El Árbol de Bruhat-Tits asociado a un grupo de Schottky

Sara Arias de Reyna

Mathematics Research Unit
University of Luxembourg

28 de Enero de 2013

Uniformización p-ádica de curvas de género $g \geq 2$
Seminari de Teoria de Nombres de Barcelona 2013

Contents

Contents

Árboles

Grafo X

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V},$

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V},$

- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$

- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, un conjunto de aristas $E(V_1, V_2)$.

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ no orientado

- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, un conjunto de aristas $E(V_1, V_2)$.

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ no orientado

- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, un conjunto de aristas $E(V_1, V_2)$.
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, $E(V_1, V_2) = E(V_2, V_1)$.

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ no orientado

- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, un conjunto de aristas $E(V_1, V_2)$.
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, $E(V_1, V_2) = E(V_2, V_1)$.

Ejemplo 1:

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ no orientado

- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, un conjunto de aristas $E(V_1, V_2)$.
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, $E(V_1, V_2) = E(V_2, V_1)$.

Ejemplo 1: $n \in \mathbb{N}$.

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ no orientado

- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, un conjunto de aristas $E(V_1, V_2)$.
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, $E(V_1, V_2) = E(V_2, V_1)$.

Ejemplo 1: $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{V} = \{0, \ldots, n\}$

Árboles

Grafo $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ no orientado

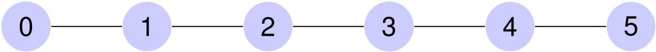
- $\mathcal{V}$ conjunto de vértices
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, un conjunto de aristas $E(V_1, V_2)$.
- Para cada pareja $(V_1, V_2) \in \mathcal{V}$, $E(V_1, V_2) = E(V_2, V_1)$.

Ejemplo 1: $n \in \mathbb{N}$.

$$\bullet\, \mathcal{V} = \{0, \dots, n\}$$

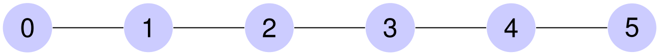
$$\bullet\, E(i,j) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } j = i+1 \text{ o } i = j+1 \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Árboles



- $\mathcal{V} = \{0, \ldots, n\}$
- $E(i,j) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } j = i+1 \text{ o } i = j+1 \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

Árboles



- $\mathcal{V} = \{0, \ldots, n\}$
- $E(i,j) = \begin{cases} \{1\} \text{ si } j = i+1 \text{ o } i = j+1 \\ \emptyset \quad \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

$X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ es un *camino*.

Árboles

Ejemplo 2:

Árboles

Ejemplo 2: $n \in \mathbb{N}$

Árboles

Ejemplo 2: $n \in \mathbb{N}$

- $\mathcal{V} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Árboles

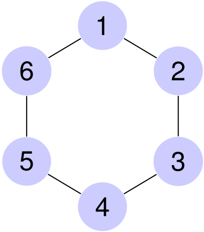
Ejemplo 2: $n \in \mathbb{N}$

- $\mathcal{V} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $E(V_1, V_2) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } a+1-b \in (n) \text{ o } b+1-a \in (n) \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$

Árboles

Ejemplo 2: $n \in \mathbb{N}$

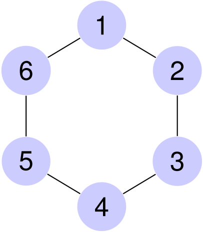
- $\mathcal{V} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $E(V_1, V_2) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } a+1-b \in (n) \text{ o } b+1-a \in (n) \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$



Árboles

Ejemplo 2: $n \in \mathbb{N}$

- $\mathcal{V} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- $E(V_1, V_2) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } a+1-b \in (n) \text{ o } b+1-a \in (n) \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$



$X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ es un *ciclo*.

Árboles

Sea $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo no orientado.

Árboles

Sea $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo no orientado.

Un *subgrafo* de X es un grafo $X' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ tal que

Árboles

Sea $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo no orientado.

Un *subgrafo* de X es un grafo $X' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ tal que

- $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$

Árboles

Sea $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo no orientado.

Un *subgrafo* de X es un grafo $X' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ tal que

- $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$
- Para todo $V_1, V_2 \in \mathcal{V}'$, $E'(V_1, V_2) \subset E(V_1, V_2)$.

Árboles

Sea $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo no orientado.

Un *subgrafo* de X es un grafo $X' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ tal que

- $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$
- Para todo $V_1, V_2 \in \mathcal{V}'$, $E'(V_1, V_2) \subset E(V_1, V_2)$.

Definición:
X se dice *conexo* si, para cada par de vértices V_1, V_2 existe un subgrafo de V que es un camino con extremos en V_1 y V_2.

Árboles

Sea $X = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un grafo no orientado.

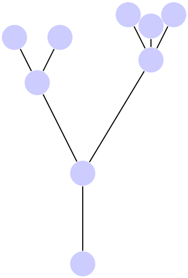
Un *subgrafo* de X es un grafo $X' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ tal que

- $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$
- Para todo $V_1, V_2 \in \mathcal{V}'$, $E'(V_1, V_2) \subset E(V_1, V_2)$.

Definición:
X se dice *conexo* si, para cada par de vértices V_1, V_2 existe un subgrafo de V que es un camino con extremos en V_1 y V_2.

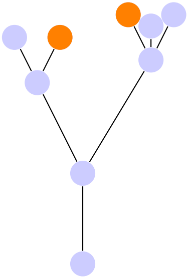
Definición:
Un *árbol* es un grafo no orientado conexo que no contiene ciclos.

Árboles



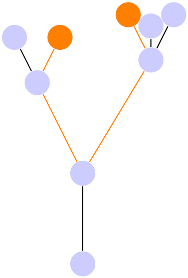
Definición:
Un *árbol* es un grafo no orientado conexo que no contiene ciclos.

Árboles



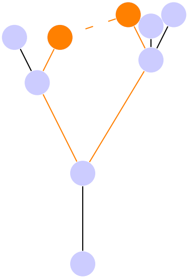
Definición:
Un *árbol* es un grafo no orientado conexo que no contiene ciclos.

Árboles



Definición:
Un *árbol* es un grafo no orientado conexo que no contiene ciclos.

Árboles



Definición:
Un *árbol* es un grafo no orientado conexo que no contiene ciclos.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo
  $\mathfrak{m}_A$ ideal maximal, K_A cuerpo de fracciones.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo
  $\mathfrak{m}_A$ ideal maximal, K_A cuerpo de fracciones.
- Caso particular: $\mathcal{O}$ anillo de valoración de un cuerpo local K

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo
  $\mathfrak{m}_A$ ideal maximal, K_A cuerpo de fracciones.
- Caso particular: $\mathcal{O}$ anillo de valoración de un cuerpo local K
  p

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo
  $\mathfrak{m}_A$ ideal maximal, K_A cuerpo de fracciones.
- Caso particular: $\mathcal{O}$ anillo de valoración de un cuerpo local K
  p, $\mathfrak{m}$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo
  $\mathfrak{m}_A$ ideal maximal, K_A cuerpo de fracciones.
- Caso particular: $\mathcal{O}$ anillo de valoración de un cuerpo local K
  p, $\mathfrak{m} = (\pi)$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo
  $\mathfrak{m}_A$ ideal maximal, K_A cuerpo de fracciones.
- Caso particular: $\mathcal{O}$ anillo de valoración de un cuerpo local K
  p, $\mathfrak{m} = (\pi)$

$\Leftrightarrow$ $\dim A = 1$ y característica residual positiva

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo
  $\mathfrak{m}_A$ ideal maximal, K_A cuerpo de fracciones.
- Caso particular: $\mathcal{O}$ anillo de valoración de un cuerpo local K
  p, $\mathfrak{m} = (\pi)$

$\Leftrightarrow$ dim $A = 1$ y característica residual positiva

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$

- A anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo
  $\mathfrak{m}_A$ ideal maximal, K_A cuerpo de fracciones.
- Caso particular: $\mathcal{O}$ anillo de valoración de un cuerpo local K
  p, $\mathfrak{m} = (\pi)$

$\Leftrightarrow$ $\dim A = 1$ y característica residual positiva

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$$

Objetivo: Definir un árbol T y una acción de $\Gamma \circlearrowright T$

Contents

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

Definición: Un *retículo* es un sub-A-módulo $M \subset K_A \times K_A$ libre de rango 2.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

Definición: Un *retículo* es un sub-A-módulo $M \subset K_A \times K_A$ libre de rango 2.

$$\Delta := \text{Conjunto de todos los retículos}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

Definición: Un *retículo* es un sub-A-módulo $M \subset K_A \times K_A$ libre de rango 2.

$$\Delta := \text{Conjunto de todos los retículos}$$

$\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ base canónica de $K_A \times K_A$.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

Definición: Un *retículo* es un sub-A-módulo $M \subset K_A \times K_A$ libre de rango 2.

$$\Delta := \text{Conjunto de todos los retículos}$$

$\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ base canónica de $K_A \times K_A$.

