# *Model estable versus model minimal d'una corba de gènere* 2

Victor Rotger

21è SEMINARI DE TEORIA DE NOMBRES UB - UAB - UPC

30 de gener de 2007

$\diamond$ $R$ anell de valoració discreta estrictament henselià:

- $k = R/\wp$ separablement tancat,

$$\mathrm{car}(k) \neq 2 \text{ i } \wp = (t).$$

- Si $p(x) \in R[x]$, $a \in R$, $\bar{p}(a) \equiv 0$, $\bar{p}'(a) \not\equiv 0$,

  $\exists! \alpha \in R : p(\alpha) = 0$ i $\bar{\alpha} = \bar{a}$.

$\diamond$ $K$ cos de fraccions

$\diamond$ $\nu : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ valoració normalitzada, $\nu(t) = 1$.

◇ $R$ anell de valoració discreta estrictament henselià:

- $k = R/\wp$ separablement tancat,

$$\mathrm{car}(k) \neq 2 \text{ i } \wp = (t).$$

- Si $p(x) \in R[x]$, $a \in R$, $\bar{p}(a) \equiv 0$, $\bar{p}'(a) \not\equiv 0$,

  $\exists! \alpha \in R : p(\alpha) = 0 \text{ i } \bar{\alpha} = \bar{a}$.

◇ $K$ cos de fraccions

◇ $\nu : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ valoració normalitzada, $\nu(t) = 1$.

$\diamond$ $C/K$ : $\quad y^2 = a_0x^6 + ... + a_5x + a_6,$

$$a_0 \neq 0 \text{ o } a_1 \neq 0$$

**Teorema.** Existeix $L/K$ extensió *minimal* on $C$ admet reducció estable.

$\diamond$ $\mathfrak{C}$ model estable de $C$ sobre $R_L$, $\quad \mathfrak{C}_\wp/k$ fibra tancada:

$$\text{determinat per } J_{2i} \in \bar{K}.$$

$\diamond$ $J$ varietat Jacobiana de $C$ sobre $K$

$\diamond$ $\mathfrak{N}$ model de Néron de $J$ sobre $R$:

grup algebraic llis, de tipus finit sobre $R$ amb $\mathfrak{N}_\eta = J$ tal que

$$\begin{array}{ccc} X_\eta & \xrightarrow{f_\eta} & J \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \overset{\exists f}{\dashrightarrow} & \mathfrak{N} \end{array}$$

per tot esquema llis $X$ sobre $R$.

$\diamond$ $\mathfrak{N}^0_\wp$ component connexa del $\bar{0} \in \mathfrak{N}_\wp/k$, $\quad \dim(\mathfrak{N}^0_\wp) = a + t + u$

- $\diamond$ $J$ varietat Jacobiana de $C$ sobre $K$

- $\diamond$ $\mathfrak{N}$ model de Néron de $J$ sobre $R$:

grup algebraic llis, de tipus finit sobre $R$ amb $\mathfrak{N}_\eta = J$ tal que

$$\begin{array}{ccc} X_\eta & \xrightarrow{f_\eta} & J \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \overset{\exists f}{\dashrightarrow} & \mathfrak{N} \end{array}$$

per tot esquema llis $X$ sobre $R$.

- $\diamond$ $\mathfrak{N}^0_\wp$ component connexa del $\bar{0} \in \mathfrak{N}_\wp/k$, $\quad \dim(\mathfrak{N}^0_\wp) = a + t + u$

$\diamond$ $J$ varietat Jacobiana de $C$ sobre $K$

$\diamond$ $\mathfrak{N}$ model de Néron de $J$ sobre $R$:

grup algebraic llis, de tipus finit sobre $R$ amb $\mathfrak{N}_\eta = J$ tal que

$$\begin{array}{ccc} X_\eta & \xrightarrow{f_\eta} & J \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \overset{\exists f}{\dashrightarrow} & \mathfrak{N} \end{array}$$

per tot esquema llis $X$ sobre $R$.

$\diamond$ $\mathfrak{N}_\wp^0$ component connexa del $\bar{0} \in \mathfrak{N}_\wp/k$, $\quad \dim(\mathfrak{N}_\wp^0) = a + t + u$

**Objectiu:** Determinar

$\diamond$ El model minimal $\mathfrak{C}_{min}$ de $C$ sobre $R$ i el tipus $t(C)$ de reducció.

$\diamond$ El grup de components connexes $\Phi = \mathfrak{N}_\wp/\mathfrak{N}_\wp^0$ del model de Néron.

