Esquema formal asociado a un grupo de Schottky

Piermarco Milione
Universitat de Barcelona

29 Enero 2013

Notaciones

Notaciones

$A :=$ anillo local noetheriano, completo, íntegramente cerrado.
$\mathfrak{m} :=$ ideal maximal de A.
$K :=$ cuerpo de fracciones de A.
$k :=$ cuerpo residual de A.

Notaciones

$A :=$ anillo local noetheriano, completo, íntegramente cerrado.
$\mathfrak{m} :=$ ideal maximal de A.
$K :=$ cuerpo de fracciones de A.
$k :=$ cuerpo residual de A.

$S := \mathrm{Spec}(A)$.
$S_\eta := \mathrm{Spec}(K)$, fibra genérica de S.
$S_0 := \mathrm{Spec}(k)$, fibra cerrada (o especial) de S.

$$S_\eta \xhookrightarrow{j} S \xhookleftarrow{i} S_0$$

Definición

Sea M una red de $K \times K$ de A-base $\{u, v\}$,

$$M = uA + vA$$

y sean $X, Y \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ tales que:

$$\begin{cases} X(u) = 1, & X(v) = 0 \\ Y(u) = 0, & Y(v) = 1 \end{cases}$$

*Definimos la **recta proyectiva sobre** M como el S-esquema proyectivo*

$$\mathbb{P}(M) := \mathrm{Proj}\, A[X, Y]$$

Definición

Sea M una red de $K \times K$ de A-base $\{u, v\}$,

$$M = uA + vA$$

y sean $X, Y \in \mathrm{Hom}_A(M, A)$ tales que:

$$\begin{cases} X(u) = 1, & X(v) = 0 \\ Y(u) = 0, & Y(v) = 1 \end{cases}$$

*Definimos la **recta proyectiva sobre** M como el S-esquema proyectivo*

$$\mathbb{P}(M) := \mathrm{Proj}\, A[X, Y]$$

Ejemplo

Si M es la red de A-base canónica $\{(1, 0), (0, 1)\}$, entonces $\mathbb{P}(M)$ es exactamente el S-esquema $\mathbb{P}^1_A$.

Conjunto de puntos A-valorados del esquema $\mathbb{P}(M)$:

$$\mathbb{P}(M)(A) = \frac{M \smallsetminus \mathfrak{m}M}{A^*}$$

Conjunto de puntos A-valorados del esquema $\mathbb{P}(M)$:

$$\mathbb{P}(M)(A) = \frac{M \setminus \mathfrak{m}M}{A^*}$$

Observaciones:

- El S-esquema $\mathbb{P}(M)$ es isomorfo (en general no S-isomorfo) a $\mathbb{P}^1_A$ y por lo tanto tiene fibra genérica isomorfa a $\mathbb{P}^1_K$.

Conjunto de puntos A-valorados del esquema $\mathbb{P}(M)$:

$$\mathbb{P}(M)(A) = \frac{M \setminus \mathfrak{m}M}{A^*}$$

Observaciones:

- El S-esquema $\mathbb{P}(M)$ es isomorfo (en general no S-isomorfo) a $\mathbb{P}^1_A$ y por lo tanto tiene fibra genérica isomorfa a $\mathbb{P}^1_K$.
- Si M_1 y M_2 son dos redes homotéticas de $K \times K$ (i.e. existe $\lambda \in K^*$ tal que $M_1 = \lambda M_2$), entonces, y sólo en este caso, los S-esquemas $\mathbb{P}(M_1), \mathbb{P}(M_2)$ son S-isomorfos.

Conjunto de puntos A-valorados del esquema $\mathbb{P}(M)$:

$$\mathbb{P}(M)(A) = \frac{M \setminus \mathfrak{m}M}{A^*}$$

Observaciones:

- El S-esquema $\mathbb{P}(M)$ es isomorfo (en general no S-isomorfo) a $\mathbb{P}^1_A$ y por lo tanto tiene fibra genérica isomorfa a $\mathbb{P}^1_K$.
- Si M_1 y M_2 son dos redes homotéticas de $K \times K$ (i.e. existe $\lambda \in K^*$ tal que $M_1 = \lambda M_2$), entonces, y sólo en este caso, los S-esquemas $\mathbb{P}(M_1), \mathbb{P}(M_2)$ son S-isomorfos.
- Todo esquema P sobre S tal que $P \simeq \mathbb{P}^1_A$ es del tipo $P = \mathbb{P}(M)$ por alguna red $M \subset K \times K$.

Conjunto de puntos A-valorados del esquema $\mathbb{P}(M)$:

$$\mathbb{P}(M)(A) = \frac{M \setminus \mathfrak{m}M}{A^*}$$

Observaciones:

- El S-esquema $\mathbb{P}(M)$ es isomorfo (en general no S-isomorfo) a $\mathbb{P}^1_A$ y por lo tanto tiene fibra genérica isomorfa a $\mathbb{P}^1_K$.
- Si M_1 y M_2 son dos redes homotéticas de $K \times K$ (i.e. existe $\lambda \in K^*$ tal que $M_1 = \lambda M_2$), entonces, y sólo en este caso, los S-esquemas $\mathbb{P}(M_1), \mathbb{P}(M_2)$ son S-isomorfos.
- Todo esquema P sobre S tal que $P \simeq \mathbb{P}^1_A$ es del tipo $P = \mathbb{P}(M)$ por alguna red $M \subset K \times K$.

$$\Delta^{(0)} := \{ \text{ clases de redes de } K \times K, \text{ módulo homotécia } \}$$

Conjunto de puntos A-valorados del esquema $\mathbb{P}(M)$:

$$\mathbb{P}(M)(A) = \frac{M \setminus \mathfrak{m}M}{A^*}$$

Observaciones:

- El S-esquema $\mathbb{P}(M)$ es isomorfo (en general no S-isomorfo) a $\mathbb{P}^1_A$ y por lo tanto tiene fibra genérica isomorfa a $\mathbb{P}^1_K$.
- Si M_1 y M_2 son dos redes homotéticas de $K \times K$ (i.e. existe $\lambda \in K^*$ tal que $M_1 = \lambda M_2$), entonces, y sólo en este caso, los S-esquemas $\mathbb{P}(M_1), \mathbb{P}(M_2)$ son S-isomorfos.
- Todo esquema P sobre S tal que $P \simeq \mathbb{P}^1_A$ es del tipo $P = \mathbb{P}(M)$ por alguna red $M \subset K \times K$.