Para cada $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K_A)$, para cada $\mathbf{u} = u^{(1)}\mathbf{e_1} + u^{(2)}\mathbf{e_2}$,

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

Definición: Un *retículo* es un sub-A-módulo $M \subset K_A \times K_A$ libre de rango 2.

$$\Delta := \text{Conjunto de todos los retículos}$$

$\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ base canónica de $K_A \times K_A$.

Para cada $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K_A)$, para cada $\mathbf{u} = u^{(1)}\mathbf{e_1} + u^{(2)}\mathbf{e_2}$,

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \mathbf{u} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} au^{(1)} + bu^{(2)} \\ cu^{(1)} + du^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= (au^{(1)} + bu^{(2)})\mathbf{e_1} + (cu^{(1)} + du^{(2)})\mathbf{e_2} \end{aligned}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

Definición: Un *retículo* es un sub-A-módulo $M \subset K_A \times K_A$ libre de rango 2.

$$\Delta := \text{Conjunto de todos los retículos}$$

$\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ base canónica de $K_A \times K_A$.

Para cada $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K_A)$, para cada $\mathbf{u} = u^{(1)}\mathbf{e_1} + u^{(2)}\mathbf{e_2}$,

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \mathbf{u} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} au^{(1)} + bu^{(2)} \\ cu^{(1)} + du^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= (au^{(1)} + bu^{(2)})\mathbf{e_1} + (cu^{(1)} + du^{(2)})\mathbf{e_2} \end{aligned}$$

$$\gamma \cdot M := \{\gamma \cdot \mathbf{u} : \mathbf{u} \in M\}.$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \circlearrowright \Delta$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \circlearrowright \Delta$$

$$\mathrm{PGL}_2(K_A) = \mathrm{GL}_2(K_A) / \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K_A^\times \right\}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \circlearrowright \Delta$$

$$\mathrm{PGL}_2(K_A) = \mathrm{GL}_2(K_A) / \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K_A^\times \right\}$$

$$M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in K_A^\times : M_1 = \lambda M_2$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \circlearrowright \Delta$$

$$\mathrm{PGL}_2(K_A) = \mathrm{GL}_2(K_A) / \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K_A^\times \right\}$$

$$M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in K_A^\times : M_1 = \lambda M_2$$

$$\Delta^{(0)} := \Delta / \sim$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Vértices

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \circlearrowright \Delta$$

$$\mathrm{PGL}_2(K_A) = \mathrm{GL}_2(K_A) / \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K_A^\times \right\}$$

$$M_1 \sim M_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in K_A^\times : M_1 = \lambda M_2$$

$$\Delta^{(0)} := \Delta / \sim$$

$$\mathrm{PGL}_2(K_A) \circlearrowright \Delta^{(0)}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.
- Aristas $\rightsquigarrow$ *distancia* entre dos retículos.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.
- Aristas $\rightsquigarrow$ *distancia* entre dos retículos.

$M, N \subset K \times K$ retículos. Cómo comparamos M y N?

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.
- Aristas $\rightsquigarrow$ *distancia* entre dos retículos.

$M, N \subset K \times K$ retículos. Cómo comparamos M y N?

Inclusión: $M \subset N$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.
- Aristas $\rightsquigarrow$ *distancia* entre dos retículos.

$M, N \subset K \times K$ retículos. Cómo comparamos M y N?

Inclusión: $M \subset N$, $N \subset M$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.
- Aristas $\rightsquigarrow$ *distancia* entre dos retículos.

$M, N \subset K \times K$ retículos. Cómo comparamos M y N?

Inclusión: $M \subset N$, $N \subset M$, o ninguna de las dos

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.
- Aristas $\rightsquigarrow$ *distancia* entre dos retículos.

$M, N \subset K \times K$ retículos. Cómo comparamos M y N?

Inclusión: $M \subset N$, $N \subset M$, o ninguna de las dos

Proposición: Existe una base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ de M y enteros a, b tales que

$$N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.
- Aristas $\rightsquigarrow$ *distancia* entre dos retículos.

$M, N \subset K \times K$ retículos. Cómo comparamos M y N?

Inclusión: $M \subset N$, $N \subset M$, o ninguna de las dos

Proposición: Existe una base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ de M y enteros a, b tales que

$$N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

(a, b) independientes de la base

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

- Vértices $= \Delta^{(0)} := \{\text{Retículos}\}/\sim$.
- Aristas $\rightsquigarrow$ *distancia* entre dos retículos.

$M, N \subset K \times K$ retículos. Cómo comparamos M y N?

Inclusión: $M \subset N$, $N \subset M$, o ninguna de las dos

Proposición: Existe una base $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ de M y enteros a, b tales que

$$N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

(a, b) independientes de la base

$|a - b|$ independiente de los representantes λM, μN de $[M]$, $[N]$.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$. $b \geq a$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$. $b \geq a$

$$N \sim \pi^{-a} N = \langle \mathbf{u_1}, \pi^{b-a} \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$. $b \geq a$

$$N \sim \pi^{-a} N = \langle \mathbf{u_1}, \pi^{b-a} \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}} \subset M$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$. $b \geq a$

$$N \sim \pi^{-a} N = \langle \mathbf{u_1}, \pi^{b-a} \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}} \subset M$$

$$M/\pi^{-a}N \simeq \mathcal{O}/\pi^{b-a}\mathcal{O}.$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$. $b \geq a$

$$N \sim \pi^{-a} N = \langle \mathbf{u_1}, \pi^{b-a} \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}} \subset M$$

$$M / \pi^{-a} N \simeq \mathcal{O} / \pi^{b-a} \mathcal{O}.$$

Definición: Sean $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$. Se define la *distancia* entre $[M]$ y $[N]$ como

$$\mathrm{d}([M], [N]) := |a - b|,$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$ satisfacen que existe una $\mathcal{O}$-base de M, $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ tal que $\{\pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2}\}$ es una $\mathcal{O}$-base de N.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$. $b \geq a$

$$N \sim \pi^{-a} N = \langle \mathbf{u_1}, \pi^{b-a} \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}} \subset M$$

$$M/\pi^{-a}N \simeq \mathcal{O}/\pi^{b-a}\mathcal{O}.$$

Definición: Sean $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$. Se define la *distancia* entre $[M]$ y $[N]$ como

$$\mathrm{d}([M],[N]) := |a-b|,$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$ satisfacen que existe una $\mathcal{O}$-base de M, $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ tal que $\{\pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2}\}$ es una $\mathcal{O}$-base de N.

$$\mathrm{d} : \Delta^{(0)} \times \Delta^{(0)} \to \mathbb{Z} \text{ es una distancia}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$. $b \geq a$

$$N \sim \pi^{-a} N = \langle \mathbf{u_1}, \pi^{b-a} \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}} \subset M$$

$$M / \pi^{-a} N \simeq \mathcal{O} / \pi^{b-a} \mathcal{O}.$$

Definición: Sean $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$. Se define la *distancia* entre $[M]$ y $[N]$ como

$$\mathrm{d}([M], [N]) := |a - b|,$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$ satisfacen que existe una $\mathcal{O}$-base de M, $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ tal que $\{\pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2}\}$ es una $\mathcal{O}$-base de N.

