgrups transitius de S_n isomorfs a G són conjugats de G

Exemple $H_1 = \langle(1234)\rangle \quad H_2 = \langle(12),(12)(34)\rangle$
són d'índex 6 no conjugats a S_4

Comptem estructures Hopf-Galois

$$\color{red}{a(N^*, G, G')} = \# \left\{ \begin{array}{l} N \text{ subgrup regular de } \mathrm{Perm}(G/G') \\ N \simeq N^* \text{ i } N \text{ normalitzat per } G \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\sum a(N^*, G, G') = \text{nombre d'estructures Hopf-Galois que admet } K/k}$$

$N^* \in$ sist de repr de classes d'isomorfisme de grups d'ordre n

$$b(N^*, G, G') = \# \left\{ \begin{array}{l} G^* \text{ subgrup de } \mathrm{Hol}(N^*) \subseteq \mathrm{Perm}(N^*) \\ G^* \simeq G \text{ amb } \mathrm{Stab}(1_{N^*}) \to G' \end{array} \right\}$$

Proposició (Byott)

$$a(N^*, G, G') = \frac{|\mathrm{Aut}(G, G')|}{|\mathrm{Aut}(N^*)|} b(N^*, G, G')$$

$\mathrm{Aut}(G, G')$ són els automorfismes de G que deixen G' invariant

Comptem estructures Hopf-Galois

$$a(N^*, G, G') = \# \left\{ \begin{array}{l} N \text{ subgrup regular de } \mathrm{Perm}(G/G') \\ N \simeq N^* \text{ i } N \text{ normalitzat per } G \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\sum a(N^*, G, G') = \text{nombre d'estructures Hopf-Galois que admet } K/k}$$

$N^* \in$ sist de repr de classes d'isomorfisme de grups d'ordre n

$$b(N^*, G, G') = \# \left\{ \begin{array}{l} G^* \text{ subgrup de } \mathrm{Hol}(N^*) \subseteq \mathrm{Perm}(N^*) \\ G^* \simeq G \text{ amb } \mathrm{Stab}(1_{N^*}) \to G' \end{array} \right\}$$

Proposició (Byott)

$$a(N^*, G, G') = \frac{|\mathrm{Aut}(G, G')|}{|\mathrm{Aut}(N^*)|} b(N^*, G, G')$$

$\mathrm{Aut}(G, G')$ són els automorfismes de G que deixen G' invariant

Estructures Hopf-Galois d'una extensió galoisiana

$\boxed{\text{Suposem } K/k \text{ de Galois}}$

Galois L'extensió és Hopf-Galois amb $H = k[G]$. Les subàlgebres de Hopf es corresponen bijectivament amb els cossos intermedis

Greither-Pareigis L'extensió és Hopf-Galois amb àlgebra de Hopf H tal que les seves subàlgebres de Hopf es corresponen bijectivament amb els cossos intermedis que són de Galois sobre k

$\rightsquigarrow$ molts exemples de no unicitat de l'estructura Hopf-Galois

$\boxed{\text{Quan } K/k \text{ té } k[G] \text{ com a única estructura Hopf-Galois?}}$

No unicitat de l'estructura Hopf-Galois

$\boxed{G = \mathrm{Gal}(K/k) \text{ no abelià, } K/k \text{ no té una única estructura Hopf-Galois}}$

$$\begin{aligned} \lambda : \quad & G \longrightarrow \mathrm{Perm}(G) \\ & g \mapsto \lambda(g) : h \to gh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : \quad & G \longrightarrow \mathrm{Perm}(G) \\ & g \mapsto \rho(g) : h \to hg^{-1} \end{aligned}$$

- $N_1 = \lambda(G) = G$ i $N_2 = \rho(G)$ són normalitzats per G
- $N_1 = N_2 \iff G$ abelià
- $\rho(G)$ correspon a l'estructura clàssica $H = k[G]$
  $\lambda(G)$ correspon a l'àlgebra de Hopf, les subàlgebres de la qual estan en bijecció amb les subextensions galoisianes

Unicitat de l'estructura Hopf-Galois

Un nombre natural n és nombre de Burnside si $\gcd(n, \varphi(n)) = 1$

- Un nombre parell > 2 no és nombre de Burnside
- Burnside $\Rightarrow$ lliure de quadrats. 21 no és Burnside
- Nombres de Burnside: primers, 15, 33, 35, 51, 65, 69, 77, ...

