Jacobianes de corbes de Mumford

STNB 2013 (27è Any)

Iago Giné Vázquez
UAB

01/02/2013
Barcelona

Índice

Data

Sea K un cuerpo completo no arquimediano con una valoración discreta (no trivial) $v : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$, y $\mathbb{C}_K := \widehat{\overline{K}}$ la completación de su clausura algebraica.

Sea C/K una curva (lisa y proyectiva) de Mumford de género $g \geq 2$. Entonces existe un grupo (libre) de Schottky de rango g, $\Gamma \subseteq PGL_2(K)$, y un isomorfismo rígido analítico

$$\Gamma \backslash \mathfrak{X}_\Gamma \cong C^{rig}$$

donde $\mathfrak{X}_\Gamma = {\mathbb{P}^1_K}^{rig} \setminus \mathcal{L}_\Gamma$, con $\mathcal{L}_\Gamma \subseteq \mathbb{P}^1_K(K)$ los puntos límite de Γ. Escribiremos $C =: C_\Gamma$.

Motivación I

El estudio de estas curvas es el objetivo del artículo de Mumford tratado en el seminario, [Mum72b].

En el caso en que K es local sabemos por [Mum72b] que tenemos un árbol localmente finito Δ asociado a todas las redes de K^2, un esquema formal asociado, $\mathcal{P}(\Delta)$, y que la fibra genérica de éste en el sentido de Raynaud es el espacio p-ádico simétrico de Drinfel'd de dimensión 1 (o semiplano de Drinfel'd) $\mathfrak{X} = {\mathbb{P}^1_K}^{rig} \setminus \mathbb{P}^1_K(K)$.

Sin suponer que K es local, Mumford asocia a cada grupo de Schottky Γ un esquema formal $\mathcal{P}(\Delta_\Gamma)$ del mismo modo que antes. Tomando de nuevo la fibra genérica de este en el sentido de Raynaud lo que obtenemos es $\mathfrak{X}_\Gamma = {\mathbb{P}^1_K}^{rig} \setminus \mathcal{L}_\Gamma$.

Motivación II

Una curva de Mumford tiene asociada de manera natural una uniformización rígida-analítica de su Jacobiana, de modo que resulta adecuado explicarla aquí.

Además, como se dice en [MD73] -uno de los primeros sitios donde se hace esta construcción- acerca de sí, "*this note can be looked at as a very natural morphism from Mumford [Mum72b] to Mumford [Mum72a]*", esto es, del trabajo de uniformización de curvas de Mumford al de unas ciertas variedades abelianas entre las que se incluyen estas Jacobianas.

Teorema. La Jacobiana $Jac(C_\Gamma)$

Teorema

La Jacobiana de C_Γ es un toro analítico propio T^{rig}/Λ con una polarización $\Phi : \Lambda \longrightarrow X(T)$ -donde $X(T) = Hom_{K-\mathcal{G}rp}(T, \mathbb{G}_{m,K})$ es el grupo de caracteres del toro- que vienen determinadas por una forma bilineal simétrica $Q : \Gamma^{ab} \times \Gamma^{ab} \longrightarrow K^*$ tal que $|Q(\gamma, \gamma)| < 1 \ \forall \gamma \neq 0$.

Para ello se define el toro split $T := Spec(K[\Gamma^{ab}]) \cong \mathbb{G}^g_{m,K}$. Observamos que tenemos la igualdad de conjuntos $T^{rig} = Max(K[\Gamma^{ab}])$ y así pues la inclusión natural

$$T(K) \hookrightarrow T^{rig} .$$

La red Λ y la polarización

Veamos como determina Q el toro analítico. Tenemos que $T(K) \cong Hom(\Gamma^{ab}, K^*)(\cong (K^*)^g)$ y Q induce

$$\Gamma^{ab} \xrightarrow{\widetilde{Q}} T(K) \hookrightarrow T^{rig}$$

$$\gamma \longmapsto \begin{cases} \Gamma^{ab} \xrightarrow{\widetilde{Q}(\gamma)} K^* \\ \gamma' \longmapsto Q(\gamma, \gamma') \end{cases}$$