Si $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3, 5$, $\quad \mathfrak{C}_{min,\wp}$ i $\Phi$ estan determinats per:

*(i)* $\mathfrak{C}_\wp$.

*(ii)* Les *espessors* dels punts singulars de $\mathfrak{C}$.

*(iii)* L'acció de $\mathrm{Gal}(L/K)$ en $\mathfrak{C}_\wp$.

# El grup d'automorfismes de $\mathfrak{C}_\wp$

Per la unicitat de $\mathfrak{C}$ llevat isomorfisme,

$$\mathrm{Gal}(L/K) \text{ actua en } \mathfrak{C}.$$

Per la minimalitat de $L/K$,

$$\mathrm{Gal}(L/K) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp).$$

Introduïm les corbes excepcionals

$$C_0 : y^2 = x^5 - 1 \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5;$$

$$C_0 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) = 5,$$

amb $J_2 = J_4 = J_6 = 0$, $J_{10} = 1$ i

$$C_1 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5,$$

amb $J_2 = 1$, $J_4 = \frac{3}{40}$, $J_6 = -\frac{1}{400}$, $J_{10} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^5}$.

Introduïm les corbes excepcionals

$$C_0 : y^2 = x^5 - 1 \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5;$$

$$C_0 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) = 5,$$

amb $J_2 = J_4 = J_6 = 0$, $J_{10} = 1$ i

$$C_1 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5,$$

amb $J_2 = 1$, $J_4 = \frac{3}{40}$, $J_6 = -\frac{1}{400}$, $J_{10} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^5}$.

Introduïm les corbes excepcionals

$$C_0 : y^2 = x^5 - 1 \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5;$$

$$C_0 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) = 5,$$

amb $J_2 = J_4 = J_6 = 0$, $J_{10} = 1$ i

$$C_1 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5,$$

amb $J_2 = 1$, $J_4 = \frac{3}{40}$, $J_6 = -\frac{1}{400}$, $J_{10} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^5}$.

Introduïm les corbes excepcionals

$$C_0 : y^2 = x^5 - 1 \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5;$$

$$C_0 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) = 5,$$

amb $J_2 = J_4 = J_6 = 0$, $J_{10} = 1$ i

$$C_1 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5,$$

amb $J_2 = 1$, $J_4 = \frac{3}{40}$, $J_6 = -\frac{1}{400}$, $J_{10} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^5}$.

Introduïm les corbes excepcionals

$$C_0 : y^2 = x^5 - 1 \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5;$$

$$C_0 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) = 5,$$

amb $J_2 = J_4 = J_6 = 0$, $J_{10} = 1$ i

$$C_1 : y^2 = x^5 - x \text{ si } \mathrm{car}(k) \neq 5,$$

amb $J_2 = 1$, $J_4 = \frac{3}{40}$, $J_6 = -\frac{1}{400}$, $J_{10} = \frac{1}{2^4 \cdot 5^5}$.

**Teorema (Liu).** (I) Si $\mathfrak{C}_\wp$ és llisa,

- Si $\mathfrak{C}_\wp \not\simeq C_0, C_1$, l'ordre de tot $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp)$ divideix 4 o 6.
- Si $\mathrm{car}(k) \neq 5$, l'ordre de tot $\tau \in \mathrm{Aut}(C_1)$ divideix 6 o 8.
- Si $\mathrm{car}(k) \neq 5$, $\mathrm{Aut}(C_0) \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
- Si $\mathrm{car}(k) = 5$, $\mathrm{Aut}(C_0) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \ltimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(II) Si la normalització de $\mathfrak{C}_\wp$ és $E/k$, $\quad j = \bar{I}_4^3/\bar{I}_{12}$ i

- Si $j \neq 0, 1728$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_6 = 0. \end{cases}$

- Si $j = 1728$ i $\mathrm{car}(k) \neq 3$,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_2 \neq 0, \bar{J}_6 = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_2 = \bar{J}_6 = 0. \end{cases}$$

- Si $j = 0$ i $\mathrm{car}(k) \neq 3$,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_2 \neq 0, \bar{J}_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_6 = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_2 = 0. \end{cases}$$

- Si $j = 0$ i $\mathrm{car}(k) = 3$,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_6 = 0. \end{cases}$$

(III) Si $\mathfrak{C}_\wp$ és una corba racional amb dos nodes $q_1, q_2$,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } \bar{J}_6 \neq 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{si } \bar{J}_6 = 0, \end{cases}$$

on la primera involució permuta $q_1$ i $q_2$.

