Corba de Mumford associada a un grup de Schottky

Carlos de Vera Piquero

Departament de Matemàtica Aplicada 2, UPC

27è STNB - Uniformització p-àdica de corbes de gènere ≥ 2
30 de gener de 2013

Índex

Notacions

- A anell (de fet, domini) local noetherià integralment tancat, $K = K(A)$, $\mathfrak{m}$ ideal maximal de A, $k = A/\mathfrak{m}$.

$$S_\eta = \mathrm{Spec}(K) \hookrightarrow S = \mathrm{Spec}(A) \hookleftarrow S_0 = \mathrm{Spec}(k).$$

Notacions

- A anell (de fet, domini) local noetherià integralment tancat, $K = K(A)$, $\mathfrak{m}$ ideal maximal de A, $k = A/\mathfrak{m}$.

$$S_\eta = \mathrm{Spec}(K) \hookrightarrow S = \mathrm{Spec}(A) \hookleftarrow S_0 = \mathrm{Spec}(k).$$

- $\mathrm{PGL}_2(K)$ actua de manera natural en

$$\Delta^{(0)} = \{M \subset K \times K \quad A\text{-submòdul lliure de rang } 2\}/_\sim.$$

Si $\Gamma \subseteq \mathrm{PGL}_2(K)$ és un subgrup de Schottky pla,

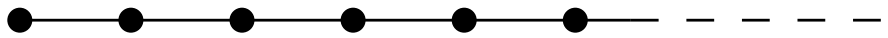
$$\Delta_\Gamma^{(0)} = \{M(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \Sigma_\Gamma \text{ diferents dos a dos}\}/_\sim \subseteq \Delta^{(0)}$$

és el conjunt de vèrtexos d'un arbre Δ_Γ, on

$$\Sigma_\Gamma = \{\text{punts fixos per elements de } \Gamma\} \subseteq \mathbb{P}^1(K).$$

Notacions

- $\partial\Delta_\Gamma$ = conjunt de *finals* de Δ_Γ: classes d'equivalència de semirectes dins de Δ_Γ



- $i : \partial\Delta_\Gamma \to \mathbb{P}^1(K)$, $\bar{\Sigma}_\Gamma = i(\partial\Delta_\Gamma)$ conjunt de punts límit de Γ,

$$\Sigma_\Gamma \subseteq \bar{\Sigma}_\Gamma = i(\partial\Delta_\Gamma) \subseteq \mathbb{P}^1(K).$$

  En el cas $\dim(A) = 1$, $\bar{\Sigma}_\Gamma$ és l'adherència de Σ_Γ en $\mathbb{P}^1(K)$.

- Conjunt de discontinuïtat estricta:

$$\Omega_\Gamma := \mathbb{P}^1(K) - \bar{\Sigma}_\Gamma = \mathbb{P}^1(K) - i(\partial\Delta_\Gamma).$$

Esquema formal associat a un grup de Schottky

- Els esquemes $\mathbb{P}(T)$, per $T \subset \Delta_\Gamma$ finit, formen un sistema invers respecte a la inclusió. Si $T_1 \subset T_2$, $p : \mathbb{P}(T_2) \to \mathbb{P}(T_1)$.

Esquema formal associat a un grup de Schottky

- Els esquemes $\mathbb{P}(T)$, per $T \subset \Delta_\Gamma$ finit, formen un sistema invers respecte a la inclusió. Si $T_1 \subset T_2$, $p : \mathbb{P}(T_2) \to \mathbb{P}(T_1)$.
- Completant al llarg de la fibra tancada, els esquemes formals $\mathscr{P}(T)$ també formen un sistema invers, $p : \mathscr{P}(T_2) \to \mathscr{P}(T_1)$.

Esquema formal associat a un grup de Schottky

- Els esquemes $\mathbb{P}(T)$, per $T \subset \Delta_\Gamma$ finit, formen un sistema invers respecte a la inclusió. Si $T_1 \subset T_2$, $p : \mathbb{P}(T_2) \to \mathbb{P}(T_1)$.
- Completant al llarg de la fibra tancada, els esquemes formals $\mathscr{P}(T)$ també formen un sistema invers, $p : \mathscr{P}(T_2) \to \mathscr{P}(T_1)$.
- Per a cada T_1, sigui $\mathscr{P}(T_1)' \subseteq \mathscr{P}(T_1)$ l'obert maximal tal que per a tot $T_1 \subset T_2 \subset \Delta_\Gamma$ finit, $\mathrm{res}_{|\mathscr{P}(T_1)'}(p)$ és un isomorfisme. Els $\mathscr{P}(T)'$ formen un sistema directe, on els morfismes $\mathscr{P}(T_1)' \to \mathscr{P}(T_2)'$ són immersions obertes.