$\Delta^{(0)} :=$ { clases de redes de $K \times K$, módulo homotécia } $\simeq$ { clases de S-isomorfía de esquemas P/S tales que $P \simeq \mathbb{P}^1_S$, $P_\eta = \mathbb{P}^1_K$ }.

Objetivo 1

Objetivo 1

Dado un subconjunto finito y *ligado* (cfr.[Mum, Definición 1.11])

$$\Delta_*^{(0)} := \{[M_1], \ldots, [M_r]\} \subset \Delta^{(0)}$$

construir un esquema normal y plano P sobre S tal que su fibra cerrada se identifica con el *dual del árbol* Δ_* obtenido de $\Delta_*^{(0)}$.

Definición

Dados Z_1, Z_2 *esquemas reducidos e irreducibles sobre* S *cuyas fibras genéricas son ambas isomorfas a* $\mathbb{P}^1_K$*, escribiremos* $Z_1 > Z_2$ *cuando existe un* S*-morfismo* $p : Z_1 \to Z_2$ *tal que restringido a las fibras genéricas es la identidad de* $\mathbb{P}^1_K$*.*

Definición

Dados Z_1, Z_2 esquemas reducidos e irreducibles sobre S cuyas fibras genéricas son ambas isomorfas a $\mathbb{P}^1_K$, escribiremos $Z_1 > Z_2$ cuando existe un S-morfismo $p : Z_1 \to Z_2$ tal que restringido a las fibras genéricas es la identidad de $\mathbb{P}^1_K$.
Esta condición se puede expresar con la conmutatividad de los diagramas siguientes:

$$
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, "p"] & Z_2 \\
\mathbb{P}^1_K \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{P}^1_K \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d] & Z_2 \arrow[dl] \\
S &
\end{tikzcd}
$$

Proposición

Sean $[M_1], [M_2] \in \Delta^{(0)}$ *dos clases de redes diferentes y sea* P_{12} *el supremo del conjunto* $\{\mathbb{P}(M_1), \mathbb{P}(M_2)\}$.
Se hallan los dos casos siguientes:

Proposición

Sean $[M_1], [M_2] \in \Delta^{(0)}$ *dos clases de redes diferentes y sea* P_{12} *el supremo del conjunto* $\{\mathbb{P}(M_1), \mathbb{P}(M_2)\}$.
Se hallan los dos casos siguientes:

1. *Si* $[M_1], [M_2]$ ***no*** *son compatibles, entonces*

$$(P_{12})_0 \simeq \mathbb{P}(M_1)_0 \times_{S_0} \mathbb{P}(M_2)_0$$

En particular P_{12} *no es un esquema plano sobre* S.

Proposición

Sean $[M_1], [M_2] \in \Delta^{(0)}$ *dos clases de redes diferentes y sea* P_{12} *el supremo del conjunto* $\{\mathbb{P}(M_1), \mathbb{P}(M_2)\}$*.*
Se hallan los dos casos siguientes:

1. *Si* $[M_1], [M_2]$ ***no*** *son compatibles, entonces*

$$(P_{12})_0 \simeq \mathbb{P}(M_1)_0 \times_{S_0} \mathbb{P}(M_2)_0$$

   En particular P_{12} *no es un esquema plano sobre* S*.*

2. *Si* $[M_1], [M_2]$ *son compatibles,* $\rho([M_1], [M_2]) = (\alpha)$ *por un* $\alpha \in A \setminus \mathfrak{m}$*, entonces el esquema* P_{12} *es normal y plano sobre* S *y su fibra cerrada es*

$$(P_{12})_0 \simeq \mathbb{P}(M_1)_0 \cup \mathbb{P}(M_2)_0$$

   cortándose en un punto k-racional.

Proposición

Sean $[M_1], [M_2] \in \Delta^{(0)}$ *dos clases de redes diferentes y sea* P_{12} *el supremo del conjunto* $\{\mathbb{P}(M_1), \mathbb{P}(M_2)\}$*.*
Se hallan los dos casos siguientes:

1. *Si* $[M_1], [M_2]$ ***no*** *son compatibles, entonces*

$$(P_{12})_0 \simeq \mathbb{P}(M_1)_0 \times_{S_0} \mathbb{P}(M_2)_0$$

   En particular P_{12} *no es un esquema plano sobre* S*.*

2. *Si* $[M_1], [M_2]$ *son compatibles,* $\rho([M_1], [M_2]) = (\alpha)$ *por un* $\alpha \in A \setminus \mathfrak{m}$*, entonces el esquema* P_{12} *es normal y plano sobre* S *y su fibra cerrada es*

$$(P_{12})_0 \simeq \mathbb{P}(M_1)_0 \cup \mathbb{P}(M_2)_0$$

   cortándose en un punto k*-racional.*

Observación

La Proposición cumple el Objetivo 1 en el caso $r = 2$.

Demostración

$$M_1 = \langle u_1, v_1 \rangle, M_2 = \langle u_2, v_2 \rangle$$

tales que:

$$\begin{aligned} u_2 &= au_1 + bv_1 \\ v_2 &= cu_1 + dv_1 \end{aligned} \tag{1}$$

con $a, b, c, d \in K$, $ad - bc \in K^*$.
Sean $X_i, Y_i \in \mathrm{Hom}(M_i, A)$ las funciones coordenadas de $\mathbb{P}(M_i)$:

$$\begin{aligned} X_i(u_i) = Y_i(v_i) = 1, \\ X_i(v_i) = Y_i(u_i) = 0 \end{aligned}$$

Luego tenemos un isomorfismo de cambio de coordenadas definido sobre K:

$$\begin{aligned} X_1 &= aX_2 + cY_2 \\ Y_1 &= bX_2 + dY_2 \end{aligned}$$

que induce un isomorfismo de esquemas sobre K

$$\mathbb{P}(M_1)_\eta \xrightarrow{f} \mathbb{P}(M_2)_\eta$$

El esquema P_{12} buscado es *la clausura en* $\mathbb{P}(M_1) \times_S \mathbb{P}(M_2)$ *del grafo del isomorfismo* f.