(IV) Si $\mathfrak{C}_\wp$ són dues rectes $L_1$, $L_2$ que es tallen en $q_1, q_2, q_3$,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) \simeq S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

- $S_3$ permuta $q_1, q_2, q_3$
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ permuta $L_1, L_2$

(V-VI-VII) Si $\mathfrak{C}_\wp$ són dues corbes $E_1, E_2$ amb $p_a = 1$

que es tallen en un punt $p$,

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) \simeq \begin{cases} \mathrm{Aut}(E_1, p) \times \mathrm{Aut}(E_2, p) & \text{si } E_1 \not\simeq E_2 \\ \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\, \mathrm{Aut}(E_1, p) \times \mathrm{Aut}(E_2, p)\,) & \text{si } E_1 \simeq E_2. \end{cases}$$

**Demostració (II),** $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$, $j \neq 0, 1728$.

$\diamond$ $\pi : E \longrightarrow \mathfrak{C}_\wp$ normalització, $\pi^{-1}(q) = \{q_1, q_2\}$

$\diamond$ $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) = \{\tau \in \mathrm{Aut}(E) \,:\, \tau(\{q_1, q_2\}) = \{q_1, q_2\}\}$

$\diamond$ $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$ on

- $G = \{\tau \in \mathrm{Aut}(E) \,:\, \tau(q_i) = q_i\}$
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$, $\sigma(q_1) = q_2$.

**Demostració (II),** $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$**,** $j \neq 0, 1728$**.**

$\diamond$ $\pi : E \longrightarrow \mathfrak{C}_\wp$ normalització, $\pi^{-1}(q) = \{q_1, q_2\}$

$\diamond$ $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) = \{\tau \in \mathrm{Aut}(E) \,:\, \tau(\{q_1, q_2\}) = \{q_1, q_2\}\}$

$\diamond$ $\mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G$ on

- $G = \{\tau \in \mathrm{Aut}(E) \,:\, \tau(q_i) = q_i\}$
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$, $\sigma(q_1) = q_2$.

◇ $0 \in E$ punt fix de $\sigma \Rightarrow \sigma \in \mathrm{Aut}(E,+) \Rightarrow \sigma = -Id$

◇ $G \simeq G' = \{\tau(2q_1) = 2q_1\} \subseteq \mathrm{Aut}(E,+) = \{\pm Id\}$

◇ $-Id \in G' \quad \Leftrightarrow \quad 4q_1 = 0$

$\diamond$ $0 \in E$ punt fix de $\sigma \Rightarrow \sigma \in \mathrm{Aut}(E,+) \Rightarrow \sigma = -Id$

$\diamond$ $G \simeq G' = \{\tau(2q_1) = 2q_1\} \subseteq \mathrm{Aut}(E,+) = \{\pm Id\}$

$\diamond$ $-Id \in G' \quad \Leftrightarrow \quad 4q_1 = 0$

◇ $0 \in E$ punt fix de $\sigma \Rightarrow \sigma \in \mathrm{Aut}(E,+) \Rightarrow \sigma = -Id$

◇ $G \simeq G' = \{\tau(2q_1) = 2q_1\} \subseteq \mathrm{Aut}(E,+) = \{\pm Id\}$

◇ $-Id \in G' \quad \Leftrightarrow \quad 4q_1 = 0$

- $E : z^2 = x^3 + ax + b \quad \xrightarrow{(x,z)\mapsto(x,xz)} \quad \mathfrak{C}_{\wp} : y^2 = x^5 + ax^3 + bx^2$

- $q = (0,0) \in \mathfrak{C}_{\wp}, \quad q_1, q_2 = (0, \pm\sqrt{b}) \in E$, $2q_1 = (a^2/4b, *)$.

- $4q_1 = 0 \;\Leftrightarrow$

$$0 = f(a^2/4b) = \frac{a^6 + 2^4 b^2 a^3 + 2^6 b^4}{2^6 b^3} = \frac{\bar{J}_6}{2^6 b^3}.$$

**Corol·lari.** Si $p = \mathrm{car}(k) \neq 2, 3$ i $\mathfrak{C}_\wp \not\simeq C_0$ si $p = 5$,

$$L = K(\sqrt[n]{t}),\ p \nmid n.$$

**Demostració.**

- Si $p \mid [L : K] \Rightarrow p \mid \mathrm{Aut}(\mathfrak{C}_\wp) \Rightarrow p = 2, 3$ ó $p = 5$, $\mathfrak{C}_\wp \simeq C_0$
- Per tant, $p \nmid [L : K]$.
- Com $k = k^s$, $L/K$ totalment (i moderadament) ramificada: cíclica.