Existen representantes M, N tales que

$$M \supset N \supset \pi^{\mathrm{d}([M],[N])} M$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$: Aristas

$M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$, $N = \langle \pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}}$. $b \geq a$

$$N \sim \pi^{-a} N = \langle \mathbf{u_1}, \pi^{b-a} \mathbf{u_2} \rangle_{\mathcal{O}} \subset M$$

$$M / \pi^{-a} N \simeq \mathcal{O} / \pi^{b-a} \mathcal{O}.$$

Definición: Sean $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$. Se define la *distancia* entre $[M]$ y $[N]$ como

$$\mathrm{d}([M], [N]) := |a - b|,$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}$ satisfacen que existe una $\mathcal{O}$-base de M, $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ tal que $\{\pi^a \mathbf{u_1}, \pi^b \mathbf{u_2}\}$ es una $\mathcal{O}$-base de N.

Existen representantes M, N tales que

$$M \supset N \supset \pi^{\mathrm{d}([M],[N])} M \quad \textit{posición estándar}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Definición: Definimos el grafo T asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$ del modo siguiente:

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Definición: Definimos el grafo T asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$ del modo siguiente:

- Vértices: $\Delta^{(0)}$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Definición: Definimos el grafo T asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$ del modo siguiente:

- Vértices: $\Delta^{(0)}$
- Aristas: Para cada par de vértices $[M]$, $[M']$, definimos

$$E([M],[M']) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } \mathrm{d}([M],[M']) = 1 \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Definición: Definimos el grafo T asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$ del modo siguiente:

- Vértices: $\Delta^{(0)}$
- Aristas: Para cada par de vértices $[M]$, $[M']$, definimos

$$E([M],[M']) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } \mathrm{d}([M],[M']) = 1 \\ \emptyset & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Proposición: T es un árbol.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo:

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$, y dados representantes $M, N \in \Delta$ tales que $N \subset M$,

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$, y dados representantes $M, N \in \Delta$ tales que $N \subset M$,

  descomposición de Jordan-Hölder de M/N

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$, y dados representantes $M, N \in \Delta$ tales que $N \subset M$,

  descomposición de Jordan-Hölder de M/N

$$\rightsquigarrow N = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_0 = M$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$, y dados representantes $M, N \in \Delta$ tales que $N \subset M$,

  descomposición de Jordan-Hölder de M/N

$$\rightsquigarrow N = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_0 = M$$

$$M_i/M_{i+1} \simeq \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}.$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$, y dados representantes $M, N \in \Delta$ tales que $N \subset M$,

descomposición de Jordan-Hölder de M/N

$$\rightsquigarrow N = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_0 = M$$

$$M_i/M_{i+1} \simeq \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}.$$

$$[N] \text{ --- } [M_{n-1}] \text{ --- } [M_{n-2}] \text{ - - - - - - - } [M_2] \text{ --- } [M_1] \text{ --- } [M]$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: ✓
- Sin ciclos:

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: $\checkmark$
- Sin ciclos:

  Dado un camino

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: $\checkmark$
- Sin ciclos:

  Dado un camino

$$[N] \;\text{---}\; [M_{n-1}] \;\text{---}\; [M_{n-2}] \; - - - - - - - \; [M_2] \;\text{---}\; [M_1] \;\text{---}\; [M]$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: *T* es un árbol.

- Conexo: ✓
- Sin ciclos:

  Dado un camino

$$[N] \text{ --- } [M_{n-1}] \text{ --- } [M_{n-2}] \text{ - - - - - - - } [M_2] \text{ --- } [M_1] \text{ --- } [M]$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}([M],[N]) = n$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: ✓
- Sin ciclos:

  Dado un camino

$$[N] \text{---} [M_{n-1}] \text{---} [M_{n-2}] \text{- - - - - - -} [M_2] \text{---} [M_1] \text{---} [M]$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}([M],[N]) = n \quad \rightsquigarrow [M] \neq [N]$$

Árbol asociado a $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Proposición: T es un árbol.

- Conexo: ✓
- Sin ciclos: ✓

Contents

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

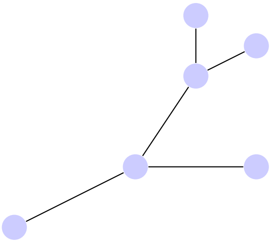
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

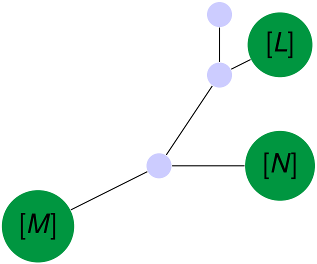
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

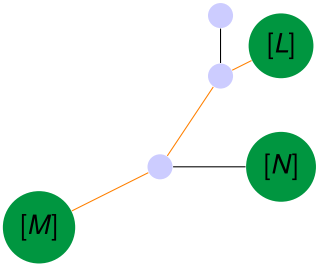
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

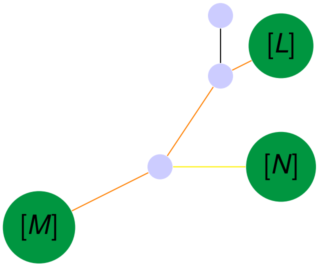
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

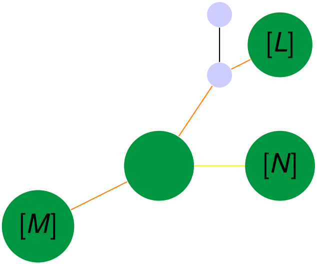
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

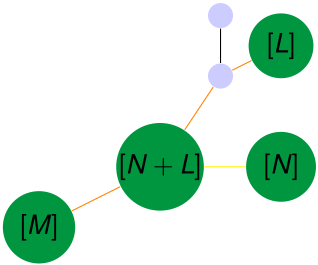
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:

Definición: Diremos que un subconjunto $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ está *ligado* si

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:

Definición: Diremos que un subconjunto $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ está *ligado* si, para todo $[M], [N], [L] \in \Delta_*^{(0)}$, tomando representantes $M, N, L \in \Delta$ con

$$M \supset N \supset \pi^{\mathrm{d}([M],[N])} M$$
$$M \supset L \supset \pi^{\mathrm{d}([M],[L])} M,$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado:

Definición: Diremos que un subconjunto $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ está *ligado* si, para todo $[M], [N], [L] \in \Delta_*^{(0)}$, tomando representantes $M, N, L \in \Delta$ con

$$M \supset N \supset \pi^{\mathrm{d}([M],[N])} M$$
$$M \supset L \supset \pi^{\mathrm{d}([M],[L])} M,$$

$$\rightsquigarrow [N + L] \in \Delta_*^{(0)}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado: $\Delta_*^{(0)}$ ligado

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

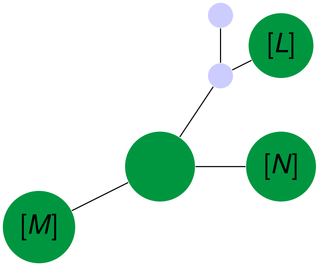
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado: $\Delta_*^{(0)}$ ligado



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

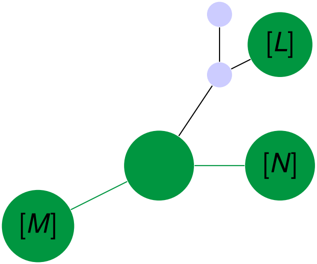
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado: $\Delta_*^{(0)}$ ligado



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

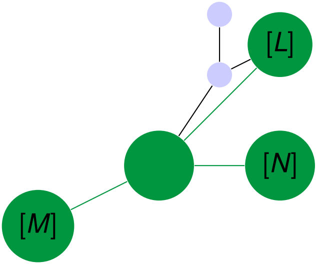
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado: $\Delta_*^{(0)}$ ligado



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

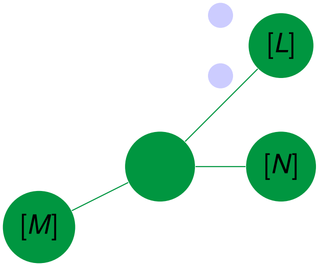
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado: $\Delta_*^{(0)}$ ligado



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

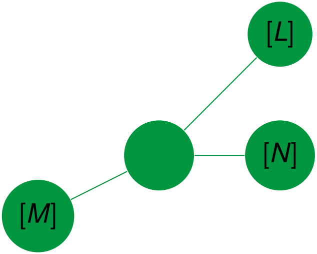
$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K)$ subgrupo

Subconjunto de vértices $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ adecuado?