El esquema P_{12} buscado es *la clausura en* $\mathbb{P}(M_1) \times_S \mathbb{P}(M_2)$ *del grafo del isomorfismo* f.

Puntos A-valorados del S-esquema P_{12}:
$(x_1 : y_1, x_2 : y_2) \in \mathbb{P}(M_1)(A) \times \mathbb{P}(M_2)(A)$ satisfaciendo las ecuaciones:

$$x_1 = ax_2 + cy_2 \quad y_1 = bx_2 + dy_2 \tag{2}$$

El esquema P_{12} buscado es *la clausura en* $\mathbb{P}(M_1) \times_S \mathbb{P}(M_2)$ *del grafo del isomorfismo* f.
Puntos A-valorados del S-esquema P_{12}:
$(x_1 : y_1, x_2 : y_2) \in \mathbb{P}(M_1)(A) \times \mathbb{P}(M_2)(A)$ satisfaciendo las ecuaciones:

$$x_1 = ax_2 + cy_2 \quad y_1 = bx_2 + dy_2 \tag{2}$$

Tratándose de coordenadas homogéneas, (2) es equivalente a

$$x_1(bx_2 + dy_2) = y_1(ax_2 + cy_2) \tag{3}$$

El esquema P_{12} buscado es *la clausura en* $\mathbb{P}(M_1) \times_S \mathbb{P}(M_2)$ *del grafo del isomorfismo* f.
Puntos A-valorados del S-esquema P_{12}:
$(x_1 : y_1,\, x_2 : y_2) \in \mathbb{P}(M_1)(A) \times \mathbb{P}(M_2)(A)$ satisfaciendo las ecuaciones:

$$x_1 = ax_2 + cy_2 \quad y_1 = bx_2 + dy_2 \tag{2}$$

Tratándose de coordenadas homogéneas, (2) es equivalente a

$$x_1(bx_2 + dy_2) = y_1(ax_2 + cy_2) \tag{3}$$

$$ax_2y_1 - bx_1y_2 + cy_1y_2 - dy_2x_1 = 0 \tag{4}$$

El esquema P_{12} buscado es *la clausura en* $\mathbb{P}(M_1) \times_S \mathbb{P}(M_2)$ *del grafo del isomorfismo* f.

Puntos A-valorados del S-esquema P_{12}:

$(x_1 : y_1, x_2 : y_2) \in \mathbb{P}(M_1)(A) \times \mathbb{P}(M_2)(A)$ satisfaciendo las ecuaciones:

$$x_1 = ax_2 + cy_2 \quad y_1 = bx_2 + dy_2 \tag{2}$$

Tratándose de coordenadas homogéneas, (2) es equivalente a

$$x_1(bx_2 + dy_2) = y_1(ax_2 + cy_2) \tag{3}$$

$$ax_2y_1 - bx_1y_2 + cy_1y_2 - dy_2x_1 = 0 \tag{4}$$

Finalmente está claro que tenemos el siguiente esquema proyectivo sobre S:

$$P_{12} = \mathrm{Proj}\, \frac{A[X_1X_2, X_1Y_2, Y_1X_2, Y_1Y_2]}{(aX_2Y_1 - bX_1X_2 + cY_1Y_2 - dY_2X_1)}$$

El esquema P_{12} buscado es *la clausura en* $\mathbb{P}(M_1) \times_S \mathbb{P}(M_2)$ *del grafo del isomorfismo* f.

Puntos A-valorados del S-esquema P_{12}:

$(x_1 : y_1, x_2 : y_2) \in \mathbb{P}(M_1)(A) \times \mathbb{P}(M_2)(A)$ satisfaciendo las ecuaciones:

$$x_1 = ax_2 + cy_2 \quad y_1 = bx_2 + dy_2 \tag{2}$$

Tratándose de coordenadas homogéneas, (2) es equivalente a

$$x_1(bx_2 + dy_2) = y_1(ax_2 + cy_2) \tag{3}$$

$$ax_2y_1 - bx_1y_2 + cy_1y_2 - dy_2x_1 = 0 \tag{4}$$

Finalmente está claro que tenemos el siguiente esquema proyectivo sobre S:

$$P_{12} = \operatorname{Proj} \frac{A[X_1X_2, X_1Y_2, Y_1X_2, Y_1Y_2]}{(aX_2Y_1 - bX_1X_2 + cY_1Y_2 - dY_2X_1)}$$

La ecuación (3) permite interpretar el esquema P_{12} como un *blow-up* de $\mathbb{P}(M_1)$ (resp. de $\mathbb{P}(M_2)$) en un punto individuado por $\mathbb{P}(M_2)$ (resp. por $\mathbb{P}(M_1)$) (cfr.[Rey]).

Una vez construido el esquema P_{12} sobre S, podemos mirar su fibra cerrada. El Teorema de Ramanujam-Samuel (cfr.[EGA, IV, 21.14]) nos dice que debemos distinguir dos casos

Una vez construido el esquema P_{12} sobre S, podemos mirar su fibra cerrada. El Teorema de Ramanujam-Samuel (cfr.[EGA, IV, 21.14]) nos dice que debemos distinguir dos casos

1. Existe un $\mu \in K^*$ tal que los coeficientes $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d \in A$ pertenecen todos a $\mathfrak{m}$.

Una vez construido el esquema P_{12} sobre S, podemos mirar su fibra cerrada. El Teorema de Ramanujam-Samuel (cfr.[EGA, IV, 21.14]) nos dice que debemos distinguir dos casos

1. Existe un $\mu \in K^*$ tal que los coeficientes $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d \in A$ pertenecen todos a $\mathfrak{m}$.
   En este caso, reduciendo la ecuación $\mu(4)$ módulo $\mathfrak{m}$ se obtiene una identidad. Concretamente, la fibra cerrada del esquema P_{12} coincide con el producto fibrado $\mathbb{P}(M_1)_0 \times_k \mathbb{P}(M_2)_0$. Está claro que en este caso la dimensión de $(P_{12})_0$ es igual a $\dim \mathbb{P}(M_1)_0 + \dim \mathbb{P}(M_2)_0 = 2$ mientras que la fibra genérica tiene dimensión 1.