# Espessors dels punts singulars de $\mathfrak{C}_\wp$

Sigui $q \in \mathfrak{C}_\wp(k)$ un punt singular, ordinari doble.

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{C},q} \simeq \hat{R}[[u,v]]/(uv-\pi)$$

on $\pi \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$.

**Definició.** L'espessor de $q$ és $e(q) := \nu(\pi) \geq 1$.

**Lema.** L'esquema $\mathfrak{C}$ és regular en $q \quad \Leftrightarrow \quad e(q) = 1$

**Teorema.** Suposem $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$ i que $L = K$.

(I) Si $\mathfrak{C}_\wp$ és llisa, $\mathfrak{C}_{min} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{N}_\wp = J_\wp$, $\Phi = \{0\}$.

(II) Si $\mathfrak{C}_\wp$ té un sol punt doble $q$,

$$e = e(q) = \frac{1}{6}\nu(J_{10}^6 \cdot I_{12}^{-5}), \quad t(C) = I_{e-0-0}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}.$$

**Observació:** Si $[L:K] > 1$, $e = [L:K] \cdot \frac{1}{6}\nu(J_{10}^6 \cdot I_{12}^{-5})$

**Teorema.** Suposem $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$ i que $L = K$.

(I) Si $\mathfrak{C}_\wp$ és llisa, $\mathfrak{C}_{min} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{N}_\wp = J_\wp$, $\Phi = \{0\}$.

(II) Si $\mathfrak{C}_\wp$ té un sol punt doble $q$,

$$e = e(q) = \frac{1}{6}\nu(J_{10}^6 \cdot I_{12}^{-5}), \quad t(C) = I_{e-0-0}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}.$$

**Observació:** Si $[L : K] > 1$, $e = [L : K] \cdot \frac{1}{6}\nu(J_{10}^6 \cdot I_{12}^{-5})$

(III) Si $\mathfrak{C}_{\wp}$ és irreductible amb punts dobles $q_1, q_2$,

$$e_1 = \min\{\,\nu(I_{12}\cdot I_4^{-3}),\ \frac{1}{4}\nu(J_{10}^2\cdot I_4^{-5})\,\}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\nu(J_{10}^2\cdot I_4^{-5}) - e_1,$$

$$t(C) = I_{e_1-e_2-0}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/e_2\mathbb{Z}.$$

(III) Si $\mathfrak{C}_\wp$ és irreductible amb punts dobles $q_1, q_2$,

$$e_1 = \min\{\, \nu(I_{12} \cdot I_4^{-3}),\ \frac{1}{4}\nu(J_{10}^2 \cdot I_4^{-5})\,\}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\nu(J_{10}^2 \cdot I_4^{-5}) - e_1,$$

$$t(C) = I_{e_1 - e_2 - 0}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e_2\mathbb{Z}.$$

(III) Si $\mathfrak{C}_\wp$ és irreductible amb punts dobles $q_1, q_2$,

$$e_1 = \min\left\{ \nu(I_{12} \cdot I_4^{-3}),\ \frac{1}{4}\nu(J_{10}^2 \cdot I_4^{-5}) \right\}, \quad e_2 = \frac{1}{2}\nu(J_{10}^2 \cdot I_4^{-5}) - e_1,$$

$$t(C) = I_{e_1 - e_2 - 0}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e_2\mathbb{Z}.$$

(IV) Si $\mathfrak{C}_\wp = L_1 \cup L_2$ que es tallen en $q_1, q_2, q_3$,

$$\ell = \nu(J_{10} \cdot J_2^{-5}), \quad n = \nu(I_{12} \cdot J_2^{-6}), \quad m = \nu(J_4 \cdot J_2^{-2}).$$

$$e_1 = \min\{\ell/3, n/2, m\}, \; e_2 = \min\{\frac{\ell - e_1}{2}, n - e_1\}, \; e_3 = \ell - e_1 - e_2$$

$$t(C) = I_{e_1 - e_2 - e_3}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z},$$

$$d_1 = gcd(e_1, e_2, e_3) \text{ i } d_1 d_2 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3.$$