La imagen de Γ^{ab} en T^{rig} la denotamos Λ, de modo que ya obtenemos T^{rig}/Λ. Además, como Q es no degenerada (debido a $|Q(\gamma, \gamma)| < 1\ \forall \gamma \neq 0$) el morfismo anterior es inyectivo y sobre su imagen un isomorfismo. Basta componer la inversa de este con el isomorfismo canónico del grupo de caracteres con Γ^{ab} para obtener la polarización:

$$\Lambda \xrightarrow[\cong]{} \Gamma^{ab} \cong X(T)$$

Funciones automorfas

Recordemos el espacio rígido analítico asociado a $\Gamma \subseteq PGL_2(K)$. Siendo $\mathcal{L}_\Gamma \subseteq \mathbb{P}^1_K(K)$ los puntos límite del grupo, consideramos el espacio rígido analítico $\mathfrak{X}_\Gamma = {\mathbb{P}^1_K}^{rig} \setminus \mathcal{L}_\Gamma$. Para cada extensión finita de cuerpos $L|K$, los L-puntos de este espacio son $\mathfrak{X}_\Gamma(L) = \mathbb{P}^1_K(L) \setminus \mathcal{L}_\Gamma$. Los puntos de $\mathfrak{X}_\Gamma$ son $\mathfrak{X}_\Gamma(\mathbb{C}_K)$.

Definición

Se dice que una función $f \neq 0$ meromorfa en $\mathfrak{X}_\Gamma$ es una función automorfa para Γ con factor de automorfía $c : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}_K^*$ si $f(z) = c(\alpha) f(\alpha z)\ \forall z \in \mathfrak{X}_\Gamma\ \forall \alpha \in \Gamma$.

Esta definición implica inmediatamente que c es un morfismo de grupos. Por otra parte, la misma definición se puede restringir para cada extensión finita $L|K$ diciendo que f es L-automorfa si c toma valores en L^*.

Funciones θ I

Dados puntos $a, b \in \mathfrak{X}_\Gamma$, la función

$$\theta(a, b; z) := \prod_{\gamma \in \Gamma} \frac{z - \gamma \cdot a}{z - \gamma \cdot b}$$

es automorfa en $\mathfrak{X}_\Gamma$.
Si $\Gamma a \neq \Gamma b$, tiene ceros simples en Γa y polos simples en Γb y ningún otro cero ni polo, mientras si $\Gamma a = \Gamma b$ no tiene ceros ni polos.

Cumple $\theta(a, b; z) = \theta(\alpha a, \alpha b; z)$ $\forall \alpha \in \Gamma$ y $\theta(a, b; z)^{-1} = \theta(b, a; z)$.
(vid. [GvdP80, ch. 2, §2])

Funciones θ II

Observamos que $\omega_{a-b}(z) := \dfrac{z-a}{z-b}$ es la función racional en $\mathfrak{X}_\Gamma$ que tiene divisor $a-b$ y $\theta(a,b;z) = \prod_{\gamma\in\Gamma} \omega_{\gamma\cdot(a-b)}(z)$. Por tanto podemos poner $\theta(a,b;z) =: \theta_{a-b}(z)$ y escribir su factor de automorfía como c_{a-b}. Asímismo, esto permite generalizar la definición de las funciones θ de los divisores de la forma $d = a-b$ a cualquier divisor de grado 0, $d \in Div^0(\mathfrak{X}_\Gamma)$, vía

$$\theta_d(z) := \prod_{\gamma\in\Gamma} \omega_{\gamma\cdot d},$$

función automorfa con factor de automorfía c_d, que resulta ser linealmente dependiente de d.

2 lemas y las funciones θ analíticas I

Las funciones θ analíticas son aquellas de la forma $\theta(a, \alpha a; z)$ para algún $a \in \mathfrak{X}_\Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$.