Esquema formal associat a un grup de Schottky

- Els esquemes $\mathbb{P}(T)$, per $T \subset \Delta_\Gamma$ finit, formen un sistema invers respecte a la inclusió. Si $T_1 \subset T_2$, $p : \mathbb{P}(T_2) \to \mathbb{P}(T_1)$.
- Completant al llarg de la fibra tancada, els esquemes formals $\mathscr{P}(T)$ també formen un sistema invers, $p : \mathscr{P}(T_2) \to \mathscr{P}(T_1)$.
- Per a cada T_1, sigui $\mathscr{P}(T_1)' \subseteq \mathscr{P}(T_1)$ l'obert maximal tal que per a tot $T_1 \subset T_2 \subset \Delta_\Gamma$ finit, $\mathrm{res}_{|\mathscr{P}(T_1)'}(p)$ és un isomorfisme. Els $\mathscr{P}(T)'$ formen un sistema directe, on els morfismes $\mathscr{P}(T_1)' \to \mathscr{P}(T_2)'$ són immersions obertes.
- L'esquema formal associat a Δ_Γ és

$$\mathscr{P}(\Delta_\Gamma) = \varinjlim \mathscr{P}(T)'.$$

Esquemes formals algebraitzables

La completació al llarg de la fibra tancada indueix un morfisme de categories

$$\begin{array}{ccc} S\text{-Esquemes} & \longrightarrow & S\text{-Esquemes Formals} \\ X & \longmapsto & \widehat{X} \end{array}$$

Definició

Un esquema formal $\mathscr{X}$ sobre S es diu algebraitzable *si existeix un esquema X sobre S tal que $\widehat{X} = \mathscr{X}$.*

Esquemes formals algebraitzables

La completació al llarg de la fibra tancada indueix un morfisme de categories

$$\begin{array}{ccc} S\text{-Esquemes} & \longrightarrow & S\text{-Esquemes Formals} \\ X & \longmapsto & \widehat{X} \end{array}$$

Definició

Un esquema formal $\mathscr{X}$ sobre S es diu algebraitzable *si existeix un esquema X sobre S tal que $\widehat{X} = \mathscr{X}$.*

Teorema (Grothendieck, EGAIII, Ch. III, Th. 5.4.5)

Sigui $\mathscr{X}$ un esquema formal sobre S. Si existeix un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-mòdul invertible $\mathscr{L}$ tal que $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}/\mathfrak{m}\mathscr{L}$ és un $\mathcal{O}_{\mathscr{X}_0}$-mòdul ample, aleshores $\mathscr{X}$ és algebraitzable.

El quocient $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma$

L'acció de Γ en $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$ indueix un esquema quocient, que a més és algebraitzable:

Teorema

Existeix un únic parell $(\mathscr{X}, \pi)$ format per:

(i) *un esquema formal $\mathscr{X}$ propi sobre S i*

(ii) *un S-morfisme étale i exhaustiu*

$$\pi : \mathscr{P}(\Delta_\Gamma) \longrightarrow \mathscr{X}$$

tal que

(a) $\pi \circ [\gamma] = \pi$ *per a tot* $\gamma \in \Gamma$,

(b) *per a qualssevol* $x, y \in \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$, $\pi(x) = \pi(y)$ *si, i només si,* $x = [\gamma]y$ *per algun* $\gamma \in \Gamma$.

A més, l'esquema formal $\mathscr{X}$ és normal, pla i projectiu sobre S, i és algebraitzable.

Plantejament de la demostració

- Unicitat: l'espai topològic subjacent a $\mathscr{X}$ ha de ser el quocient del de l'esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$, i el feix estructural ha de ser precisament el format pels elements Γ-invariants de $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)})$.

Plantejament de la demostració

- Unicitat: l'espai topològic subjacent a $\mathscr{X}$ ha de ser el quocient del de l'esquema formal $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$, i el feix estructural ha de ser precisament el format pels elements Γ-invariants de $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)})$.

- Construcció de $\mathscr{X}$:
  (1) construcció del quocient $\mathscr{Y} = \mathscr{P}(\Delta_{\Gamma_0})/\Gamma_0 = \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma_0$ per a un subgrup d'índex finit $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ adequat;
  (2) pas al quocient per Γ/Γ_0.