Teorema (Burnside)
Si n és un nombre de Burnside, tot grup d'ordre n és cíclic

Teorema (Byott)
K/k separable grau n

- *Si K/k és Galois, admet una única estructura Hopf-Galois ssi n és un nombre de Burnside*
- *Si K/k és Hopf-Galois i n és un nombre de Burnside, $G = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/k)$ és resoluble. A més, K/k admet una única estructura Hopf-Galois i és quasigaloisiana*

Unicitat de l'estructura Hopf-Galois

Un nombre natural n és nombre de Burnside si $\gcd(n, \varphi(n)) = 1$

- Un nombre parell > 2 no és nombre de Burnside
- Burnside $\Rightarrow$ lliure de quadrats. 21 no és Burnside
- Nombres de Burnside: primers, 15, 33, 35, 51, 65, 69, 77, ...

Teorema (Burnside)
Si n és un nombre de Burnside, tot grup d'ordre n és cíclic

Teorema (Byott)

K/k separable grau n

- *Si K/k és Galois, admet una única estructura Hopf-Galois ssi n és un nombre de Burnside*
- *Si K/k és Hopf-Galois i n és un nombre de Burnside, $G = \mathrm{Gal}(\tilde{K}/k)$ és resoluble. A més, K/k admet una única estructura Hopf-Galois i és quasigaloisiana*

Grau 5

`http://www.math.uni-duesseldorf.de/~klueners`

$\mathrm{Gal}(\tilde{K}/k)$	K/k	$N \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$C(5)$	Galois	$N = G$
$D(5)$	quasigaloisiana	$G' = \langle s \rangle$, $N = \langle r \rangle$
$F(5)$	quasigaloisiana	$G' =$ Frobenius complement $N =$ Frobenius kernel
A_5	no Hopf-Galois	
S_5	no Hopf-Galois	

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = F(5)$$

Grau 7

$\mathrm{Gal}(\tilde{K}/k)$	K/k	$N \simeq \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
$C(7) = 7$	Galois	$N = G$
$D(7) = 7:2$	quasigaloisiana	$G' = \langle s \rangle$, $N = \langle r \rangle$
$F_{21}(7) = 7:3$	quasigaloisiana	$G' =$ Frobenius complement $N =$ Frobenius kernel
$F_{42}(7) = 7:6$	quasigaloisiana	$G' =$ Frobenius complement $N =$ Frobenius kernel
$L(7) = L(3,2)$	no Hopf-Galois	
A_7	no Hopf-Galois	
S_7	no Hopf-Galois	

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) = F_{42}(7)$$

Grau 11

$\mathrm{Gal}(\tilde{K}/k)$	K/k	$N \simeq \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
$C(11) = 11$	Galois	$N = G$
$D(11) = 11:2$	quasigaloisiana	$G' = \langle s \rangle,\ N = \langle r \rangle$
$F_{55}(11) = 11:5$	quasigaloisiana	G' = Frobenius complement N = Frobenius kernel
$F_{110}(11) = 11:10$	quasigaloisiana	G' = Frobenius complement N = Frobenius kernel
$L(11) = PSL(2,11)(11)$	no Hopf-Galois	
$M(11)$	no Hopf-Galois	
A_{11}	no Hopf-Galois	
S_{11}	no Hopf-Galois	

$$\mathrm{Hol}(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}) = F_{110}(11)$$

Graus 13 i 15

Grau 13

$C(13)$ $D(13)$ $F_{39}(13)$ $F_{52}(13)$ $F_{78}(13)$ $F_{156}(13)$
$\mathrm{PSL}(3,3)$ A_{13} S_{13}

Grau 15

Hi ha subgrups transitius G de S_{15} de cardinal 150 (resolubles)