- Invariante por Γ:

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta_* \text{ tal que } \gamma \cdot \Delta_*^{(0)} = \Delta_*^{(0)} \text{ para todo } \gamma \in \Gamma$$

- Bien conectado: $\Delta_*^{(0)}$ ligado



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

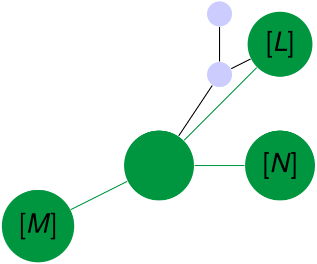
Teorema: Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ un conjunto ligado.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Teorema: Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ un conjunto ligado. El procedimiento descrito arriba da lugar a un árbol cuyo conjunto de vértices es $\Delta_*^{(0)}$.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K)$:

Teorema: Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ un conjunto ligado. El procedimiento descrito arriba da lugar a un árbol cuyo conjunto de vértices es $\Delta_*^{(0)}$.



Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$\dim A > 1$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$\dim A > 1$
Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$\dim A > 1$
Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$
Existe $\alpha \in \mathfrak{m}_A$, $M, N \in \Delta$ tales que

$$M \supset N \supset \alpha \cdot M?$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$\dim A > 1$
Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$
Existe $\alpha \in \mathfrak{m}_A$, $M, N \in \Delta$ tales que

$$M \supset N \supset \alpha \cdot M?$$

En general, NO!

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$\dim A > 1$
Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$
Existe $\alpha \in \mathfrak{m}_A$, $M, N \in \Delta$ tales que

$$M \supset N \supset \alpha \cdot M?$$

En general, NO!

Definición: $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$ son *compatibles* si existe una A-base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ de M, $\lambda \in K_A^\times$, $\alpha \in A$ such that

$$\{\lambda \mathbf{u_1}, \lambda\alpha \mathbf{u_2}\}$$

es una A-base de N.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$\dim A > 1$
Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$
Existe $\alpha \in \mathfrak{m}_A$, $M, N \in \Delta$ tales que

$$M \supset N \supset \alpha \cdot M?$$

En general, NO!

Definición: $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$ son *compatibles* si existe una A-base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ de M, $\lambda \in K_A^\times$, $\alpha \in A$ such that

$$\{\lambda \mathbf{u_1}, \lambda\alpha \mathbf{u_2}\}$$

es una A-base de N.

$$\mathrm{d}([M], [N]) := (\alpha)$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$\dim A > 1$
Dados $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$
Existe $\alpha \in \mathfrak{m}_A$, $M, N \in \Delta$ tales que

$$M \supset N \supset \alpha \cdot M?$$

En general, NO!

Definición: $[M], [N] \in \Delta^{(0)}$ son *compatibles* si existe una A-base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ de M, $\lambda \in K_A^{\times}$, $\alpha \in A$ such that

$$\{\lambda \mathbf{u_1}, \lambda\alpha \mathbf{u_2}\}$$

es una A-base de N.

$$\mathrm{d}([M],[N]) := (\alpha) \in \{\text{ideales de A}\}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Definición:

- Diremos que un subconjunto $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ está *ligado* si,

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Definición:

- Diremos que un subconjunto $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ está *ligado* si,
  - Para todo $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$, M y N son compatibles.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Definición:

- Diremos que un subconjunto $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ está *ligado* si,
  - Para todo $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$, M y N son compatibles.
  - Para todo $[M], [N], [L] \in \Delta_*^{(0)}$, tomando representantes $M, N, L \in \Delta$ con
$$M \supset N \supset \alpha M \quad \text{tal que } (\alpha) = \mathrm{d}(M, N)$$
$$M \supset L \supset \beta M \quad \text{tal que } (\beta) = \mathrm{d}(M, L),$$
$$\rightsquigarrow [N + L] \in \Delta_*^{(0)}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

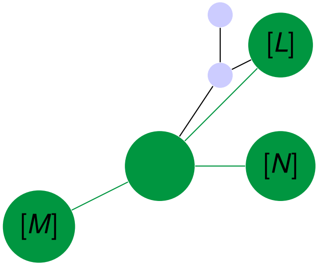
Definición:

- Diremos que un subconjunto $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ está *ligado* si,
  - Para todo $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$, M y N son compatibles.
  - Para todo $[M], [N], [L] \in \Delta_*^{(0)}$, tomando representantes $M, N, L \in \Delta$ con
$$M \supset N \supset \alpha M \quad \text{tal que } (\alpha) = \mathrm{d}(M, N)$$
$$M \supset L \supset \beta M \quad \text{tal que } (\beta) = \mathrm{d}(M, L),$$
$$\rightsquigarrow [N + L] \in \Delta_*^{(0)}$$

- Diremos que $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$ son *adyacentes* si no existe ningún $[L] \in \Delta_*^{(0)}$, $[L] \neq [M], [N]$ tal que
$$\mathrm{d}([M], [N]) = \mathrm{d}([M], [L]) \cdot \mathrm{d}([L], [N]).$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Definición:



- Diremos que $[M], [N] \in \Delta_*^{(0)}$ son *adyacentes* si no existe ningún $[L] \in \Delta_*^{(0)}$, $[L] \neq [M], [N]$ tal que

$$\mathrm{d}([M],[N]) = \mathrm{d}([M],[L]) \cdot \mathrm{d}([L],[N]).$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Teorema: Sea K_A el cuerpo de fracciones de un anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo, y sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Teorema: Sea K_A el cuerpo de fracciones de un anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo, y sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado.

1. El grafo T definido por:

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Teorema: Sea K_A el cuerpo de fracciones de un anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo, y sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado.

1. El grafo T definido por:
   - Vértices: $\Delta_*^{(0)}$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Teorema: Sea K_A el cuerpo de fracciones de un anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo, y sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado.

1. El grafo T definido por:
   - Vértices: $\Delta_*^{(0)}$
   - Aristas:

$$E([M],[N]) = \begin{cases} \{1\} \text{ si } [M] \text{ y } [N] \text{ son adyacentes} \\ \emptyset \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Teorema: Sea K_A el cuerpo de fracciones de un anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo, y sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado.

1. El grafo T definido por:
   - Vértices: $\Delta_*^{(0)}$
   - Aristas:

$$E([M],[N]) = \begin{cases} \{1\} \text{ si } [M] \text{ y } [N] \text{ son adyacentes} \\ \emptyset \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   es un árbol.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Teorema: Sea K_A el cuerpo de fracciones de un anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo, y sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado.

1. El grafo T definido por:
   - Vértices: $\Delta_*^{(0)}$
   - Aristas:

   $$E([M],[N]) = \begin{cases} \{1\} \text{ si } [M] \text{ y } [N] \text{ son adyacentes} \\ \emptyset \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   es un árbol.
2. Para todo camino

$$[N] - [M_{n-1}] - [M_{n-2}] - - - - - - - [M_2] - [M_1] - [M]$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Teorema: Sea K_A el cuerpo de fracciones de un anillo local Noetheriano, íntegramente cerrado y completo, y sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado.

1. El grafo T definido por:
   - Vértices: $\Delta_*^{(0)}$
   - Aristas:

   $$E([M],[N]) = \begin{cases} \{1\} \text{ si } [M] \text{ y } [N] \text{ son adyacentes} \\ \emptyset \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

   es un árbol.
2. Para todo camino

$$[N] — [M_{n-1}] — [M_{n-2}] - - - - - - - [M_2] — [M_1] — [M]$$

$$\mathrm{d}([M],[N]) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}([M]_i,[M_{i-1}]).$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado
- Fijo por Γ

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado
- Fijo por Γ

$$[M] \in \Delta^{(0)}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado
- Fijo por Γ

$$[M] \in \Delta^{(0)} \rightsquigarrow M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A.$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado
- Fijo por Γ

$$[M] \in \Delta^{(0)} \rightsquigarrow M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A.$$

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \text{ actúa sobre } \mathbf{u_i} = \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado
- Fijo por Γ

$$[M] \in \Delta^{(0)} \rightsquigarrow M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A.$$

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \text{ actúa sobre } \mathbf{u_i} = \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_i^{(1)} + bu_i^{(2)} \\ cu_i^{(1)} + du_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado
- Fijo por Γ

$$[M] \in \Delta^{(0)} \rightsquigarrow M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A.$$

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \text{ actúa sobre } \mathbf{u_i} = \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_i^{(1)} + bu_i^{(2)} \\ cu_i^{(1)} + du_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado
- Fijo por Γ

$$[M] \in \Delta^{(0)} \rightsquigarrow M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A.$$

$$\mathrm{GL}_2(K_A) \text{ actúa sobre } \mathbf{u_i} = \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(au_i^{(1)} + bu_i^{(2)}) \\ \lambda(cu_i^{(1)} + du_i^{(2)}) \end{pmatrix}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Subconjunto $\Delta_*^{(0)}$ de $\Delta^{(0)}$?