Construcció de $\mathscr{Y}$ (I)

- L'acció de Γ en $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0$ no fixa cap component. De fet, existeix un subgrup normal $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ d'índex finit tal que si E és una component de $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0$ i $\gamma \in \Gamma_0$, aleshores

$$\gamma E \cap E = \emptyset.$$

Construcció de $\mathscr{Y}$ (I)

- L'acció de Γ en $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0$ no fixa cap component. De fet, existeix un subgrup normal $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ d'índex finit tal que si E és una component de $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0$ i $\gamma \in \Gamma_0$, aleshores

$$\gamma E \cap E = \emptyset.$$

- En particular, Γ_0 actua discontínuament en $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0$ en la topologia Zariski: qualsevol $x \in \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0$ admet un entorn obert U tal que

$$\gamma U \cap U = \emptyset \text{ per a tot } \gamma \in \Gamma_0 \qquad (*)$$

$\rightsquigarrow$ El quocient $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma_0$ es pot obtenir "reenganxant".

Construcció de $\mathscr{Y}$ (II)

- Prenem un recobridor $\{\mathrm{Spf}(A_i)\}_{i\in I}$ de $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$ format per subesquemes oberts afins satisfent (*). Per a cada parell $i,j\in I$ existeix com a molt un $\gamma_{i,j}\in\Gamma_0$ tal que

$$\gamma_{i,j}(\mathrm{Spf}(A_i))\cap\mathrm{Spf}(A_j)\neq\emptyset. \qquad (**)$$

Si $i,j,k\in I$, aleshores:

$$\gamma_{i,i}=1,\quad \gamma_{j,i}=\gamma_{i,j}^{-1},\quad \gamma_{i,k}=\gamma_{j,k}\gamma_{i,j}.$$

Construcció de $\mathscr{Y}$ (II)

- Prenem un recobridor $\{\mathrm{Spf}(A_i)\}_{i\in I}$ de $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$ format per subesquemes oberts afins satisfent (*). Per a cada parell $i, j \in I$ existeix com a molt un $\gamma_{i,j} \in \Gamma_0$ tal que

$$\gamma_{i,j}(\mathrm{Spf}(A_i)) \cap \mathrm{Spf}(A_j) \neq \emptyset. \tag{**}$$

  Si $i, j, k \in I$, aleshores:

$$\gamma_{i,i} = 1, \quad \gamma_{j,i} = \gamma_{i,j}^{-1}, \quad \gamma_{i,k} = \gamma_{j,k}\gamma_{i,j}.$$

- Identificant $\mathrm{Spf}(A_i)$ i $\mathrm{Spf}(A_j)$ en les interseccions (**) via els automorfismes $[\gamma_{i,j}]$, s'obté un esquema formal $\mathscr{Y}$ i un morfisme exhaustiu $\pi_0 : \mathscr{P}(\Delta_\Gamma) \longrightarrow \mathscr{Y}$, que és localment un isomorfisme i verifica les condicions de l'enunciat per Γ_0 (i.e., $\mathscr{Y} = \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma_0$).

Construcció de $\mathscr{Y}$ (i III)

- $\mathscr{Y}_0$ té un nombre finit de components (Δ_Γ/Γ_0 és finit) i és propi sobre k, d'on resulta que $\mathscr{Y}$ és propi sobre S. I com $\mathscr{Y}$ és localment isomorf a $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$, és normal i pla.

Construcció de $\mathscr{Y}$ (i III)

- $\mathscr{Y}_0$ té un nombre finit de components (Δ_Γ/Γ_0 és finit) i és propi sobre k, d'on resulta que $\mathscr{Y}$ és propi sobre S. I com $\mathscr{Y}$ és localment isomorf a $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$, és normal i pla.
- Per a cada component E de $\mathscr{Y}_0$, prenem un punt x que no sigui a cap altra component, i un generador
$$\bar{d}_E \in \mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}_0} = \mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}}/\mathfrak{m}\mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}}$$
de l'ideal maximal de $\mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}_0}$. Si $d_E \in \mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}}$ és un aixecament qualsevol, $d_E = 0$ defineix un divisor relatiu de Cartier $D_E \subset \mathscr{Y}$ i
$$D = \sum_E D_E \subset \mathscr{Y}$$
és un divisor relativament ample en $\mathscr{Y}$ sobre S, d'on $\mathscr{Y}$ és projectiu.