Extensió de grau 15 amb grup de Galois G no pot ser Hopf-Galois perquè $\mathrm{Hol}(C_{15})$ té cardinal 120

Recompte d'estructures Hopf-Galois

- Kohl [1998] Classification of the Hopf Galois Structures on Prime Power Radical Extensions
- Kohl [2007] Cas $n = 4p$, amb $p > 3$ primer
- Childs-Corradino [2007] Cas G producte semidirecte de grups cíclics
- Childs [2007] Cas G p-grup abelià elemental
- Byott [2002] Cas K/k extensió de cossos $p-$àdics de grau p^2, Galois i totalment ramificada
- Byott [2004] K/k Galois finita amb grup de Galois simple no abelià. K/k admet exactament 2 estructures Hopf-Galois.
- Byott [2004] K/k Galois, $n = pq$ amb p, q primers, $p \equiv 1 \pmod{q}$. Si G és cíclic, hi ha $2q - 1$ estructures Hopf-Galois. Si G és no abelià n'hi ha $2 + p(2q - 3)$
- Byott [2007] Hopf-Galois structures on almost cyclic field extensions of $2-$power degree
- Featherstonhaugh-Caranti-Childs [2010] Abelian Hopf Galois Structures On Prime-Power Galois Field Extensions

Estudiar la propietat Hopf-Galois per a extensions intermèdies

$$K \subseteq F \subseteq \tilde{K}$$

Com influeix el caràcter Hopf-Galois de K/k en el caràcter Hopf-Galois de F/k?

$$\begin{array}{lll}
\tilde{K} & \quad & \text{Galois} \Rightarrow \text{Hopf-Galois} \\
\Big| & & \qquad\qquad\qquad \boxed{¿\ ?} \\
K & & \text{Hopf-Galois o no} \\
{\scriptstyle n}\Big| & & \\
k & &
\end{array}$$

n=4,5,6,7

n=6

Nom	$\lvert G\rvert$	K/k
C(6) = 6 = 3[x]2	6	Galois
D6(6) = [3]2	6	Galois
D(6) = S(3)[x]2	12	quasigaloisiana
A4(6) = [22]3	12	no Hopf-Galois
F18(6) = [32]2 = 3wr2	18	quasigaloisiana
2A4(6) = [23]3 = 2wr3	24	no Hopf-Galois
S4(6d)= [22]S(3)	24	no Hopf-Galois
S4(6c) = 1/2[23]S(3)	24	no Hopf-Galois
F18(6) : 2 = [1/2.S(3)2]2	36	quasigaloisiana
F36(6) = 1/2[S(3)2]2	36	no Hopf-Galois
2S4(6) = [23]S(3) = 2wrS(3)	48	no Hopf-Galois
L(6) = PSL(2, 5) = A5(6)	60	no Hopf-Galois
F36(6) : 2 = [S(3)2]2 = S(3)wr2	72	no Hopf-Galois
L(6) : 2 = PGL(2, 5) = S5(6)	120	no Hopf-Galois
A6	360	no Hopf-Galois
S6	720	no Hopf-Galois

grau 6 amb grup de Galois A_4 no és Hopf-Galois

$$f(x) = x^6 - 3x^2 - 1$$

12 és el mínim $|G|$ d'una extensió K/k no Hopf-Galois

- Sistema de representatants dels grups d'ordre 6: C_6 i S_3
- $\mathrm{Hol}(C_6)$ té cardinal $6\varphi(6) = 12$. Si conté G, com que són del mateix cardinal, haurà de coincidir amb G i serà isomorf a A_4. Però $\mathrm{Hol}(N)$ té subgrups d'ordre 6 i A_4 no en té.
- $\mathrm{Hol}(S_3)$ té cardinal 36. Atès que S_6 té una única classe de conjugació de subgrups transitius isomorfs a A_4, és suficient veure que $\mathrm{Hol}(S_3)$ no té subgrups transitius isomorfs a A_4.

```
N:=Sym(3);
H:=Holomorph(N);
Subgroups(H: OrderEqual:=12, IsTransitive:=true);
```