- ligado
- Fijo por Γ

$$[M] \in \Delta^{(0)} \rightsquigarrow M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A.$$

$$\mathrm{PGL}_2(K_A) \text{ actúa sobre } [u_i^{(1)} : u_i^{(2)}] \in \mathbb{P}^1(K_A).$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i^{(1)} \\ u_i^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(au_i^{(1)} + bu_i^{(2)}) \\ \lambda(cu_i^{(1)} + du_i^{(2)}) \end{pmatrix}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$
- $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj}: K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$
- $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$.
- $\mathrm{PGL}_2(K_A)$ actúa sobre $\mathrm{proj}(\mathbf{u_i})$, $i = 1, 2$.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$
- $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$.
- $\mathrm{PGL}_2(K_A)$ actúa sobre $\mathrm{proj}(\mathbf{u_i})$, $i = 1, 2$.

Problema: $\{\mathrm{proj}(\mathbf{u_1}), \mathrm{proj}(\mathbf{u_2})\}$ no basta para determinar $[M]$.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$
- $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$.
- $\mathrm{PGL}_2(K_A)$ actúa sobre $\mathrm{proj}(\mathbf{u_i})$, $i = 1, 2$.

Problema: $\{\mathrm{proj}(\mathbf{u_1}), \mathrm{proj}(\mathbf{u_2})\}$ no basta para determinar $[M]$.

Ejemplo:

$$\langle \mathbf{e_1}, \pi \mathbf{e_2} \rangle_{\mathcal{O}} \neq \lambda \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle_{\mathcal{O}} \text{ para todo } \lambda \in K^\times.$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$
- $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$.
- $\mathrm{PGL}_2(K_A)$ actúa sobre $\mathrm{proj}(\mathbf{u_i})$, $i = 1, 2$.

Problema: $\{\mathrm{proj}(\mathbf{u_1}), \mathrm{proj}(\mathbf{u_2})\}$ no basta para determinar $[M]$.

Ejemplo:

$$\langle \mathbf{e_1}, \pi\mathbf{e_2} \rangle_{\mathcal{O}} \neq \lambda \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle_{\mathcal{O}} \text{ para todo } \lambda \in K^\times.$$

Idea: Tomemos $\mathbf{u_3} = b_1\mathbf{u_1} + b_2\mathbf{u_2}$, $b_1, b_2 \in A^\times$.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$
- $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$.
- $\mathrm{PGL}_2(K_A)$ actúa sobre $\mathrm{proj}(\mathbf{u_i})$, $i = 1, 2$.

Problema: $\{\mathrm{proj}(\mathbf{u_1}), \mathrm{proj}(\mathbf{u_2})\}$ no basta para determinar $[M]$.

Ejemplo:

$$\langle \mathbf{e_1}, \pi \mathbf{e_2} \rangle_{\mathcal{O}} \neq \lambda \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle_{\mathcal{O}} \text{ para todo } \lambda \in K^\times.$$

Idea: Tomemos $\mathbf{u_3} = b_1 \mathbf{u_1} + b_2 \mathbf{u_2}$, $b_1, b_2 \in A^\times$.

Lema: $\{\mathrm{proj}(\mathbf{u_1}), \mathrm{proj}(\mathbf{u_2}), \mathrm{proj}(\mathbf{u_3})\}$ determinan $[M] \in \Delta^{(0)}$.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Lema: Sea $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$, $\mathbf{u_3} = b_1\mathbf{u_1} + b_2\mathbf{u_2}$ tales que $b_1, b_2 \in A^\times$.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Lema: Sea $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$, $\mathbf{u_3} = b_1 \mathbf{u_1} + b_2 \mathbf{u_2}$ tales que $b_1, b_2 \in A^\times$.
Fijemos $(\lambda_i \mathbf{u_i}) \in \mathrm{proj}^{-1}\mathrm{proj}((\mathbf{u_i}))$, para $i = 1, 2, 3$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Lema: Sea $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$, $\mathbf{u_3} = b_1 \mathbf{u_1} + b_2 \mathbf{u_2}$ tales que $b_1, b_2 \in A^{\times}$.
Fijemos $(\lambda_i \mathbf{u_i}) \in \mathrm{proj}^{-1}\mathrm{proj}((\mathbf{u_i}))$, para $i = 1, 2, 3$, y sean $\alpha_1, \alpha_2 \in K_A$ tales que

$$(\lambda_3 \mathbf{u_3}) = \alpha_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{u_1}) + \alpha_2 \cdot (\lambda_2 \mathbf{u_2}).$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

Lema: Sea $M = \langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \rangle_A$, $\mathbf{u_3} = b_1\mathbf{u_1} + b_2\mathbf{u_2}$ tales que $b_1, b_2 \in A^\times$.
Fijemos $(\lambda_i \mathbf{u_i}) \in \mathrm{proj}^{-1}\mathrm{proj}((\mathbf{u_i}))$, para $i = 1, 2, 3$, y sean $\alpha_1, \alpha_2 \in K_A$ tales que

$$(\lambda_3 \mathbf{u_3}) = \alpha_1 \cdot (\lambda_1 \mathbf{u_1}) + \alpha_2 \cdot (\lambda_2 \mathbf{u_2}).$$

Entonces

$$\langle \alpha_1(\lambda_1 \mathbf{u_1}), \alpha_2(\lambda_2 \mathbf{u_2}), (\lambda_3 \mathbf{u_3}) \rangle_A = \lambda_3 M.$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$

Definición: Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K_A)$ tres puntos, y escojamos $\mathbf{u_i} \in \mathrm{proj}^{-1}(P_i)$.

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$

Definición: Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K_A)$ tres puntos, y escojamos $\mathbf{u_i} \in \mathrm{proj}^{-1}(P_i)$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K_A$ tales que

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \alpha_3 \mathbf{u_3} = 0.$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

- $\mathrm{proj} : K_A \times K_A \to \mathbb{P}^1(K_A)$

Definición: Sean $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K_A)$ tres puntos, y escojamos $\mathbf{u_i} \in \mathrm{proj}^{-1}(P_i)$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in K_A$ tales que

$$\alpha_1 \mathbf{u_1} + \alpha_2 \mathbf{u_2} + \alpha_3 \mathbf{u_3} = 0.$$

Se define la *clase de retículos asociada a P_1, P_2, P_3* como

$$[M(P_1, P_2, P_3)] := [\{a_1 \alpha_1 \mathbf{u_1} + a_2 \alpha_2 \mathbf{u_2} + a_3 \alpha_3 \mathbf{u_3} : a_1, a_2, a_3 \in A\}].$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Si Γ deja invariante un conjunto de puntos X, entonces Γ deja invariante

$$\{[M(P_1, P_2, P_3)] : P_1, P_2, P_3 \in X\} \subset \Delta^{(0)}.$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Si Γ deja invariante un conjunto de puntos X, entonces Γ deja invariante

$$\{[M(P_1, P_2, P_3)] : P_1, P_2, P_3 \in X\} \subset \Delta^{(0)}.$$

$$\begin{cases} \Sigma_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K_A) : \text{ existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma \cdot P = P\}. \\ \end{cases}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Si Γ deja invariante un conjunto de puntos X, entonces Γ deja invariante

$$\{[M(P_1, P_2, P_3)] : P_1, P_2, P_3 \in X\} \subset \Delta^{(0)}.$$

$$\begin{cases} \Sigma_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K_A) : \text{ existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma \cdot P = P\}. \\ \Delta_\Gamma^{(0)} := \{[M(P_1, P_2, P_3)] : P_1, P_2, P_3 \in \Sigma_\Gamma\}. \end{cases}$$

Árboles asociado a subgrupos de $\mathrm{PGL}_2(K_A)$:

$$\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A).$$

Si Γ deja invariante un conjunto de puntos X, entonces Γ deja invariante

$$\{[M(P_1,P_2,P_3)] : P_1,P_2,P_3 \in X\} \subset \Delta^{(0)}.$$

$$\begin{cases} \Sigma_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K_A) : \text{ existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma \cdot P = P\}. \\ \Delta_\Gamma^{(0)} := \{[M(P_1,P_2,P_3)] : P_1,P_2,P_3 \in \Sigma_\Gamma\}. \end{cases}$$

Está $\Delta_\Gamma^{(0)}$ ligado?