Lema

Dado $\alpha \in \Gamma$ *se tiene* $\theta(a, \alpha a; z) \equiv \theta(b, \alpha b; z)$ $\forall a, b \in \mathfrak{X}_\Gamma$

Dem.

$$\left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\frac{z-\gamma a}{z-\gamma\alpha a}\right)\left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\frac{z-\gamma b}{z-\gamma\alpha b}\right)^{-1} = \left(\prod_{\gamma\in\Gamma}\frac{z-\gamma a}{z-\gamma\alpha a}\cdot\frac{z-\gamma\alpha b}{z-\gamma b}\right)$$

$$= \prod_{\gamma\in\Gamma}\frac{z-\gamma a}{z-\gamma b}\cdot\prod_{\gamma\in\Gamma}\frac{z-\gamma\alpha b}{z-\gamma\alpha a} = \theta(a, b; z)\theta(b, a; z) = 1$$

$\square$

2 lemas y las funciones θ analíticas II

Se define entonces $u_\alpha(z) := \theta(a, \alpha a; z)$ para cualesquiera $a \in \mathfrak{X}_\Gamma,\ \alpha \in \Gamma$, función theta analítica sin ceros. Se tiene que

$$u_{\alpha\beta}(z) = \theta(a, \alpha\beta a; z) = \theta(a, \beta a; z)\theta(\beta a, \alpha\beta a; z) = u_\beta(z)u_\alpha(z)$$

y en particular sólo depende de $\overline{\alpha} \in \Gamma^{ab}$.
Recordemos que c_{a-b} es el factor de automorfía de $\theta(a, b; z)$ para $a, b \in \mathfrak{X}_\Gamma$.

Lema

Se tiene que $c_{a-b}(\alpha) = \dfrac{u_\alpha(a)}{u_\alpha(b)}\ \forall \alpha \in \Gamma$

2 lemas y las funciones θ analíticas III

Dem.

$$c_{a-b}(\alpha) = \frac{\theta_{a-b}(z)}{\theta_{a-b}(\alpha z)} = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{\frac{\gamma a - z}{\gamma b - z}}{\frac{\gamma a - \alpha z}{\gamma b - \alpha z}} = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{\frac{\gamma a - z}{\gamma a - \alpha z}}{\frac{\gamma b - z}{\gamma b - \alpha z}} = \prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{\frac{a - \gamma^{-1} z}{a - \gamma^{-1}\alpha z}}{\frac{b - \gamma^{-1} z}{b - \gamma^{-1}\alpha z}} =$$

$$= \frac{\theta(z, \alpha z; a)}{\theta(z, \alpha z; b)} = \frac{u_\alpha(a)}{u_\alpha(b)}$$

donde la cuarta igualdad se debe a que la razón doble es un invariante por automorfismos, en este caso γ^{-1}. $\square$

La forma bilineal simétrica

Definimos el siguiente producto:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{\quad Q \quad} & K^* \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & Q(\alpha,\beta) := \dfrac{u_\alpha(z)}{u_\alpha(\beta z)} = c_{z-\alpha z}(\beta) \end{array}$$

$Q(\alpha, \_) = c_{z-\alpha z}$ es el factor de automorfía de u_α, por tanto Q es multiplicativa en el segunda factor y factoriza por Γ^{ab}. Como $u_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta$, entonces lo mismo le sucede al primer factor. Así tenemos $Q : \Gamma^{ab} \times \Gamma^{ab} \longrightarrow K^*$ forma bilineal. Además, aplicando el lema anterior

$$Q(\alpha,\beta) = \frac{u_\alpha(a)}{u_\alpha(\beta a)} = c_{a-\beta a}(\alpha) = Q(\beta,\alpha)$$

de modo que Q es simétrica.

Producto definido positivo I

Teorema

Se tiene $|Q(\alpha,\alpha)| < 1\ \forall \alpha \neq 0$ *y en particular* Q *es no degenerada.*

Idea dem.

La afirmación hecha es equivalente a $v(Q(\alpha,\alpha)) > 0$, esto es, a que la forma $v \circ Q : \Gamma^{ab} \times \Gamma^{ab} \longrightarrow \mathbb{Z}$ es definida positiva.

Sea $\mathcal{T}_\Gamma$ el árbol al que Mumford denota por Δ'_Γ en [Mum72b, pp. 163-164], esto es, el árbol Δ_Γ agregándole los vértices intermedios de Δ. Entonces $\Gamma \backslash \mathcal{T}_\Gamma =: G_\Gamma$ es el grafo dual de la reducción del modelo regular minimal (semiestable) de C_Γ.

Producto definido positivo II

Idea dem. (Cont.)