Una vez construido el esquema P_{12} sobre S, podemos mirar su fibra cerrada. El Teorema de Ramanujam-Samuel (cfr.[EGA, IV, 21.14]) nos dice que debemos distinguir dos casos

1. Existe un $\mu \in K^*$ tal que los coeficientes $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d \in A$ pertenecen todos a $\mathfrak{m}$.
   En este caso, reduciendo la ecuación $\mu(4)$ módulo $\mathfrak{m}$ se obtiene una identidad. Concretamente, la fibra cerrada del esquema P_{12} coincide con el producto fibrado $\mathbb{P}(M_1)_0 \times_k \mathbb{P}(M_2)_0$. Está claro que en este caso la dimensión de $(P_{12})_0$ es igual a $\dim \mathbb{P}(M_1)_0 + \dim \mathbb{P}(M_2)_0 = 2$ mientras que la fibra genérica tiene dimensión 1.
2. Existe un $\mu \in K^*$ tal que los coeficientes $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d \in A$ no pertenecen todos a $\mathfrak{m}$.

Una vez construido el esquema P_{12} sobre S, podemos mirar su fibra cerrada. El Teorema de Ramanujam-Samuel (cfr.[EGA, IV, 21.14]) nos dice que debemos distinguir dos casos

1. Existe un $\mu \in K^*$ tal que los coeficientes $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d \in A$ pertenecen todos a $\mathfrak{m}$.
   En este caso, reduciendo la ecuación $\mu(4)$ módulo $\mathfrak{m}$ se obtiene una identidad. Concretamente, la fibra cerrada del esquema P_{12} coincide con el producto fibrado $\mathbb{P}(M_1)_0 \times_k \mathbb{P}(M_2)_0$. Está claro que en este caso la dimensión de $(P_{12})_0$ es igual a $\dim \mathbb{P}(M_1)_0 + \dim \mathbb{P}(M_2)_0 = 2$ mientras que la fibra genérica tiene dimensión 1.
2. Existe un $\mu \in K^*$ tal que los coeficientes $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d \in A$ no pertenecen todos a $\mathfrak{m}$.
   La fibra cerrada $(P_{12})_0$ queda definida por una ecuación del tipo $\overline{\mu(4)}$ con coeficientes no todos nulos en k.

Una vez construido el esquema P_{12} sobre S, podemos mirar su fibra cerrada. El Teorema de Ramanujam-Samuel (cfr.[EGA, IV, 21.14]) nos dice que debemos distinguir dos casos

1. Existe un $\mu \in K^*$ tal que los coeficientes $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d \in A$ pertenecen todos a $\mathfrak{m}$.
   En este caso, reduciendo la ecuación $\mu(4)$ módulo $\mathfrak{m}$ se obtiene una identidad. Concretamente, la fibra cerrada del esquema P_{12} coincide con el producto fibrado $\mathbb{P}(M_1)_0 \times_k \mathbb{P}(M_2)_0$. Está claro que en este caso la dimensión de $(P_{12})_0$ es igual a $\dim \mathbb{P}(M_1)_0 + \dim \mathbb{P}(M_2)_0 = 2$ mientras que la fibra genérica tiene dimensión 1.
2. Existe un $\mu \in K^*$ tal que los coeficientes $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d \in A$ no pertenecen todos a $\mathfrak{m}$.
   La fibra cerrada $(P_{12})_0$ queda definida por una ecuación del tipo $\overline{\mu(4)}$ con coeficientes no todos nulos en k.

Luego se demuestra que el Caso 2 se corresponde exactamente con la condición de que las dos redes $[M_1], [M_2]$ son compatibles (luego el Caso 1 coincidirá con que las dos redes no son compatibles).

Proposición

$[M_1], [M_2] \in \Delta^{(0)}$ *dos clases de redes diferentes y compatibles.*
z *un punto cerrado de* $\mathbb{P}^1_K$.
$\mathrm{cl}_{P_{12}}(z)$, *clausura de* $\{z\}$ *dentro de* P_{12}.
$\mathbb{P}(M_i)_0$, *componente de* $(P_{12})_0$, *isomorfa a* $\mathbb{P}(M_i)_0$.

$$\begin{tikzcd}
(P_{12})_\eta \arrow[r, hook] \arrow[d] & P_{12} \arrow[d] & (P_{12})_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} K \arrow[r, hook] & S & \operatorname{Spec} k \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Proposición

$[M_1], [M_2] \in \Delta^{(0)}$ *dos clases de redes diferentes y compatibles.*
z *un punto cerrado de* $\mathbb{P}^1_K$.
$\mathrm{cl}_{P_{12}}(z)$, *clausura de* $\{z\}$ *dentro de* P_{12}.
$\mathbb{P}(M_i)_0$, *componente de* $(P_{12})_0$, *isomorfa a* $\mathbb{P}(M_i)_0$.

$$\begin{tikzcd}
(P_{12})_\eta \arrow[r, hook] \arrow[d] & P_{12} \arrow[d] & (P_{12})_0 \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} K \arrow[r, hook] & S & \operatorname{Spec} k \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

$[M_1]$ *separa* $[M_2]$ *de* $z \iff \mathrm{cl}_{P_{12}}(z) \cap \mathbb{P}(M_2)_0 = \emptyset$

Proposición

Sea $\Delta_*^{(0)} := \{[M_1], \ldots, [M_r]\}$ *un subconjunto finito y ligado de* $\Delta^{(0)}$ *y sea* Δ_* *el árbol asociado a este subconjunto. Sea* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *el supremo del conjunto formado por los* S*-esquemas* $\{\mathbb{P}(M_i)\}_{i=1,\ldots,r}$. *Entonces* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *es un esquema normal, propio y plano sobre* S*, cuya fibra cerrada goza de las siguientes propiedades:*

Proposición

Sea $\Delta_*^{(0)} := \{[M_1], \ldots, [M_r]\}$ *un subconjunto finito y ligado de* $\Delta^{(0)}$ *y sea* Δ_* *el árbol asociado a este subconjunto. Sea* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *el supremo del conjunto formado por los* S*-esquemas* $\{\mathbb{P}(M_i)\}_{i=1,\ldots,r}$*. Entonces* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *es un esquema normal, propio y plano sobre* S*, cuya fibra cerrada goza de las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{P}(\Delta_*)_0$ *es un esquema reducido, conexo y de dimensión 1 sobre* $\operatorname{Spec} k$*.*