Contents

Grupos de Schottky:

3 clases de elementos en $\mathrm{PGL}_2(K)$ salvo conjugación:

Grupos de Schottky:

3 clases de elementos en $\mathrm{PGL}_2(K)$ salvo conjugación:

$$\begin{cases} \text{Hiperbólico:} \\ \\ \text{Elíptico:} \\ \\ \text{Parabólico:} \end{cases}$$

Grupos de Schottky:

3 clases de elementos en $\mathrm{PGL}_2(K)$ salvo conjugación:

$$\begin{cases} \text{Hiperbólico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } |\lambda_1| \neq |\lambda_2|. \\ \\ \text{Elíptico:} \\ \\ \text{Parabólico:} \end{cases}$$

Grupos de Schottky:

3 clases de elementos en $\mathrm{PGL}_2(K)$ salvo conjugación:

$$\begin{cases} \text{Hiperbólico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } |\lambda_1| \neq |\lambda_2|. \\ \text{Elíptico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } |\lambda_1| = |\lambda_2|, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \text{Parabólico:} \end{cases}$$

Grupos de Schottky:

3 clases de elementos en $\mathrm{PGL}_2(K)$ salvo conjugación:

$$\begin{cases} \text{Hiperbólico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } |\lambda_1| \neq |\lambda_2|. \\ \text{Elíptico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } |\lambda_1| = |\lambda_2|, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \text{Parabólico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Grupos de Schottky:

3 clases de elementos en $\mathrm{PGL}_2(K)$ salvo conjugación:

$$\begin{cases} \text{Hiperbólico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } |\lambda_1| \neq |\lambda_2|. \\ \text{Elíptico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } |\lambda_1| = |\lambda_2|, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \text{Parabólico: } \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Lema: $\gamma \in GL_2(K)$ es hiperbólico si y sólo si

$$\left| \frac{(\mathrm{traza}(\gamma))^2}{\det(\gamma)} \right| > 1.$$

Grupos de Schottky:

Definición:

1. Un *grupo de Schottky* es un subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ tal que:

Grupos de Schottky:

Definición:

1. Un *grupo de Schottky* es un subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ tal que:
   - Γ finitamente generado.

Grupos de Schottky:

Definición:

1. Un *grupo de Schottky* es un subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ tal que:
   - Γ finitamente generado.
   - Para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\left(\frac{(\mathrm{traza}(\gamma))^2}{\det(\gamma)}\right)^{-1} \in \mathfrak{m}_A.$$

Grupos de Schottky:

Definición:

1. Un *grupo de Schottky* es un subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ tal que:
   - Γ finitamente generado.
   - Para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\left(\frac{(\mathrm{traza}(\gamma))^2}{\det(\gamma)}\right)^{-1} \in \mathfrak{m}_A.$$

2. $\Sigma_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K_A) : \text{ existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma \cdot P = P\}$.

Grupos de Schottky:

Definición:

1. Un *grupo de Schottky* es un subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ tal que:
   - Γ finitamente generado.
   - Para todo $\gamma \in \Gamma$,
   $$\left(\frac{(\mathrm{traza}(\gamma))^2}{\det(\gamma)}\right)^{-1} \in \mathfrak{m}_A.$$
2. $\Sigma_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K_A) : \text{ existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma \cdot P = P\}$.
3. Diremos que un grupo de Schottky Γ es *plano* si para todo $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \Sigma_\Gamma$,
   $$R(P_1, P_2; P_3, P_4) \in A \text{ ó } R(P_1, P_2; P_3, P_4)^{-1} \in A.$$

Grupos de Schottky:

Definición:

1. Un *grupo de Schottky* es un subgrupo $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ tal que:
   - Γ finitamente generado.
   - Para todo $\gamma \in \Gamma$,

$$\left(\frac{(\mathrm{traza}(\gamma))^2}{\det(\gamma)}\right)^{-1} \in \mathfrak{m}_A.$$

2. $\Sigma_\Gamma := \{P \in \mathbb{P}^1(K_A) : \text{ existe } \gamma \in \Gamma \text{ tal que } \gamma \cdot P = P\}$.
3. Diremos que un grupo de Schottky Γ es *plano* si para todo $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \Sigma_\Gamma$,

$$R(P_1, P_2; P_3, P_4) \in A \text{ ó } R(P_1, P_2; P_3, P_4)^{-1} \in A.$$

   donde $R(P_1, P_2; P_3, P_4)$ es la razón doble

Grupos de Schottky:

Proposición: Sea Γ un grupo de Schottky plano. Entonces $\Delta_{\Gamma}^{(0)}$ está ligado.

Grupos de Schottky:

Proposición: Sea Γ un grupo de Schottky plano. Entonces $\Delta_\Gamma^{(0)}$ está ligado.

Teorema: Sea $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ un grupo de Schottky plano.

Grupos de Schottky:

Proposición: Sea Γ un grupo de Schottky plano. Entonces $\Delta_\Gamma^{(0)}$ está ligado.

Teorema: Sea $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ un grupo de Schottky plano.

1. Existe un árbol T_Γ cuyo conjunto de vértices es $\Delta_\Gamma^{(0)}$.

Grupos de Schottky:

Proposición: Sea Γ un grupo de Schottky plano. Entonces $\Delta_\Gamma^{(0)}$ está ligado.

Teorema: Sea $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ un grupo de Schottky plano.

1. Existe un árbol T_Γ cuyo conjunto de vértices es $\Delta_\Gamma^{(0)}$.
2. Γ actúa sobre T_Γ.

Grupos de Schottky:

Proposición: Sea Γ un grupo de Schottky plano. Entonces $\Delta_\Gamma^{(0)}$ está ligado.

Teorema: Sea $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ un grupo de Schottky plano.

1. Existe un árbol T_Γ cuyo conjunto de vértices es $\Delta_\Gamma^{(0)}$.
2. Γ actúa sobre T_Γ.

$\rightsquigarrow$ Γ es un grupo libre

Grupos de Schottky:

Proposición: Sea Γ un grupo de Schottky plano. Entonces $\Delta_\Gamma^{(0)}$ está ligado.

Teorema: Sea $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ un grupo de Schottky plano.

1. Existe un árbol T_Γ cuyo conjunto de vértices es $\Delta_\Gamma^{(0)}$.
2. Γ actúa sobre T_Γ.

Grupos de Schottky:

Proposición: Sea Γ un grupo de Schottky plano. Entonces $\Delta_\Gamma^{(0)}$ está ligado.

Teorema: Sea $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ un grupo de Schottky plano.

1. Existe un árbol T_Γ cuyo conjunto de vértices es $\Delta_\Gamma^{(0)}$.
2. Γ actúa sobre T_Γ.
3. T_Γ/Γ es un grafo finito.

Grupos de Schottky:

Proposición: Sea Γ un grupo de Schottky plano. Entonces $\Delta_\Gamma^{(0)}$ está ligado.

Teorema: Sea $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(K_A)$ un grupo de Schottky plano.

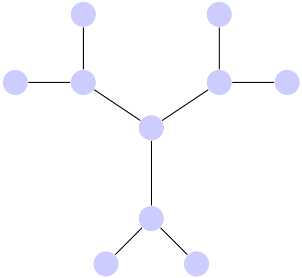
1. Existe un árbol T_Γ cuyo conjunto de vértices es $\Delta_\Gamma^{(0)}$. ✓
2. Γ actúa sobre T_Γ.✓
3. T_Γ/Γ es un grafo finito.