Hay una forma bilineal simétrica definida positiva $[\ ,\ ]$ en el grupo de 1-cadenas enteras

$$C_1(G_\Gamma, \mathbb{Z}) := \mathbb{Z}[E(G_\Gamma)]/\{\overline{e} \sim -e\}_{e \in E(G_\Gamma)}$$

definida por $[e, e] = 1$ y $[e, e'] = 0$ para $e' \neq \pm e$. Ésta induce una forma bilineal simétrica definida positiva en homología $[\ ,\ ] : H_1(G_\Gamma, \mathbb{Z}) \times H_1(G_\Gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$.
Por otro lado, cada $\gamma \in \Gamma$ distinto del neutro tiene 2 puntos fijos (por ser hiperbólico) $z_\gamma^+, z_\gamma^- \in \mathcal{L}_\Gamma$ (atractor y repulsor respectivamente) que se corresponden con 2 finales del árbol $\mathcal{T}_\Gamma$, los cuales están unidos por un único camino infinito que denotamos X_γ y que orientamos de z_γ^- a z_γ^+.

Producto definido positivo III

Idea dem. (Cont.)

Consideramos en X_γ un dominio fundamental P_γ para la operación por γ (por ejemplo el camino de un vértice $v \in X_\gamma$ a $\gamma \cdot v$) y lo proyectamos en el grafo vía $\pi : \mathcal{T}_\Gamma \longrightarrow G_\Gamma$. El elemento resultante es un ciclo, y en homología coincide con la imagen de γ por la aplicación

$$\Gamma \cong \pi_1(G_\Gamma) \longrightarrow \Gamma^{ab} \cong \pi_1(G_\Gamma)^{ab} \cong H_1(G_\Gamma, \mathbb{Z})$$

Por tanto, la clase de $\pi(P_\gamma)$ en homología c_γ sólo depende de $\overline{\gamma} \in \Gamma^{ab}$ y la demostración concluye aplicando el siguiente resultado. $\square$

Producto definido positivo IV

Lema

El diagrama

$$\begin{tikzcd} \Gamma^{ab} \times \Gamma^{ab} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\cong"'] & K^* \arrow[d, "v"] \\ H_1(G_\Gamma, \mathbb{Z}) \times H_1(G_\Gamma, \mathbb{Z}) \arrow[r, "{[\ ,\ ]}"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

es conmutativo, esto es, $[c_\gamma, c_\alpha] = v(Q(\gamma, \alpha))$ *para* $\gamma, \alpha \in \Gamma^{ab}$ *(vid. [MD73, Thm. 5])*

La red Λ

Tenemos pues,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^{ab} & \xrightarrow{\quad\widetilde{Q}\quad} & T^{rig} \\ \gamma & \longmapsto & Q(\gamma, \_) = \text{factor de automorfía de } u_\gamma \end{array}$$

y $\Lambda := Im(\widetilde{Q})$. De aquí:

Corollary

Λ es un grupo libre de rango g, discreto en $T(K) \cong (K^*)^g$

Dem.

Como Q es no degenerada $\widetilde{Q}$ es inyectiva y Λ es discreto, y como Γ es de rango g tenemos $\mathbb{Z}^g \cong \Gamma^{ab} \xrightarrow[\cong]{\widetilde{Q}} \Lambda$ $\square$

El toro analítico y la polarización I

Corollary

T^{rig}/Λ es un toro analítico propio

Corollary

La composición de $\Lambda \xrightarrow[\cong]{\widetilde{Q}^{-1}} \Gamma^{ab}$ *con* $\Gamma^{ab} \cong X(T)$ *da un morfismo* $\Phi : \Lambda \longrightarrow X(T)$ *tal que*

- $\Phi(\lambda)(\lambda') = \Phi(\lambda')(\lambda) \ \forall \lambda, \lambda' \in \Lambda$
- $v(\Phi(\lambda, \lambda)) > 0 \ \forall \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$

de modo que es una polarización y por tanto T^{rig}/Λ *es una variedad abeliana* $\mathcal{J}^{rig}$.

El toro analítico y la polarización II

Dem.