Construcció de $\mathscr{Y}$ (i III)

- $\mathscr{Y}_0$ té un nombre finit de components (Δ_Γ/Γ_0 és finit) i és propi sobre k, d'on resulta que $\mathscr{Y}$ és propi sobre S. I com $\mathscr{Y}$ és localment isomorf a $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$, és normal i pla.
- Per a cada component E de $\mathscr{Y}_0$, prenem un punt x que no sigui a cap altra component, i un generador
$$\bar{d}_E \in \mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}_0} = \mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}}/\mathfrak{m}\mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}}$$
de l'ideal maximal de $\mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}_0}$. Si $d_E \in \mathcal{O}_{x,\mathscr{Y}}$ és un aixecament qualsevol, $d_E = 0$ defineix un divisor relatiu de Cartier $D_E \subset \mathscr{Y}$ i
$$D = \sum_E D_E \subset \mathscr{Y}$$
és un divisor relativament ample en $\mathscr{Y}$ sobre S, d'on $\mathscr{Y}$ és projectiu.
- Pel Teorema de Grothendieck, $\mathscr{Y}$ és algebraitzable: $\mathscr{Y} = \widehat{Y}$ per a un (únic) esquema projectiu Y sobre S.

Pas al quocient per Γ/Γ_0

- Per ser Y un esquema projectiu, qualsevol subconjunt finit està inclòs en un subesquema afí.
- En particular, com Γ/Γ_0 és finit, les òrbites de la seva acció en Y estan contingudes en subesquemes afins, i es pot definir el quocient $Y/(\Gamma/\Gamma_0)$ ('à la Mumford', *Abelian varieties*, Ch. I, §7).

Pas al quocient per Γ/Γ_0

- Per ser Y un esquema projectiu, qualsevol subconjunt finit està inclòs en un subesquema afí.
- En particular, com Γ/Γ_0 és finit, les òrbites de la seva acció en Y estan contingudes en subesquemes afins, i es pot definir el quocient $Y/(\Gamma/\Gamma_0)$ ('à la Mumford', *Abelian varieties*, Ch. I, §7).
- L'esquema $\mathscr{X}$ que volem és la completació formal de $Y/(\Gamma/\Gamma_0)$ al llarg de la seva fibra tancada.

$\square$

Pas al quocient per Γ/Γ_0

- Per ser Y un esquema projectiu, qualsevol subconjunt finit està inclòs en un subesquema afí.
- En particular, com Γ/Γ_0 és finit, les òrbites de la seva acció en Y estan contingudes en subesquemes afins, i es pot definir el quocient $Y/(\Gamma/\Gamma_0)$ ('à la Mumford', *Abelian varieties*, Ch. I, §7).
- L'esquema $\mathscr{X}$ que volem és la completació formal de $Y/(\Gamma/\Gamma_0)$ al llarg de la seva fibra tancada.

$\square$

Definició

Denotem per P_Γ l'esquema projectiu sobre S tal que $\widehat{P_\Gamma} = \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma$.

Corbes estables

Una corba estable sobre S és un esquema propi i pla C sobre S tal que les seves fibres geomètriques satisfan:

(i) són reduïdes, connexes i 1-dimensionals;

(ii) tenen per singularitats (com a molt) punts dobles ordinaris;

(iii) les seves components racionals no singulars (si en té) són tallades per les altres components en almenys 3 punts.

Corbes estables

Una corba estable sobre S és un esquema propi i pla C sobre S tal que les seves fibres geomètriques satisfan:

(i) són reduïdes, connexes i 1-dimensionals;

(ii) tenen per singularitats (com a molt) punts dobles ordinaris;

(iii) les seves components racionals no singulars (si en té) són tallades per les altres components en almenys 3 punts.

A més, es diu que C té reducció totalment degenerada split sobre k si les normalitzacions de totes les components de C_0 són isomorfes a $\mathbb{P}^1_k$ i tots els punts dobles són k-racionals. És a dir, C_0 s'obté intersecant un nombre finit de còpies de $\mathbb{P}^1_k$ en un nombre finit de punts dobles.