Grupos de Schottky:

- T_Γ/Γ es un grafo finito

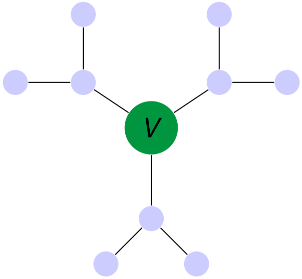
Grupos de Schottky:

- T_Γ/Γ es un grafo finito



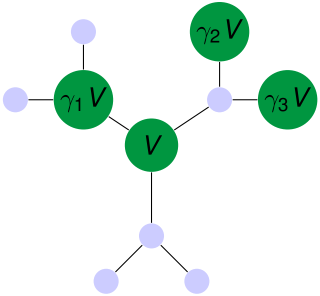
Grupos de Schottky:

- T_Γ/Γ es un grafo finito



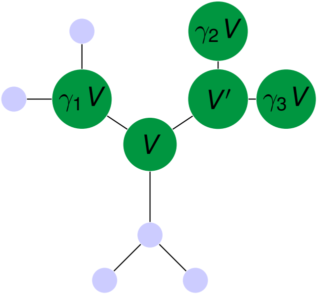
Grupos de Schottky:

- T_Γ/Γ es un grafo finito



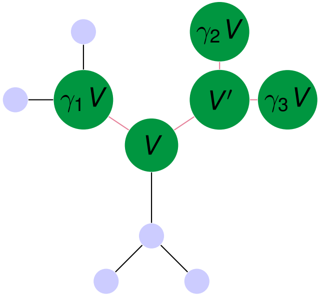
Grupos de Schottky:

- T_Γ/Γ es un grafo finito



Grupos de Schottky:

- T_Γ/Γ es un grafo finito



Frontera

Definición: T un árbol

Frontera

Definición: T un árbol

- Un *semi-camino* de T es un subgrafo de la forma

Frontera

Definición: T un árbol

- Un *semi-camino* de T es un subgrafo de la forma

- Dos semi-caminos son equivalentes si difieren sólo en un número finito de vértices.

Frontera

Definición: T un árbol

- Un *semi-camino* de T es un subgrafo de la forma

- Dos semi-caminos son equivalentes si difieren sólo en un número finito de vértices.
- Una *punta* de T es una clase de equivalencia de semi-caminos.

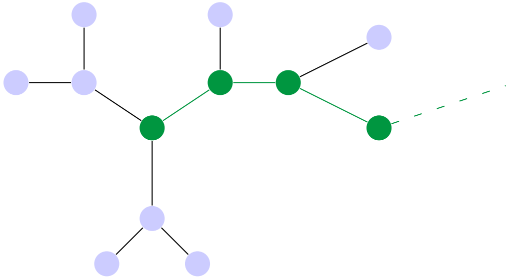
Frontera

Definición: T un árbol

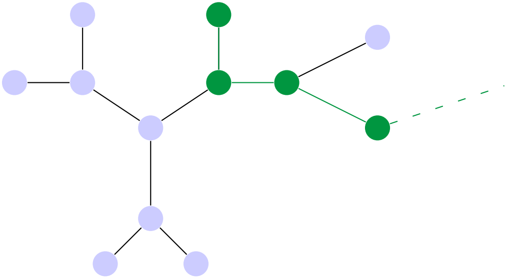
- Un *semi-camino* de T es un subgrafo de la forma

- Dos semi-caminos son equivalentes si difieren sólo en un número finito de vértices.
- Una *punta* de T es una clase de equivalencia de semi-caminos.
- La *frontera de T*, ∂T, es el conjunto de puntas de T.

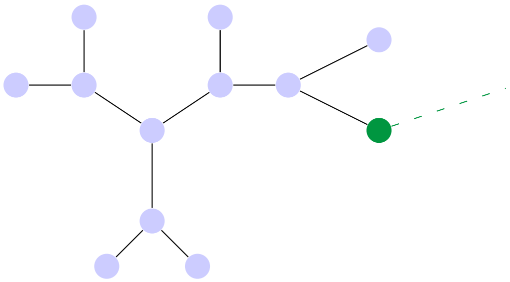
Frontera



Frontera



Frontera



Frontera

$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado

Frontera

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)} \text{ ligado} \rightsquigarrow T$$

Frontera

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)} \text{ ligado} \rightsquigarrow T$$

$$\partial T \hookrightarrow \mathbb{P}^1(K_A)$$

Frontera

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)} \text{ ligado} \rightsquigarrow T$$

$$\partial T \hookrightarrow \mathbb{P}^1(K_A)$$

$$[M_1] \text{ --- } [M_2] \text{ --- } [M_3] \text{ --- } [M_4] \text{ - - - - - - -}$$

Frontera

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)} \text{ ligado} \rightsquigarrow T$$

$$\partial T \hookrightarrow \mathbb{P}^1(K_A)$$

$$[M_1] — [M_2] — [M_3] — [M_4] - - - - - - -$$

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$$

Frontera

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)} \text{ ligado} \rightsquigarrow T$$

$$\partial T \hookrightarrow \mathbb{P}^1(K_A)$$

$$[M_1] — [M_2] — [M_3] — [M_4] - - - - - - -$$

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \langle \mathbf{u} \rangle_A$$

Frontera

$$\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)} \text{ ligado} \rightsquigarrow T$$

$$\partial T \hookrightarrow \mathbb{P}^1(K_A)$$

$$[M_1] — [M_2] — [M_3] — [M_4] - - - - - - -$$

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \langle \mathbf{u} \rangle_A$$

$$\rightsquigarrow [u^{(1)} : u^{(2)}] \in \mathbb{P}^1(K_A).$$

Frontera

K cuerpo local, T árbol asociado a $\Delta^{(0)}$

Frontera

K cuerpo local, T árbol asociado a $\Delta^{(0)}$

$$\partial T \simeq \mathbb{P}^1(K)$$

Frontera

K cuerpo local, T árbol asociado a $\Delta^{(0)}$

$$\partial T \simeq \mathbb{P}^1(K)$$

$[u^{(1)} : u^{(2)}] \in \mathbb{P}^1(K)$.

Frontera

K cuerpo local, T árbol asociado a $\Delta^{(0)}$

$$\partial T \simeq \mathbb{P}^1(K)$$

$[u^{(1)} : u^{(2)}] \in \mathbb{P}^1(K)$.

$$\text{Definamos } \mathbf{u} := \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \text{un vector linealmente independiente con } \mathbf{u}$$

$$M_i := \langle \mathbf{u}, \pi^i \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{O}}$$

Frontera

K cuerpo local, T árbol asociado a $\Delta^{(0)}$

$$\partial T \simeq \mathbb{P}^1(K)$$

$[u^{(1)} : u^{(2)}] \in \mathbb{P}^1(K)$.

$$\text{Definamos } \mathbf{u} := \begin{pmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v} := \text{un vector linealmente independiente con } \mathbf{u}$$

$$M_i := \langle \mathbf{u}, \pi^i \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{O}}$$

$$[M_1] — [M_2] — [M_3] — [M_4] \text{ - - - - - - - }$$

Frontera

$P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K)$

Frontera

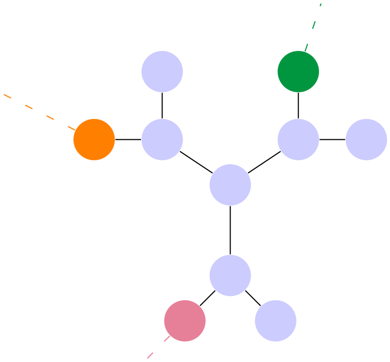
$P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K)$