Las propiedades que satisface Φ se deben a que, vía el isomorfismo

$$\begin{aligned} \Lambda &\xrightarrow[\cong]{} \Gamma^{ab} \\ \lambda &\longmapsto \gamma_\lambda \end{aligned}$$

y las identificaciones adecuadas se tiene la igualdad $\Phi(\lambda, \lambda') = Q(\gamma_\lambda, \gamma_{\lambda'})$ y a las propiedades de Q. De modo análogo que en el caso complejo se demuestra que un toro analítico propio con una polarización es algebraizable y por tanto una variedad abeliana. (vid. [Ger72, Thm. 5] o [FvdP04, Thm. 6.6.1]) $\square$

Así pues, a partir de la curva de Mumford C_Γ, o, equivalentemente, a partir del grupo de Schottky Γ, hemos construido una variedad abeliana. Ahora hemos de ver que se trata de la Jacobiana de la curva.

Divisores de funciones automorfas I

Sea $L|K$ una extensión finita de cuerpos arbitraria. Escribamos $\mathcal{A}_L(\mathfrak{X}_\Gamma)$ para el espacio de las funciones L-automorfas (meromorfas) en $\mathfrak{X}_\Gamma$. Si $f \in \mathcal{A}_L(\mathfrak{X}_\Gamma)$ tiene $a \in \mathfrak{X}_\Gamma(L)$ como cero (resp. polo) de orden q, entonces αa también es cero (resp. polo) de orden q, por tanto tenemos L-divisores bien definidos en $C_\Gamma(L) = \Gamma \backslash \mathfrak{X}_\Gamma(L)$:

$$(f)_0 := \sum_{\substack{\overline{a} \in C_\Gamma(L) \\ ord_a(f) > 0}} ord_a(f) \cdot \overline{a}$$

$$(f)_\infty := - \sum_{\substack{\overline{a} \in C_\Gamma(L) \\ ord_a(f) < 0}} ord_a(f) \cdot \overline{a}$$

$$(f) := (f)_0 - (f)_\infty$$

Divisores de funciones automorfas II

En particular $(\theta_{a-b}) = \overline{a} - \overline{b}$. Como para toda $f \in \mathcal{A}_L(\mathfrak{X}_\Gamma)$ existen $c \in L^*$, $a_i, b_i \in \mathfrak{X}_\Gamma$ tales que

$$f(z) = c \prod_i \theta_{a_i - b_i}(z)$$

([GvdP80, ch. 2, §3]), entonces (f) tiene grado cero.

Además podemos suponer que $\overline{a}_i \neq \overline{b}_j \ \forall i, j$ si f tiene ceros, o equivalentemente polos, mientras que si es analítica será de la forma

$$f(z) = cu_\alpha(z), \ c \in L^*, \ \alpha \in \Gamma^{ab}$$

y $(f) = \overline{a} - \overline{\alpha a} = 0$.

Divisores de funciones automorfas III

Así pues, tenemos aplicaciones bien definidas

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(\mathfrak{X}_\Gamma) &\twoheadrightarrow Div_L^0(C_\Gamma) \\ f &\longmapsto (f) \end{aligned}$$

que son exhaustivas porque podemos subir cada L-divisor de grado 0 de la curva a $\mathfrak{X}_\Gamma(L)$ y de este construir su función θ asociada.

También tenemos la antiimagen del divisor 0, que son las funciones de la forma $f(z) = cu_\alpha(z)$ tal como explicitamos arriba.

El factor de automorfía

Por otra parte tenemos la aplicación que a cada función automorfa le asucia su factor de automorfía

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(\mathfrak{X}_\Gamma) &\longrightarrow Hom(\Gamma^{ab}, L^*) \cong T(L) \\ f &\longmapsto c_f \end{aligned}$$

Teorema

La aplicación anterior es exhaustiva.

La demostración se basa en identificar un morfismo $\Gamma^{ab} \longrightarrow L^*$ con un elemento de $(L^*)^g$ y construir analíticamente una función θ adecuada en función de aquel. (vid. [GvdP80, ch. 6, (3.4)])

Divisores principales

Los L-divisores principales son los procedentes de funciones meromorfas Γ-invariantes

$$Prin_L(C_\Gamma) := \left\{(f) | f \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_\Gamma)^\Gamma\right\} = \left\{\Gamma d | d \in Div^0(\mathfrak{X}_\Gamma(L)) \text{ y } c_d \equiv 1\right\}$$

Tenemos ahora aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A}_L(\mathfrak{X}_\Gamma) & \twoheadrightarrow & Div^0_L(C_\Gamma) & \twoheadrightarrow & Div^0_L(C_\Gamma)/Prin_L(C_\Gamma) \\ \downarrow & & & & \\ T(L) & & & & \end{array}$$

Si $f, f' \in \mathcal{A}_L(\mathfrak{X}_\Gamma)$ son tales que $c_f = c_{f'}$, entonces $f/f' \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_\Gamma)^\Gamma$ con lo que $(f) \equiv (f')(mod\ Prin_L(C_\Gamma))$.