(IV) Si $\mathfrak{C}_\wp = L_1 \cup L_2$ que es tallen en $q_1, q_2, q_3$,

$$\ell = \nu(J_{10} \cdot J_2^{-5}), \quad n = \nu(I_{12} \cdot J_2^{-6}), \quad m = \nu(J_4 \cdot J_2^{-2}).$$

$$e_1 = \min\{\ell/3, n/2, m\},\ e_2 = \min\{\frac{\ell - e_1}{2}, n - e_1\},\ e_3 = \ell - e_1 - e_2$$

$$t(C) = I_{e_1 - e_2 - e_3}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z},$$

$$d_1 = gcd(e_1, e_2, e_3) \text{ i } d_1 d_2 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3.$$

(IV) Si $\mathfrak{C}_\wp = L_1 \cup L_2$ que es tallen en $q_1, q_2, q_3$,

$$\ell = \nu(J_{10} \cdot J_2^{-5}), \quad n = \nu(I_{12} \cdot J_2^{-6}), \quad m = \nu(J_4 \cdot J_2^{-2}).$$

$$e_1 = \min\{\ell/3, n/2, m\},\ e_2 = \min\{\frac{\ell - e_1}{2}, n - e_1\},\ e_3 = \ell - e_1 - e_2$$

$$t(C) = I_{e_1 - e_2 - e_3}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z},$$

$d_1 = gcd(e_1, e_2, e_3)$ i $d_1 d_2 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3$.

(IV) Si $\mathfrak{C}_\wp = L_1 \cup L_2$ que es tallen en $q_1, q_2, q_3$,

$$\ell = \nu(J_{10} \cdot J_2^{-5}), \quad n = \nu(I_{12} \cdot J_2^{-6}), \quad m = \nu(J_4 \cdot J_2^{-2}).$$

$$e_1 = \min\{\ell/3, n/2, m\},\ e_2 = \min\{\frac{\ell - e_1}{2}, n - e_1\},\ e_3 = \ell - e_1 - e_2$$

$$t(C) = I_{e_1 - e_2 - e_3}, \quad \Phi = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z},$$

$$d_1 = gcd(e_1, e_2, e_3) \text{ i } d_1 d_2 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3.$$

(V) Si $\mathfrak{C}_\wp = E_1 \cup E_2$ que es tallen en $q_0$,

$$e_0 = \frac{1}{12}\nu(J_{10} \cdot I_2^{-5}), \quad t(C) = l_0 - l_0 - e_0, \quad \Phi = \{0\}.$$

(VI) Si $\mathfrak{C}_\wp = E \cup L$ que es tallen en $q_0$ i $L$ té un node en $q_1$,

$$e_0 = \frac{1}{12}\nu(I_{12} \cdot I_2^{-6}), \quad e_1 = \nu(J_{10} \cdot I_2 \cdot I_{12}^{-1}),$$

$$t(C) = I_{e_1} - I_0 - e_0, \quad \Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z}.$$

(VII) Si $\mathfrak{C}_\wp = L_1 \cup L_2$ amb singularitats en $q_0, q_1, q_2$,

$$e_0 = \frac{1}{4}\nu(I_4 \cdot I_2^{-2}),$$

$$e_1 = \min\{\nu(I_{12} \cdot I_4^{-3}), \frac{1}{2}\nu(J_{10} \cdot I_2 I_4^{-3})\},\ e_2 = \nu(J_{10} \cdot I_2 \cdot I_4^{-3}) - e_1,$$

$$t(C) = I_{e_1} - I_{e_2} - e_0, \quad \Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e_2\mathbb{Z}.$$

(VII) Si $\mathfrak{C}_\wp = L_1 \cup L_2$ amb singularitats en $q_0, q_1, q_2$,

$$e_0 = \frac{1}{4}\nu(I_4 \cdot I_2^{-2}),$$

$$e_1 = \min\{\nu(I_{12} \cdot I_4^{-3}), \frac{1}{2}\nu(J_{10} \cdot I_2 I_4^{-3})\},\ e_2 = \nu(J_{10} \cdot I_2 \cdot I_4^{-3}) - e_1,$$

$$t(C) = I_{e_1} - I_{e_2} - e_0, \quad \Phi = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e_2\mathbb{Z}.$$