Proposición

Sea $\Delta_*^{(0)} := \{[M_1], \ldots, [M_r]\}$ *un subconjunto finito y ligado de* $\Delta^{(0)}$ *y sea* Δ_* *el árbol asociado a este subconjunto. Sea* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *el supremo del conjunto formado por los* S*-esquemas* $\{\mathbb{P}(M_i)\}_{i=1,\ldots,r}$*. Entonces* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *es un esquema normal, propio y plano sobre* S*, cuya fibra cerrada goza de las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{P}(\Delta_*)_0$ *es un esquema reducido, conexo y de dimensión 1 sobre* $\operatorname{Spec} k$*.*
2. $\mathbb{P}(\Delta_*)_0$ *está formado por* r *componentes irreducibles, isomorfas respectivamente a los esquemas* $\mathbb{P}(M_i)_0$*, por* $i = 1, \ldots, r$*.*

Proposición

Sea $\Delta_*^{(0)} := \{[M_1], \dots, [M_r]\}$ *un subconjunto finito y ligado de* $\Delta^{(0)}$ *y sea* Δ_* *el árbol asociado a este subconjunto. Sea* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *el supremo del conjunto formado por los* S*-esquemas* $\{\mathbb{P}(M_i)\}_{i=1,\dots,r}$*. Entonces* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *es un esquema normal, propio y plano sobre* S*, cuya fibra cerrada goza de las siguientes propiedades:*

1. $\mathbb{P}(\Delta_*)_0$ *es un esquema reducido, conexo y de dimensión 1 sobre* $\operatorname{Spec} k$*.*
2. $\mathbb{P}(\Delta_*)_0$ *está formado por* r *componentes irreducibles, isomorfas respectivamente a los esquemas* $\mathbb{P}(M_i)_0$*, por* $i = 1, \dots, r$*.*
3. *Dos componentes* $\mathbb{P}(M_i)_0, \mathbb{P}(M_j)_0$ *se cortan si y sólo si los elementos* $[M_i], [M_j] \in \Delta_*^{(0)}$ *son adyacentes en el árbol* Δ_**.*

Proposición

Sea $\Delta_*^{(0)} = \{[M_1, \ldots, [M_r]]\}$ *un subconjunto finito y ligado de* $\Delta^{(0)}$*, y sea* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *el esquema sobre* S *asociado al árbol* Δ_* *cuyos vértices son los elementos de* $\Delta_*^{(0)}$*. Sea* z *un punto cerrado de* $\mathbb{P}^1_K$ *y denotemos por* $\mathrm{cl}(z)$ *la clausura de* $\{z\}$ *dentro de* $\mathbb{P}(\Delta_*)$*. Entonces para todo* $i = 1, \ldots, r$ *se tienen los dos enunciados equivalentes:*

Proposición

Sea $\Delta_*^{(0)} = \{[M_1, \ldots, [M_r]]\}$ *un subconjunto finito y ligado de* $\Delta^{(0)}$*, y sea* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *el esquema sobre* S *asociado al árbol* Δ_* *cuyos vértices son los elementos de* $\Delta_*^{(0)}$*. Sea* z *un punto cerrado de* $\mathbb{P}_K^1$ *y denotemos por* $\mathrm{cl}(z)$ *la clausura de* $\{z\}$ *dentro de* $\mathbb{P}(\Delta_*)$*. Entonces para todo* $i = 1, \ldots, r$ *se tienen los dos enunciados equivalentes:*

1. $[M_i]$ *está en la base de* z *(relativa a* Δ_**)*
   $\iff \mathrm{cl}(z) \cap \mathbb{P}(M_i)_0 \neq \emptyset$

Proposición

Sea $\Delta_*^{(0)} = \{[M_1, \ldots, [M_r]]\}$ *un subconjunto finito y ligado de* $\Delta^{(0)}$*, y sea* $\mathbb{P}(\Delta_*)$ *el esquema sobre* S *asociado al árbol* Δ_* *cuyos vértices son los elementos de* $\Delta_*^{(0)}$*. Sea* z *un punto cerrado de* $\mathbb{P}_K^1$ *y denotemos por* $\mathrm{cl}(z)$ *la clausura de* $\{z\}$ *dentro de* $\mathbb{P}(\Delta_*)$*. Entonces para todo* $i = 1, \ldots, r$ *se tienen los dos enunciados equivalentes:*

1. $[M_i]$ *está en la base de* z *(relativa a* Δ_**)* $\iff \mathrm{cl}(z) \cap \mathbb{P}(M_i)_0 \neq \emptyset$
2. *Existe un* $[M_j] \in \Delta_*$ *que separa* $[M_i]$ *de* $z \iff \mathrm{cl}(z) \cap \mathbb{P}(M_i)_0 = \emptyset$

Aplicación de reducción

Aplicación de reducción

Cuando $\dim A = 1$, tenemos la siguiente aplicación de reducción (o especialización):

$$z \in \mathbb{P}^1_K(K) \longmapsto \mathrm{red}(z) := \mathrm{cl}(z) \cap \mathbb{P}(\Delta_*)_0 \in \mathbb{P}(\Delta_*)_0 \setminus \{\textit{puntos dobles}\}$$

Aplicación de reducción

Cuando $\dim A = 1$, tenemos la siguiente aplicación de reducción (o especialización):

$$z \in \mathbb{P}^1_K(K) \longmapsto \mathrm{red}(z) := \mathrm{cl}(z) \cap \mathbb{P}(\Delta_*)_0 \in \mathbb{P}(\Delta_*)_0 \setminus \{\textit{puntos dobles}\}$$

Como en este caso se tiene una biyección $\partial\Delta \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^1_K(K)$ entre los finales del árbol de Bruhat-Tits Δ y los puntos cerrados de $\mathbb{P}^1_K$

Aplicación de reducción

Cuando $\dim A = 1$, tenemos la siguiente aplicación de reducción (o especialización):

$$z \in \mathbb{P}^1_K(K) \longmapsto \mathrm{red}(z) := \mathrm{cl}(z) \cap \mathbb{P}(\Delta_*)_0 \in \mathbb{P}(\Delta_*)_0 \setminus \{\textit{puntos dobles}\}$$

Como en este caso se tiene una biyección $\partial\Delta \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^1_K(K)$ entre los finales del árbol de Bruhat-Tits Δ y los puntos cerrados de $\mathbb{P}^1_K$

$$i^{-1}(z) = e \in \partial\Delta \longmapsto \mathrm{red}(e) \in \{\textit{aristas de } \Delta \setminus \Delta_* \textit{ que tocan } \Delta_*\}$$

donde la reducción de un final $\mathrm{red}(e)$ está definida como la arista de Δ en un camino de e al árbol Δ_* que toca Δ_* pero no pertenece a Δ_*.