Los L-puntos de la Jacobiana I

De este modo podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned} T(L) &\twoheadrightarrow Div_L^0(C_\Gamma)/Prin_L(C_\Gamma) \\ c_f &\longmapsto (f) \end{aligned}$$

que es un morfismo de grupos. Recordemos que teníamos $\left\{c_{u_\alpha} | \alpha \in \Gamma^{ab}\right\} = \Lambda \subseteq T(K) \subseteq T(L)$ y que $(u_\alpha) = 0$, por tanto la aplicación anterior factoriza por

$$T(L)/\Lambda \twoheadrightarrow Div_L^0(C_\Gamma)/Prin_L(C_\Gamma)$$

Veamos que es inyectiva. Supongamos que tenemos un factor de automorfía c_f de una función L-automorfa f con divisor $(f) \equiv 0(mod\ Prin_L(C_\Gamma))$.

Los L-puntos de la Jacobiana II

Esto quiere decir que existe $h \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}_\Gamma(L))^\Gamma$ tal que $(f) = (h)$, o equivalentemente $\left(\frac{f}{h}\right) = 0$.
De esta manera, f/h es una función automorfa analítica y por tanto es de la forma cu_α. Así resulta $c_f = c_{u_\alpha} c_h = c_{u_\alpha} \in \Lambda$, pues $c_h \equiv 1$.
Concluimos que tenemos un isomorfismo de grupos

$$\begin{array}{ccc} T(L)/\Lambda & \xrightarrow[\cong]{} & Div_L^0(C_\Gamma)/Prin_L(C_\Gamma) \\ c_d & \longmapsto & \overline{d} \end{array}$$

Aplicación de Abel-Jacobi

Resulta así, que tenemos una variedad abeliana isomorfa como grupo a $Jac(C_\Gamma)$ en sus L-puntos para cada extensión finita. Por GAGA la aplicación de Abel-Jacobi entre variedades algebraicas propias

$$\begin{array}{ccc} C_\Gamma^{rig} & \xrightarrow{\quad j \quad} & T^{rig}/\Lambda = \mathcal{J}^{rig} \\ \Gamma z_1 & \longmapsto & j(\Gamma z_1) = c_{z_1 - z_0} \end{array}$$

-con $z_0 \in \mathfrak{X}_\Gamma$ fijado- es algebraica, y por la propiedad universal de Albanese factoriza en $Jac(C_\Gamma) \longrightarrow \mathcal{J}$ que en los L-puntos induce el isomorfismo anterior para cada extensión finita $L|K$, lo que implica que ésta, a su vez, es un isomorfismo

Fresnel, J. and van der Put, M. (2004) *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Mathematics 218, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA. MR 2004i:14023

Gerritzen, L., *On Non-Archimedean Representations of Abelian Varieties*, Math. Ann. 196 (1972), 323–346, doi:10.1007/BF01428221, URL http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN002306247. MR 46:7247

Gerritzen, L. and van der Put, M. (1980) *Schottky groups and Mumford curves*, Lecture Notes in Mathematics 817, Springer, Berlin, doi:10.1007/BFb0089957. MR 82j:10053

Manin, Y. and Drinfeld, V., *Periods of p-adic Schottky groups*, J. Reine Angew. Math. 262/263 (1973), 239–247, URL http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN00218835X, collection of articles dedicated to Helmut Hasse on his seventy-fifth birthday. MR 53:444

Mumford, D., *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*, Compositio Math. 24 (1972), 239–272, URL
http://www.numdam.org/item?id=CM_1972__24_3_239_0.
MR 50:4593

———, *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*, Compositio Math. 24 (1972), 129–174, URL
http://www.numdam.org/item?id=CM_1972__24_2_129_0.
MR 50:4592

Versión vía medidas Γ-invariantes I

Análoga construcción se puede realizar por medio de integrales multiplicativas, a la manera en que Samit Dasgupta lo hace sobre trabajos de Darmon y Bertolini en [Das05, §2] y [Das04], sin necesidad de restringirnos a curvas modulares como hace él.