**Demostració (IV).**

$$\mathfrak{C}: \; y^2 = x(x-2a)(x-1)(x-1-2b)(2cx-1),$$

$$0 < \nu(a) \leq \nu(b) \leq \nu(c).$$

*Les espessors:*

$$q_1 = (0,0) \in \mathfrak{C}_\wp, \quad \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{C},q_1} \simeq \hat{R}[[u,v]]/(u \cdot v - a^2)$$

$$e_1 = \nu(a^2), \quad e_2 = \nu(b^2) \text{ i } \quad e_3 = \nu(c^2).$$

$$\bar{J}_2 = 1, \quad \bar{J}_4 = \tfrac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\bar{J}_{10} = 2^{-6} \cdot (abc)^2, \quad \bar{I}_{12} = 2^{-4} \cdot (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$$

*Les espessors:*

$$q_1 = (0,0) \in \mathfrak{C}_{\wp}, \quad \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{C},q_1} \simeq \hat{R}[[u,v]]/(u \cdot v - a^2)$$

$$e_1 = \nu(a^2), \quad e_2 = \nu(b^2) \text{ i } \quad e_3 = \nu(c^2).$$

$$\bar{J}_2 = 1, \quad \bar{J}_4 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\bar{J}_{10} = 2^{-6} \cdot (abc)^2, \quad \bar{I}_{12} = 2^{-4} \cdot (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

*Les espessors:*

$$q_1 = (0,0) \in \mathfrak{C}_\wp, \quad \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{C},q_1} \simeq \hat{R}[[u,v]]/(u \cdot v - a^2)$$

$$e_1 = \nu(a^2), \quad e_2 = \nu(b^2) \text{ i } \quad e_3 = \nu(c^2).$$

$$\bar{J}_2 = 1, \quad \bar{J}_4 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\bar{J}_{10} = 2^{-6} \cdot (abc)^2, \quad \bar{I}_{12} = 2^{-4} \cdot (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

*Les espessors:*

$$q_1 = (0,0) \in \mathfrak{C}_\wp, \quad \hat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{C},q_1} \simeq \hat{R}[[u,v]]/(u \cdot v - a^2)$$

$$e_1 = \nu(a^2), \quad e_2 = \nu(b^2) \text{ i } \quad e_3 = \nu(c^2).$$

$$\bar{J}_2 = 1, \quad \bar{J}_4 = \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\bar{J}_{10} = 2^{-6} \cdot (abc)^2, \quad \bar{I}_{12} = 2^{-4} \cdot (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

*El model minimal:*

- Com $L = K$, $\mathfrak{C}_{can} = \mathfrak{C}$
- Explotant $e_i - 1$ vegades cada punt $q_i$,

$\mathfrak{C}_{min,\wp}$ s'obté substituint $q_i$ per $e_i - 1$ rectes projectives:

$$I_{e_1 - e_2 - e_3}.$$

*El grup $\Phi$ de components connexes:*

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{min} = r_1 C_1 + \dots + r_n C_n, \quad C_i \text{ irreductibles}, \quad r_i \geq 1$$

$$R = (r_1, \dots, r_n), \quad M = (C_i \cdot C_j) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$$

**Teorema (Lorenzini).** $\Phi \simeq \mathrm{Ker}(R)/\mathrm{Im}(M)$.

$$n = e_1 + e_2 + e_3 - 1, \qquad R = (1, ..., 1)$$

- $A, B$ components centrals
- $C_1^{(i)}, ..., C_{e_i-1}^{(i)}$ les explosions de $q_i$,

$$A \cdot C_1^{(i)} = 1, \quad B \cdot C_{e_i-1}^{(i)} = 1, \quad C_j^{(i)} \cdot C_{j+1}^{(i)} = 1,$$

$$A \cdot A = B \cdot B = -3, \quad C_j^{(i)} \cdot C_j^{(i)} = -2. \quad \square$$

$$n = e_1 + e_2 + e_3 - 1, \qquad R = (1, ..., 1)$$

- $A, B$ components centrals
- $C_1^{(i)}, ..., C_{e_i-1}^{(i)}$ les explosions de $q_i$,

$$A \cdot C_1^{(i)} = 1, \quad B \cdot C_{e_i-1}^{(i)} = 1, \quad C_j^{(i)} \cdot C_{j+1}^{(i)} = 1,$$

$$A \cdot A = B \cdot B = -3, \quad C_j^{(i)} \cdot C_j^{(i)} = -2. \quad \square$$

$$n = e_1 + e_2 + e_3 - 1, \qquad R = (1, ..., 1)$$

- ◇ $A, B$ components centrals
- ◇ $C_1^{(i)}, ..., C_{e_i-1}^{(i)}$ les explosions de $q_i$,

$$A \cdot C_1^{(i)} = 1, \quad B \cdot C_{e_i-1}^{(i)} = 1, \quad C_j^{(i)} \cdot C_{j+1}^{(i)} = 1,$$

$$A \cdot A = B \cdot B = -3, \quad C_j^{(i)} \cdot C_j^{(i)} = -2. \quad \square$$