Objetivo 2

Objetivo 2

Dado un subconjunto no finito y *ligado* $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ tal que el árbol Δ_* sea localmente finito.
Construir un esquema **formal** normal y plano P sobre S tal que su fibra cerrada se identifica con el *dual del árbol* Δ_*.

Objetivo 2

Dado un subconjunto no finito y *ligado* $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ tal que el árbol Δ_* sea localmente finito.
Construir un esquema **formal** normal y plano P sobre S tal que su fibra cerrada se identifica con el *dual del árbol* Δ_*.

Idea de la solución

Construir el supremo del conjunto $\{\mathbb{P}(M) \mid [M] \in \Delta_*^{(0)}\}$ respecto de la relación de orden introducida.

Definición

Dado $\Delta^0_* \subset \Delta^0$ *un subconjunto ligado (no necesariamente finito) tal que el árbol asociado* Δ_* *es localmente finito (i.e. cada vértice toca un número finito de aristas).*

Definición

Dado $\Delta^0_* \subset \Delta^0$ *un subconjunto ligado (no necesariamente finito) tal que el árbol asociado* Δ_* *es localmente finito (i.e. cada vértice toca un número finito de aristas).*
Para todo subárbol finito $T \subset \Delta_*$*, sea* $\mathbb{P}(T)$ *el esquema proyectivo asociado.*

Definición

Dado $\Delta^0_* \subset \Delta^0$ un subconjunto ligado (no necesariamente finito) tal que el árbol asociado Δ_* es localmente finito (i.e. cada vértice toca un número finito de aristas).
Para todo subárbol finito $T \subset \Delta_*$, sea $\mathbb{P}(T)$ el esquema proyectivo asociado.
Se define el ***esquema formal asociado a*** T *como el esquema formal obtenido de la completación del esquema $\mathbb{P}(T)$ a lo largo de su fibra cerrada $\mathbb{P}(T)_0$. Este esquema formal se denotará con $\mathscr{P}(T)$.*

Completación de un esquema

Completación de un esquema

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema (sobre S).

Completación de un esquema

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema (sobre S).
La fibra cerrada X_0 de X está definida por un ideal casi-coherente $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X$.

Completación de un esquema

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema (sobre S).
La fibra cerrada X_0 de X está definida por un ideal casi-coherente $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X$.
Sea $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ el haz obtenido restringiendo el limite proyectivo

$$\varprojlim \mathcal{O}_X/(\mathfrak{m})^n$$

al esquema X_0.

Completación de un esquema

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un esquema (sobre S).
La fibra cerrada X_0 de X está definida por un ideal casi-coherente $\mathfrak{m}\mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_X$.
Sea $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ el haz obtenido restringiendo el limite proyectivo

$$\varprojlim \mathcal{O}_X/(\mathfrak{m})^n$$

al esquema X_0.
La **completación de X (a lo largo de su fibra cerrada)**, se define como el espacio localmente anillado

$$\hat{X} := (X_0, \mathcal{O}_{\hat{X}})$$

Ejemplo importante:

Ejemplo importante:

Supongamos que $\dim A = 1$, A es regular y su ideal maximal es $\mathfrak{m} = (\pi)$.
Sea $X = \operatorname{Spec} A[\zeta_1, \ldots \zeta_r]$ el esquema afín sobre A cuya fibra cerrada es

$$X_0 = \operatorname{Spec} \frac{A[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]}{(\pi)} = \operatorname{Spec} k[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]$$

Ejemplo importante:

Supongamos que $\dim A = 1$, A es regular y su ideal maximal es $\mathfrak{m} = (\pi)$.
Sea $X = \operatorname{Spec} A[\zeta_1, \ldots \zeta_r]$ el esquema afín sobre A cuya fibra cerrada es

$$X_0 = \operatorname{Spec} \frac{A[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]}{(\pi)} = \operatorname{Spec} k[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]$$

Entonces la completación de X es $\hat{X} = (X_0, \mathcal{O}_{\hat{X}})$, donde

$$\mathcal{O}_{\hat{X}} = \varprojlim_n \frac{A[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]}{(\pi)^n}$$

Ejemplo importante:

Supongamos que $\dim A = 1$, A es regular y su ideal maximal es $\mathfrak{m} = (\pi)$.
Sea $X = \operatorname{Spec} A[\zeta_1, \ldots \zeta_r]$ el esquema afín sobre A cuya fibra cerrada es

$$X_0 = \operatorname{Spec} \frac{A[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]}{(\pi)} = \operatorname{Spec} k[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]$$

Entonces la completación de X es $\hat{X} = (X_0, \mathcal{O}_{\hat{X}})$, donde

$$\mathcal{O}_{\hat{X}} = \varprojlim_n \frac{A[\zeta_1, \ldots, \zeta_r]}{(\pi)^n}$$

Resulta que $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ es una A-álgebra isomorfa a la A-álgebra de series convergentes

$$A\langle \zeta_1, \ldots, \zeta_r \rangle := \{ \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_{\nu_1, \ldots, \nu_n} \zeta_1^{\nu_1} \ldots \zeta_n^{\nu_n} \in A[[\zeta_1, \ldots, \zeta_n]], \lim \mid c_\nu \mid = 0 \}$$

Un recubrimiento de Δ_*

Consideramos el siguiente recubrimiento de Δ_* constituido por árboles finitos $\{T_n\}_{n\geq 1}$ tal que:

Un recubrimiento de Δ_*

Consideramos el siguiente recubrimiento de Δ_* constituido por árboles finitos $\{T_n\}_{n\geq 1}$ tal que:

$T_1 := \{v\}$, por algún vértice $v \in \Delta_*$

Un recubrimiento de Δ_*

Consideramos el siguiente recubrimiento de Δ_* constituido por árboles finitos $\{T_n\}_{n\geq 1}$ tal que:

$T_1 := \{v\}$, por algún vértice $v \in \Delta_*$

$T_2 := \{v\} \cup \{\textit{aristas de } \Delta_* \textit{ que tocan } v\}$

Un recubrimiento de Δ_*

Consideramos el siguiente recubrimiento de Δ_* constituido por árboles finitos $\{T_n\}_{n\geq 1}$ tal que:

$T_1 := \{v\}$, por algún vértice $v \in \Delta_*$

$T_2 := \{v\} \cup \{\textit{aristas de } \Delta_* \textit{ que tocan } v\}$

$\dots$

Un recubrimiento de Δ_*

Consideramos el siguiente recubrimiento de Δ_* constituido por árboles finitos $\{T_n\}_{n\geq 1}$ tal que:

$T_1 := \{v\}$, por algún vértice $v \in \Delta_*$

$T_2 := \{v\} \cup \{aristas\ de\ \Delta_*\ que\ tocan\ v\}$

$\ldots$

$T_n := T_{n-1} \cup \{aristas\ de\ \Delta_*\ que\ tocan\ las\ aristas\ de\ T_{n-1}\}$

Definición

Para todo subárbol finito $T_n \subset \Delta_*$ *del recubrimiento anterior, definimos el abierto* $\mathscr{P}(T_n)' \subset \mathscr{P}(T_n)$ *como el abierto* $U \subset \mathbb{P}(T_n)_0$ *constituido exactamente por:*

Definición

Para todo subárbol finito $T_n \subset \Delta_*$ *del recubrimiento anterior, definimos el abierto* $\mathscr{P}(T_n)' \subset \mathscr{P}(T_n)$ *como el abierto* $U \subset \mathbb{P}(T_n)_0$ *constituido exactamente por:*

- *las componentes de* $\mathbb{P}(T_{n-1})_0$

Definición

Para todo subárbol finito $T_n \subset \Delta_*$ del recubrimiento anterior, definimos el abierto $\mathscr{P}(T_n)' \subset \mathscr{P}(T_n)$ como el abierto $U \subset \mathbb{P}(T_n)_0$ constituido exactamente por:

- *las componentes de $\mathbb{P}(T_{n-1})_0$*
- *los puntos de las componentes de $\mathbb{P}(T_n)_0$ diferentes de los puntos de intersección entre las componentes de $\mathbb{P}(T_n)_0$ y las $\mathbb{P}(T_{n+1})_0$*

La cadena de subárboles finitos

$$T_1 = \{v\} \subset T_2 \subset \cdots \subset T_n \subset \ldots \Delta_*$$

induce unos morfismos de esquemas $\{p_n\}_{n \geq 1}$

$$\mathbb{P}(T_1) \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}(T_2) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{P}(T_n) \xrightarrow{p_n} \ldots$$

La cadena de subárboles finitos

$$T_1 = \{v\} \subset T_2 \subset \cdots \subset T_n \subset \ldots \Delta_*$$

induce unos morfismos de esquemas $\{p_n\}_{n\geq 1}$

$$\mathbb{P}(T_1) \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}(T_2) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{P}(T_n) \xrightarrow{p_n} \ldots$$

que a su vez inducen unos morfismos de esquemas formales $\{p_n\}_{n\geq 1}$

$$\mathscr{P}(T_1) \xrightarrow{p_1} \mathscr{P}(T_2) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathscr{P}(T_n) \xrightarrow{p_n} \ldots$$

La cadena de subárboles finitos

$$T_1 = \{v\} \subset T_2 \subset \cdots \subset T_n \subset \ldots \Delta_*$$

induce unos morfismos de esquemas $\{p_n\}_{n\geq 1}$

$$\mathbb{P}(T_1) \xrightarrow{p_1} \mathbb{P}(T_2) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{P}(T_n) \xrightarrow{p_n} \ldots$$

que a su vez inducen unos morfismos de esquemas formales $\{p_n\}_{n\geq 1}$

$$\mathscr{P}(T_1) \xrightarrow{p_1} \mathscr{P}(T_2) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathscr{P}(T_n) \xrightarrow{p_n} \ldots$$

Por lo tanto tenemos un sistema proyectivo $\{\mathscr{P}(T_n), p_n\}_{n\geq 1}$ de esquemas formales.

Sin embargo, si en lugar de considerar todo el esquemas formales $\mathscr{P}(T_n)$ nos restringimos a los abiertos $\mathscr{P}(T_n)'$ introducidos anteriormente, obtenemos una cadena de inmersiones abiertas:

$$\mathscr{P}(T_1)' \xhookrightarrow{i_1} \mathscr{P}(T_2)' \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathscr{P}(T_n)' \xhookrightarrow{i_n} \dots$$

y por consecuencia un sistema inductivo $\{\mathscr{P}(T_n)', i_n\}_{n\geq 1}$ de esquemas formales abiertos.

Sin embargo, si en lugar de considerar todo el esquemas formales $\mathscr{P}(T_n)$ nos restringimos a los abiertos $\mathscr{P}(T_n)'$ introducidos anteriormente, obtenemos una cadena de inmersiones abiertas:

$$\mathscr{P}(T_1)' \xhookrightarrow{i_1} \mathscr{P}(T_2)' \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathscr{P}(T_n)' \xhookrightarrow{i_n} \ldots$$

y por consecuencia un sistema inductivo $\{\mathscr{P}(T_n)', i_n\}_{n\geq 1}$ de esquemas formales abiertos.

Definición

Definimos el ***esquema formal asociado al árbol localmente finito*** Δ_* *como el límite directo de los esquemas formales abiertos* $\mathscr{P}(T_i)'$

$$\mathscr{P}(\Delta_*) := \varinjlim_n \mathscr{P}(T_n)'$$

Proposición

El esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_*)$ es normal y plano sobre S. Su fibra cerrada $\mathscr{P}(\Delta_*)_0$ goza de las siguientes propiedades

Proposición

El esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_*)$ *es normal y plano sobre* S*. Su fibra cerrada* $\mathscr{P}(\Delta_*)_0$ *goza de las siguientes propiedades*

1. *es un esquema sobre* k *reducido, conexo, de dimensión 1 y localmente finito.*

Proposición

El esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_*)$ es normal y plano sobre S. Su fibra cerrada $\mathscr{P}(\Delta_*)_0$ goza de las siguientes propiedades