P_Γ és estable i té reducció tot. deg. split sobre k

Teorema

P_Γ és una corba estable sobre S amb fibra genèrica llisa sobre K i reducció totalment degenerada split sobre k. A més, Δ_Γ/Γ és el graf dual de $(P_\Gamma)_0$. És a dir, hi ha bijeccions

$$\{components\ de\ (P_\Gamma)_0\} \longrightarrow Ver(\Delta_\Gamma/\Gamma),\ E \longmapsto v_E,$$

$$\{punts\ dobles\ de\ (P_\Gamma)_0\} \longrightarrow Ed(\Delta_\Gamma/\Gamma),\ x \longmapsto e_x,$$

de manera que dues components E i E' es tallen en un punt doble x si, i només si, l'aresta e_x uneix v_E i $v_{E'}$.

Demostració

- Com que $(P_\Gamma)_0 = \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0/\Gamma$, és clar que les propietats de corba estable per a la fibra tancada se satisfan (tot vèrtex de Δ_Γ té almenys tres arestes incidents $\Rightarrow$ a Δ_Γ/Γ també).

Demostració

- Com que $(P_\Gamma)_0 = \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0/\Gamma$, és clar que les propietats de corba estable per a la fibra tancada se satisfan (tot vèrtex de Δ_Γ té almenys tres arestes incidents $\Rightarrow$ a Δ_Γ/Γ també).
- L'estabilitat es conserva per deformació $\Rightarrow$ P_Γ és estable.

Demostració

- Com que $(P_\Gamma)_0 = \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0/\Gamma$, és clar que les propietats de corba estable per a la fibra tancada se satisfan (tot vèrtex de Δ_Γ té almenys tres arestes incidents $\Rightarrow$ a Δ_Γ/Γ també).
- L'estabilitat es conserva per deformació $\Rightarrow$ P_Γ és estable.
- Com que $\widehat{P_\Gamma}$ és normal, P_Γ també ho és, i per tant $(P_\Gamma)_\eta$ és regular. Com que també és estable, és llisa sobre K.

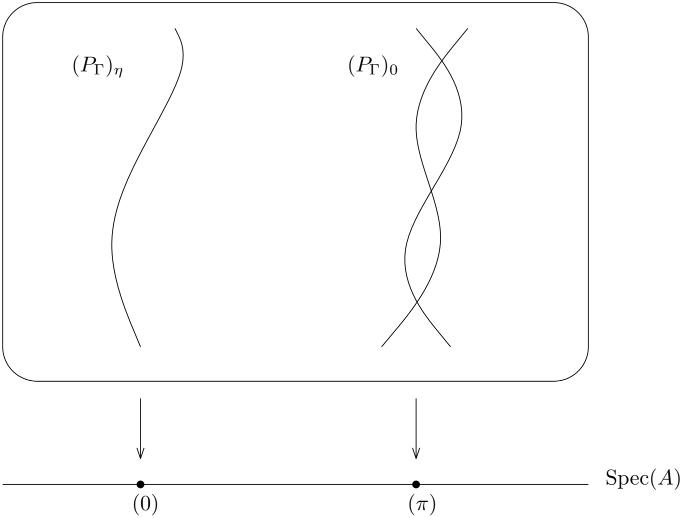
Demostració

- Com que $(P_\Gamma)_0 = \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0/\Gamma$, és clar que les propietats de corba estable per a la fibra tancada se satisfan (tot vèrtex de Δ_Γ té almenys tres arestes incidents $\Rightarrow$ a Δ_Γ/Γ també).
- L'estabilitat es conserva per deformació $\Rightarrow$ P_Γ és estable.
- Com que $\widehat{P_\Gamma}$ és normal, P_Γ també ho és, i per tant $(P_\Gamma)_\eta$ és regular. Com que també és estable, és llisa sobre K.

La interpretació de Δ_Γ/Γ com a graf dual de $(P_\Gamma)_0$ ve induïda per la dualitat entre Δ_Γ i $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)_0$.

$\square$

$\dim(A) = 1$, $\mathfrak{m} = (\pi)$. P_Γ és una *superfície aritmètica*:



El gènere de P_Γ

Recordem que el grup de Schottky Γ és lliure (Ihara). El rang de Γ, $\mathrm{rang}(\Gamma)$, es defineix com el nombre mínim de generadors de Γ.

El gènere de P_Γ

Recordem que el grup de Schottky Γ és lliure (Ihara). El rang de Γ, $\mathrm{rang}(\Gamma)$, es defineix com el nombre mínim de generadors de Γ.

Teorema

La corba estable P_Γ té gènere $g = \mathrm{rang}(\Gamma)$.

Demostració.