$$[M(P_1, P_2, P_3)]?$$

Frontera

$P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K)$

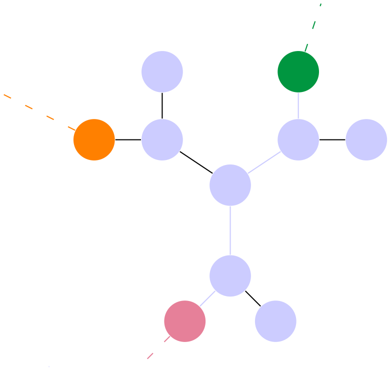
$[M(P_1, P_2, P_3)]?$



Frontera

$P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K)$

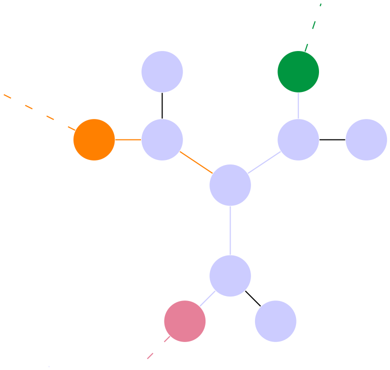
$$[M(P_1, P_2, P_3)]?$$



Frontera

$P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K)$

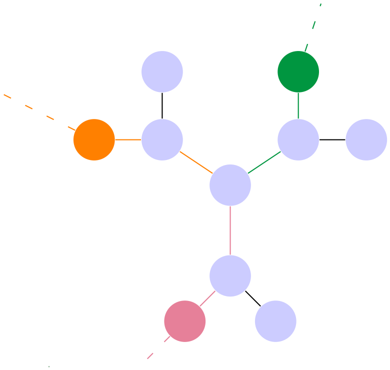
$$[M(P_1, P_2, P_3)]?$$



Frontera

$P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K)$

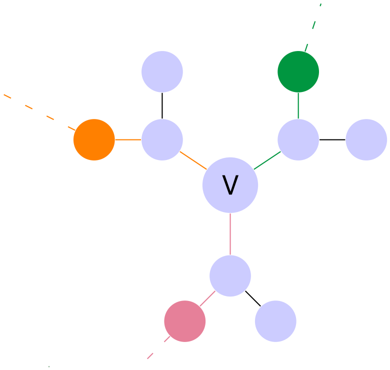
$[M(P_1, P_2, P_3)]?$



Frontera

$P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1(K)$

$[M(P_1, P_2, P_3)]$?



Frontera

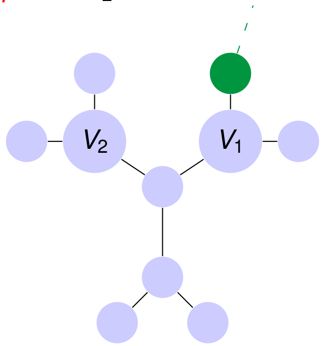
Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.

Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si

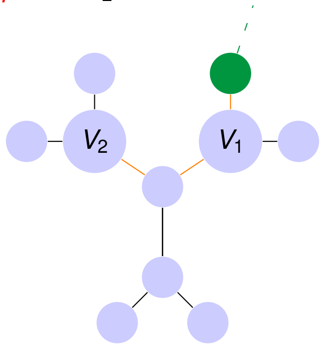
Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si



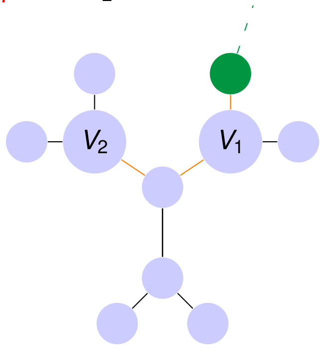
Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si



Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si

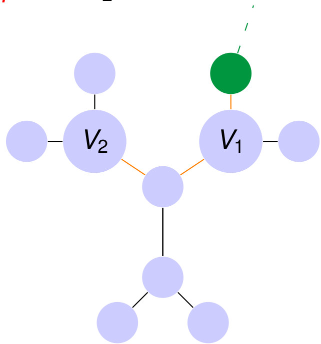


Definición: *Base de P*:=

$$\{V \in \Delta_*^{(0)} : V \text{ no está separado de } P \text{ por ningún otro vértice}\}.$$

Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si



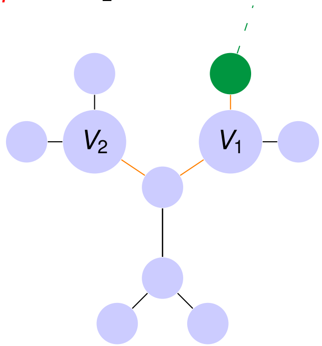
Definición: *Base de P*:=

$$\{V \in \Delta_*^{(0)} : V \text{ no está separado de } P \text{ por ningún otro vértice}\}.$$

Base de $P \neq \emptyset \Rightarrow$ no nos podemos acercar a P con vértices de T.

Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si



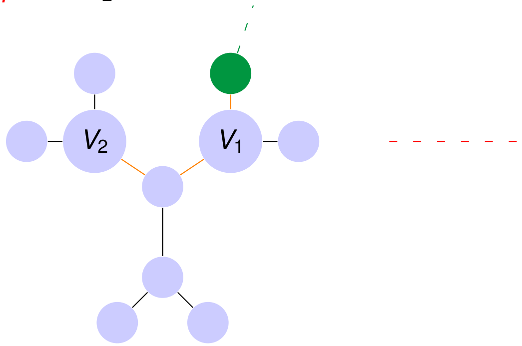
Definición: *Base de P*:=

$$\{V \in \Delta_*^{(0)} : V \text{ no está separado de } P \text{ por ningún otro vértice}\}.$$

Base de $P \neq \emptyset \Rightarrow P$ no está en la frontera de T.

Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$. Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si



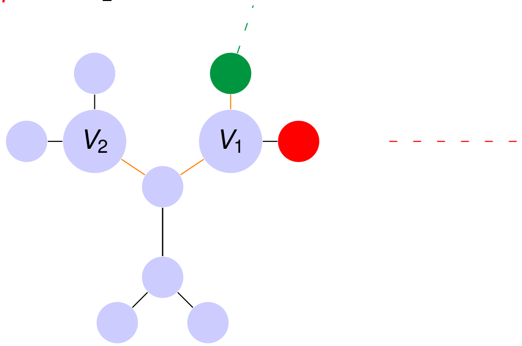
Definición: *Base de P*:=

$$\{V \in \Delta_*^{(0)} : V \text{ no está separado de } P \text{ por ningún otro vértice}\}.$$

Base de $P \neq \emptyset \Rightarrow P$ no está en la frontera de T.

Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si



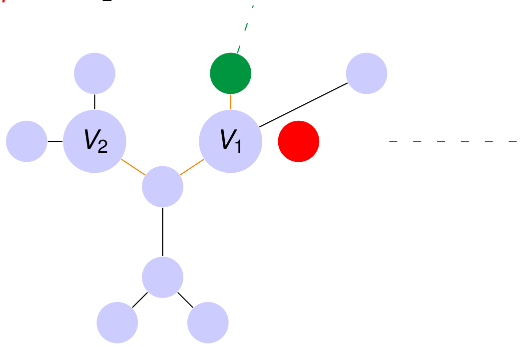
Definición: *Base de P*:=

$$\{V \in \Delta_*^{(0)} : V \text{ no está separado de } P \text{ por ningún otro vértice}\}.$$

Base de $P \neq \emptyset \Rightarrow P$ no está en la frontera de T.

Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si



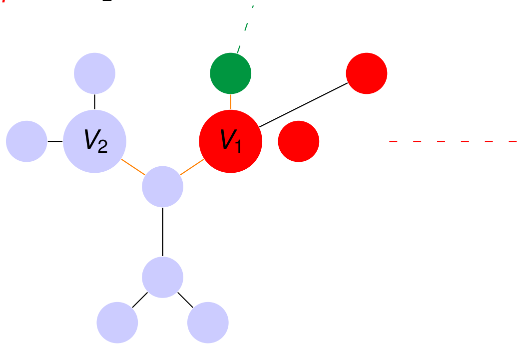
Definición: *Base de P*:=

$$\{V \in \Delta_*^{(0)} : V \text{ no está separado de } P \text{ por ningún otro vértice}\}.$$

Base de $P \neq \emptyset \Rightarrow P$ no está en la frontera de T.

Frontera

Sea $\Delta_*^{(0)} \subset \Delta^{(0)}$ ligado, T el árbol asociado, $P \in \mathbb{P}^1(K_A)$, $V_1, V_2 \in \Delta_*^{(0)}$.
Diremos que V_1 *separa* a V_2 de P si



Definición: *Base de P*:=

$$\{V \in \Delta_*^{(0)} : V \text{ no está separado de } P \text{ por ningún otro vértice}\}.$$

Base de $P \neq \emptyset \Rightarrow P$ no está en la frontera de T.

El Árbol de Bruhat-Tits asociado a un grupo de Schottky

Sara Arias de Reyna

Mathematics Research Unit
University of Luxembourg

28 de Enero de 2013

STNB 2013
Barcelona