1. *es un esquema sobre k reducido, conexo, de dimensión 1 y localmente finito.*
2. *sus componentes irreducibles son todas isomorfas a $\mathbb{P}^1_k$ y están en biyección con los vértices del árbol Δ_*.*

Proposición

El esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_*)$ es normal y plano sobre S. Su fibra cerrada $\mathscr{P}(\Delta_*)_0$ goza de las siguientes propiedades

1. *es un esquema sobre k reducido, conexo, de dimensión 1 y localmente finito.*
2. *sus componentes irreducibles son todas isomorfas a $\mathbb{P}^1_k$ y están en biyección con los vértices del árbol Δ_*.*
3. *dos componentes se cortan si y solo si los correspondientes vértices de Δ_* son adyacentes.*
4. *si dos componentes se cortan, entonces el punto de intersección es un punto doble y k-racional.*

- **Realmente he asociado a un grupo de Schottky un esquema formal ?**

- **Realmente he asociado a un grupo de Schottky un esquema formal ?**
  Dado un grupo de Schottky (plano) Γ, puedo asociarle un árbol Δ_Γ que es localmente finito y a este puedo asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$

- **Realmente he asociado a un grupo de Schottky un esquema formal ?**
  Dado un grupo de Schottky (plano) Γ, puedo asociarle un árbol Δ_Γ que es localmente finito y a este puedo asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$
- **Dónde está el semiplano de Drinfel'd ?**

- **Realmente he asociado a un grupo de Schottky un esquema formal ?**
  Dado un grupo de Schottky (plano) Γ, puedo asociarle un árbol Δ_Γ que es localmente finito y a este puedo asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$
- **Dónde está el semiplano de Drinfel'd ?**
  Cuando A es el anillo de enteros de un cuerpo local K (además de las propiedades que hemos supuesto A debe ser regular y $\dim A = 1$), disponemos del árbol de Bruhat-Tits Δ. Este es un árbol localmente finito (cfr. [Ser]), por lo tanto podemos asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta)$.

- **Realmente he asociado a un grupo de Schottky un esquema formal ?**
  Dado un grupo de Schottky (plano) Γ, puedo asociarle un árbol Δ_Γ que es localmente finito y a este puedo asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$
- **Dónde está el semiplano de Drinfel'd ?**
  Cuando A es el anillo de enteros de un cuerpo local K (además de las propiedades que hemos supuesto A debe ser regular y $\dim A = 1$), disponemos del árbol de Bruhat-Tits Δ. Este es un árbol localmente finito (cfr. [Ser]), por lo tanto podemos asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta)$.
  $\mathscr{P}(\Delta)$ toma el nombre en la literatura de *modelo entero* (o *modelo formal*) del semiplano de Drinfel'd sobre K.

- **Realmente he asociado a un grupo de Schottky un esquema formal ?**
  Dado un grupo de Schottky (plano) Γ, puedo asociarle un árbol Δ_Γ que es localmente finito y a este puedo asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$
- **Dónde está el semiplano de Drinfel'd ?**
  Cuando A es el anillo de enteros de un cuerpo local K (además de las propiedades que hemos supuesto A debe ser regular y $\dim A = 1$), disponemos del árbol de Bruhat-Tits Δ. Este es un árbol localmente finito (cfr. [Ser]), por lo tanto podemos asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta)$.
  $\mathscr{P}(\Delta)$ toma el nombre en la literatura de *modelo entero* (o *modelo formal*) del semiplano de Drinfel'd sobre K.
- **Se puede ver el esquema forma $\mathscr{P}(\Delta)$ como el esquema formal asociado a un grupo de Schottky ?**

- **Realmente he asociado a un grupo de Schottky un esquema formal ?**
  Dado un grupo de Schottky (plano) Γ, puedo asociarle un árbol Δ_Γ que es localmente finito y a este puedo asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$
- **Dónde está el semiplano de Drinfel'd ?**
  Cuando A es el anillo de enteros de un cuerpo local K (además de las propiedades que hemos supuesto A debe ser regular y $\dim A = 1$), disponemos del árbol de Bruhat-Tits Δ. Este es un árbol localmente finito (cfr. [Ser]), por lo tanto podemos asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta)$.
  $\mathscr{P}(\Delta)$ toma el nombre en la literatura de *modelo entero* (o *modelo formal*) del semiplano de Drinfel'd sobre K.
- **Se puede ver el esquema forma $\mathscr{P}(\Delta)$ como el esquema formal asociado a un grupo de Schottky ?**
  Equivalentemente, es $\Delta = \Delta_\Gamma$ por algún grupo de Schottky Γ ?

- **Realmente he asociado a un grupo de Schottky un esquema formal ?**
  Dado un grupo de Schottky (plano) Γ, puedo asociarle un árbol Δ_Γ que es localmente finito y a este puedo asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$
- **Dónde está el semiplano de Drinfel'd ?**
  Cuando A es el anillo de enteros de un cuerpo local K (además de las propiedades que hemos supuesto A debe ser regular y $\dim A = 1$), disponemos del árbol de Bruhat-Tits Δ. Este es un árbol localmente finito (cfr. [Ser]), por lo tanto podemos asociarle el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta)$.
  $\mathscr{P}(\Delta)$ toma el nombre en la literatura de *modelo entero* (o *modelo formal*) del semiplano de Drinfel'd sobre K.
- **Se puede ver el esquema forma $\mathscr{P}(\Delta)$ como el esquema formal asociado a un grupo de Schottky ?**
  Equivalentemente, es $\Delta = \Delta_\Gamma$ por algún grupo de Schottky Γ ?
- **Es el esquema formal $\mathscr{P}(\Delta)$ *algebraizable* ?**

- Grothendieck A., Dieudonné J., *Eléments de geométrie algébrique*, Publications Mathématiques de l' I.H.E.S., 1961-1967.
- Liu, Q.,*Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, 2002
- Mumford D., An analytic construction of degenerating curves over complete local rings, *Compositio Mathematica*, tome 24, n^0 2 (1970).
- Raynaud, M., Construction analytique de courbes en géométrie non archimédienne (d après Mumford) *Séminaire Bourbaki* 15, Exp. n^0 427 (1972-1973).
- Serre J. P., *Arbres, amalgames,* SL_2. (Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass), Astérisque, n^0 46, Société Mathématique de France, Paris, 1977.