Extensions intermèdies

$$\begin{array}{c} \tilde{K} = \tilde{F} \\ | \\ F \\ | \\ K \\ {\scriptstyle n}| \\ k \end{array}$$

$\boxed{F/k \text{ és Hopf-Galois?}}$

Si $n = 4$, només "en tenim"quan $G = S_4$.
Llavors $G' \simeq S_3$ (única classe de conjugació a S_4) i els elements d'ordre 2 són transposicions.
Si $[F : k] = 12$, llavors $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/F)$ té complement normal $N = A_4$.
L'extensió F/k és quasigaloisiana

Mínima extensió Hopf-Galois no quasigaloisiana

Seguim amb $n = 4$. Suposem $[F : k] = 8$

- Subgrup d'ordre 3 de S_4 no té complement normal. No és quasigaloisiana.
- Fer variar N entre els grups d'ordre 8 i cercar en els seus holomorfs un subgrup transitiu isomorf a S_4 (única classe de conjugació a S_8)
- N tal que $|\mathrm{Hol}(N)|$ divisible per 24 $\Rightarrow N = C_2 \times C_2 \times C_2$ o $N = H_8$.
- $\mathrm{Hol}(H_8)$ no té subgrups transitius isomorfs a S_4
- $N = \langle (16)(27)(35)(48),\ (14)(23)(57)(68),\ (13)(24)(56)(78) \rangle$.

$$\mathrm{Hol}(N) = \langle N,\ (23)(57),\ (27)(35),\ (24)(78),\ (26)(3584) \rangle$$

Subgrup transitiu isomorf a S_4: $\langle (1742)(3658),\ (12)(37)(46)(58) \rangle$

Exemple $f(x) = x^4 + x + 1, \quad x_1$ arrel de $f, \quad F = \mathbb{Q}(x_1, \sqrt{229})$

Partim de K/k no Hopf-Galois

$n = 5$ i $G = S_5$
Mínim grau d'un cos intermedi F tal que F/k Hopf-Galois?

- $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K) \simeq S_4$ (única classe de conjugació)
- Possibles $m = [F : k] = 10, 15, 20, 30, 40, 60$
- Cercar sugrups N d'ordre m tals que $\mathrm{Hol}(N)$ contingui S_5
- Per a $m = 10, 15, 20, 30$ tots els holomorfs són resolubles
- Hi ha un únic grup d'ordre 40 amb holomorf no resoluble, però el grup simple que conté és $\mathrm{SL}(3, 2)$

$F = \tilde{K}^{\langle\tau\rangle}$ on τ és un element d'ordre 2 amb complement normal A_5

$[F : k] = 60$ $\quad$ F/k quasigaloisiana

$n = 4, 5, 6, 7$

- Completament estudiades les extensions intermèdies $K \subseteq F \subseteq \tilde{K}$
- Quan K/k no és Hopf-Galois, no veiem patrons de quina és la "distància" de K a un F tal que F/k sigui Hopf-Galois
- Quan K/k és Hopf-Galois, sempre obtenim que F/k és Hopf-Galois

Aproximació al teorema

Proposició

K/k separable, $\tilde{K}$ clausura normal, $K \subseteq F \subseteq \tilde{K}$

Si K/k i F/K són Hopf-Galois, aleshores F/k és Hopf-Galois

$$\begin{array}{c} \tilde{K} \\ | \\ F \\ r\,| \\ K \\ n\,| \\ k \end{array}$$

$\tilde{F}$ clausura de F/K dins $\tilde{K}$
R subgrup regular de $\mathrm{Perm}(\,\mathrm{Gal}(\tilde{F}/K)/\,\mathrm{Gal}(\tilde{F}/F)\,) \simeq S_r$ normalitzat per $\mathrm{Gal}(\tilde{F}/K)$

N subgrup regular de $\mathrm{Perm}(G/G') \simeq S_n$ normalitzat per G

$N \times R$ subgrup regular de $\mathrm{Perm}(\,G/\,\mathrm{Gal}(\tilde{K}/F)\,) \simeq S_{nr}$ normalitzat per G.