◇ $\mathfrak{Z} = \mathfrak{C}/\langle\sigma\rangle, \quad \mathcal{Z}_\eta = \mathbb{P}^1_L, \quad f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{Z}.$

◇ En $(I) - (IV)$,

$$\mathfrak{Z} \simeq \mathbb{P}^1_{R_L}.$$

◇ En $(V) - (VII)$,

$$\mathfrak{Z}_\wp = L_1 \cup L_2$$

que es tallen en $f(q_0)$ d'espessor $2e_0$.

# Criteris de bona reducció

$\diamond$ $R$ anell valoració discreta, no necessàriament henselià

$\diamond$ Una *equació entera* de $C$ és

$$(\mathcal{E}) \quad y^2 + Q(x)y = P(x),$$

- $Q(x), P(x) \in R[x]$, $\deg(Q) \leq 3$, $\deg(P) = 5$ o 6

- $\{1, y\}$ base de la clausura entera de $R[x]$ en $K(C)$.

◇ El *discriminant* de $\mathcal{E}$ és

$$\Delta(\mathcal{E}) = \begin{cases} 2^{-12} \cdot \mathrm{disc}(4P(x) + Q(x)^2) & \text{si } \deg P = 6 \\ \\ 2^{-12}c^2 \cdot \mathrm{disc}(4P(x) + Q(x)^2) & \text{si } \deg P = 5. \end{cases}$$

◇ $\mathcal{E}_0$ és minimal si $\nu(\Delta(\mathcal{E}_0))$ és minimal entre les equacions enteres.

◇ $\Delta_0(C)$ el discriminant minimal de $C$.

$\diamond$ Existeix $x \mapsto aX + b$, $y \mapsto cY$, $\quad a, c \in t^{\mathbb{Z}}$, $b \in R[1/t]$:

$$Y^2 = P(X) \in R[X] \text{ és minimal.}$$

$\diamond$ $C$ té bona reducció sobre $K \Leftrightarrow \Delta_0(C) \in R^*$.

$\diamond$ $C$ té bona reducció potencial si i només si (I): $\mathfrak{C}_\wp$ és llisa.

$\diamond$ $C$ té bona reducció sobre $K$ si i només si (I) i $L = K$.

**Teorema (Liu).** Suposem $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3, 5$.

◇ Si $a_0 = 0$, $C$ té bona reducció sobre $K$ $\Leftrightarrow$ $40 \mid \nu(a_1^{30} J_{10}^{-1})$.

◇ Si $a_0 \neq 0$, $C$ té bona reducció sobre $K$ $\Leftrightarrow$

- $\nu(A_2^{15} a_0^{-20} J_{10}^{-1}) \geq 0$, $2 \mid \nu(a_0)$, $30 \mid \nu(a_0^{10} J_{10}^{-1})$ o bé
- $\nu(A_2^{15} a_0^{-20} J_{10}^{-1}) < 0$, $2 \mid \nu(A_2)$, $40 \mid \nu(A_2^{15} J_{10}^{-1})$.

**Teorema (Liu).** Suposem $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3, 5$.

◇ Si $a_0 = 0$, $C$ té bona reducció sobre $K$ $\Leftrightarrow$ $40 \mid \nu(a_1^{30} J_{10}^{-1})$.

◇ Si $a_0 \neq 0$, $C$ té bona reducció sobre $K$ $\Leftrightarrow$

- $\nu(A_2^{15} a_0^{-20} J_{10}^{-1}) \geq 0$, $2 \mid \nu(a_0)$, $30 \mid \nu(a_0^{10} J_{10}^{-1})$ o bé
- $\nu(A_2^{15} a_0^{-20} J_{10}^{-1}) < 0$, $2 \mid \nu(A_2)$, $40 \mid \nu(A_2^{15} J_{10}^{-1})$.