Para esto se consideran las medidas en $\mathcal{L}_\Gamma$ con valores en $\mathbb{Z}$, $Meas(\mathcal{L}_\Gamma, \mathbb{Z})$, a las que se asocian integrales multiplicativas reinterpretando así la aplicación

$$\Gamma^{ab} \xrightarrow{\quad \widetilde{Q} \quad} T(K) \cong Hom(\Gamma^{ab}, K^*)$$

entendiendo Γ^{ab} como $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ en el origen y como las medidas Γ-invariantes después. Queda

Versión vía medidas Γ-invariantes II

$$\begin{array}{ccc} H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & Hom\left(Meas(\mathcal{L}_\Gamma,\mathbb{Z})^\Gamma, K^*\right) \\ \overline{\gamma} & \longmapsto & \left\{\mu \mapsto \times\!\!\!\!\!\!\int_{\mathcal{L}_\Gamma} \frac{t-\gamma\cdot P}{t-P} d\mu\right\} \end{array}$$

para $P \in \mathfrak{X}_\Gamma(F)$ arbitrario donde $F|K$ es una extensión finita no ramificada, y se demuestra que son aplicaciones equivalentes mirando que

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma^{ab}\times\Gamma^{ab} & \longrightarrow & Meas(\mathcal{L}_\Gamma,\mathbb{Z})^\Gamma \times H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & K^* \\ (\rho,\overline{\gamma}) & \longmapsto & (\mu_\rho\ ,\ \overline{\gamma}) & \longmapsto & \times\!\!\!\!\!\!\int_{\mathcal{L}_\Gamma} \frac{t-\gamma\cdot P}{t-P} d\mu_\rho = \\ & & & & = Q(\rho,\gamma) \end{array}$$

Versión vía medidas Γ-invariantes III

Esto además nos permite comparar con la construcción analítica de la Jacobiana sobre $\mathbb{C}$ y así acabar este tema del seminario tal como lo hemos empezado, comparando los casos complejo y p-ádico, pues, como variedad de Albanese, la Jacobiana de una curva lisa y proyectiva $C/\mathbb{C}$ es el Coker de la aplicación

$$\begin{aligned} H_1(C,\mathbb{Z}) &\xrightarrow{\quad\Omega\quad} H^0(C,\omega_C)^\vee \\ \gamma &\longmapsto \left\{\varphi \mapsto \int_\gamma \varphi\right\} \end{aligned}$$

Observamos por una parte que igual que sobre $\mathbb{C}$ tenemos un grupo de homología singular, de algún modo también es así sobre K^*, pues $H_1(\Gamma,\mathbb{Z}) \cong H_1(G_\Gamma,\mathbb{Z})$ donde $\overline{\gamma}$ se identifica con el ciclo c_γ; y por otra parte, que aplicando el morfismo exponencial

Versión vía medidas Γ-invariantes IV

obtendríamos $exp^{\Omega}(\gamma)(\varphi)$, que cumple las propiedades de una integral multiplicativa.

Por último, diremos que parece que estas integrales de Dasgupta podrían generalizarse a dimensión superior mirando las medidas como distribuciones armónicas como en [AdS02], y de esta manera podría obtenerse una construcción analítica de las Jacobianas intermedias construidas algebraicamente por Raskind y Xarles en [RX07].

- Alon, G. and de Shalit, E., *On the cohomology of Drinfel′d's p-adic symmetric domain*, Israel J. Math. 129 (2002), 1–20, doi:10.1007/BF02773150. MR 2003i:14019

- Dasgupta, S. (2004) *GrossStark units, StarkHeegner points, and class fields of real quadratic fields*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, URL http://people.ucsc.edu/~sdasgup2/DasguptaPhdThesis.pdf.

- ———, *Stark-Heegner points on modular Jacobians*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (3) (2005), 427–469, doi:10.1016/j.ansens.2005.03.002. MR 2166341 (2006e:11080)

- Raskind, W. and Xarles, X., *On p-adic intermediate Jacobians*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (12) (2007), 6057–6077 (electronic), doi:10.1090/S0002-9947-07-04246-8. MR 2008i:14071