**Demostració $a_0 = 0$.**

◇ La propietat $40 \mid \nu$ és invariant per canvis de variable afins

$\Rightarrow$) Posem $Y^2 = P(X) \in R[X]$ minimal $\Rightarrow a_1, \mathrm{Disc}(P) \in R^*$

$$\Rightarrow J_{10} = 2^{-12} a_1^2 \mathrm{Disc}(P) \in R^*,$$

$$\Rightarrow \nu(a_1^{30} J_{10}^{-1}) = 0.$$

**Demostració $a_0 = 0$.**

$\diamond$ La propietat $40 \mid \nu$ és invariant per canvis de variable afins

$\Rightarrow$) Posem $Y^2 = P(X) \in R[X]$ minimal $\Rightarrow a_1, \mathrm{Disc}(P) \in R^*$

$$\Rightarrow J_{10} = 2^{-12} a_1^2 \mathrm{Disc}(P) \in R^*,$$

$$\Rightarrow \nu(a_1^{30} J_{10}^{-1}) = 0.$$

**Demostració $a_0 = 0$.**

$\diamond$ La propietat $40 \mid \nu$ és invariant per canvis de variable afins

$\Rightarrow$) Posem $Y^2 = P(X) \in R[X]$ minimal $\Rightarrow a_1, \operatorname{Disc}(P) \in R^*$

$$\Rightarrow J_{10} = 2^{-12} a_1^2 \operatorname{Disc}(P) \in R^*,$$

$$\Rightarrow \nu(a_1^{30} J_{10}^{-1}) = 0.$$

**Demostració $a_0 = 0$.**

$\diamond$ La propietat $40 \mid \nu$ és invariant per canvis de variable afins

$\Rightarrow$) Posem $Y^2 = P(X) \in R[X]$ minimal $\Rightarrow a_1, \mathrm{Disc}(P) \in R^*$

$$\Rightarrow J_{10} = 2^{-12} a_1^2 \mathrm{Disc}(P) \in R^*,$$

$$\Rightarrow \nu(a_1^{30} J_{10}^{-1}) = 0.$$

$\Leftarrow$)

◇ Posem $\nu(a_1^{30} J_{10}^{-1}) = 40r, \quad a = a_1 t^{-2r}, \quad b = a_1^3 t^{-5r}.$

◇ Fem el canvi $x = aX - a_2/5a_1, \; y = bY$:

$$Y^2 = P(X) = X^5 + b_3X^3 + b_4X^2 + b_5X + b_6 \in R[X],\, J_{10} \in R^*.$$

◇ Com $J_{10} = 2^{-12}\mathrm{Disc}(P) \in R^*, \quad C$ té bona reducció sobre $K$.

$\Leftarrow$)

◇ Posem $\nu(a_1^{30}J_{10}^{-1}) = 40r, \quad a = a_1 t^{-2r}, \quad b = a_1^3 t^{-5r}$.

◇ Fem el canvi $x = aX - a_2/5a_1,\ y = bY$:

$$Y^2 = P(X) = X^5 + b_3X^3 + b_4X^2 + b_5X + b_6 \in R[X],\ J_{10} \in R^*.$$

◇ Com $J_{10} = 2^{-12}\mathrm{Disc}(P) \in R^*, \quad C$ té bona reducció sobre $K$.

$\Leftarrow$)

◇ Posem $\nu(a_1^{30}J_{10}^{-1}) = 40r, \quad a = a_1 t^{-2r}, \quad b = a_1^3 t^{-5r}$.

◇ Fem el canvi $x = aX - a_2/5a_1,\ y = bY$:

$$Y^2 = P(X) = X^5 + b_3X^3 + b_4X^2 + b_5X + b_6 \in R[X],\ J_{10} \in R^*.$$

◇ Com $J_{10} = 2^{-12}\mathrm{Disc}(P) \in R^*, \quad C$ té bona reducció sobre $K$.

$\Leftarrow$)

$\diamond$ Posem $\nu(a_1^{30} J_{10}^{-1}) = 40r, \quad a = a_1 t^{-2r}, \quad b = a_1^3 t^{-5r}$.

$\diamond$ Fem el canvi $x = aX - a_2/5a_1,\ y = bY$:

$$Y^2 = P(X) = X^5 + b_3 X^3 + b_4 X^2 + b_5 X + b_6 \in R[X],\ J_{10} \in R^*.$$

$\diamond$ Com $J_{10} = 2^{-12}\mathrm{Disc}(P) \in R^*, \quad C$ té bona reducció sobre $K$.

# *Model estable versus model minimal d'una corba de gènere 2*

Victor Rotger

21è SEMINARI DE TEORIA DE NOMBRES UB - UAB - UPC

30 de gener de 2007