Δ_Γ contràctil i $\Delta_\Gamma \to \Delta_\Gamma/\Gamma$ étale $\Rightarrow \Gamma \simeq \pi_1(\Delta_\Gamma/\Gamma)$.
Com Δ_Γ/Γ és homotòpicament equivalent a un *bouquet* de n llaços, tenim $n = \mathrm{rang}(\Gamma)$. Però per la dualitat entre Δ_Γ/Γ i $(P_\Gamma)_0$, n també coincideix amb el gènere g de P_Γ. □

De punts de discontinuïtat estricta a punts K-racionals

Sigui $\Omega_\Gamma = \mathbb{P}^1(K) - \bar{\Sigma}_\Gamma = \mathbb{P}^1(K) - i(\partial\Delta_\Gamma)$ el conjunt de discontinuïtat estricta de Γ. Per a cada $z \in \Omega_\Gamma$ hi ha un únic subesquema formal

$$\widehat{\mathrm{cl}(z)} \subset \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$$

satisfent

$$\widehat{\mathrm{cl}(z)} \cap \mathscr{P}(T)' = \widehat{\mathrm{cl}_T(z)} \cap \mathscr{P}(T)' \text{ per a tot } T \subset \Delta_\Gamma \text{ finit.}$$

De punts de discontinuïtat estricta a punts K-racionals

Sigui $\Omega_\Gamma = \mathbb{P}^1(K) - \bar{\Sigma}_\Gamma = \mathbb{P}^1(K) - i(\partial\Delta_\Gamma)$ el conjunt de discontinuïtat estricta de Γ. Per a cada $z \in \Omega_\Gamma$ hi ha un únic subesquema formal

$$\widehat{\mathrm{cl}(z)} \subset \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$$

satisfent

$$\widehat{\mathrm{cl}(z)} \cap \mathscr{P}(T)' = \widehat{\mathrm{cl}_T(z)} \cap \mathscr{P}(T)' \text{ per a tot } T \subset \Delta_\Gamma \text{ finit.}$$

L'esquema $\widehat{\mathrm{cl}(z)}$ és completació formal d'un únic esquema $\mathrm{cl}(z)$ propi sobre S i birracional a S. Passant al quocient, obtenim un morfisme formal

$$\widehat{p_z} : \widehat{\mathrm{cl}(z)} \to \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma.$$

De punts de discontinuïtat estricta a punts K-racionals

Pel Teorema de Grothendieck $\widehat{p_z}$ prové d'un morfisme algebraic

$$p_z : \mathrm{cl}(z) \to P_\Gamma.$$

Definint $\pi(z)$ com la imatge del punt genèric per p_z, s'obté una aplicació

$$\pi : \Omega_\Gamma \longrightarrow P_\Gamma(K).$$

De punts de discontinuïtat estricta a punts K-racionals

Pel Teorema de Grothendieck $\widehat{p_z}$ prové d'un morfisme algebraic

$$p_z : \mathrm{cl}(z) \to P_\Gamma.$$

Definint $\pi(z)$ com la imatge del punt genèric per p_z, s'obté una aplicació

$$\pi : \Omega_\Gamma \longrightarrow P_\Gamma(K).$$

Proposició

Per a $z_1, z_2 \in \Omega_\Gamma$ qualssevol,

$$\pi(z_1) = \pi(z_2) \text{ si, i només si, } z_2 = \gamma(z_1) \text{ per algun } \gamma \in \Gamma.$$

Prova de la Proposició

Suposem $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ i sigui $Z = \sup(\mathrm{cl}(z_1), \mathrm{cl}(z_2))$, que és propi sobre S i birracional a S, amb Z_0 connex. Els dos morfismes

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{cl}(z_1) \arrow[dr, "p_{z_1}"] & \\ Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & P_\Gamma \\ & \mathrm{cl}(z_2) \arrow[ur, "p_{z_2}"'] & \end{tikzcd}$$

són iguals, per tant els morfismes formals

$$\begin{tikzcd} & \widehat{\mathrm{cl}(z_1)} \arrow[r, hook] & \mathscr{P}(\Delta_\Gamma) \\ \widehat{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \widehat{\mathrm{cl}(z_2)} \arrow[r, hook] & \mathscr{P}(\Delta_\Gamma) \end{tikzcd}$$

aixequen el mateix morfisme formal $\widehat{Z} \to \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma$.

Prova de la Proposició

Com Z_0 és connex i $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma) \to \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma$ étale, els dos morfismes anteriors difereixen per l'acció d'un $\gamma \in \Gamma$. Per a un subarbre finit $T \subset \Delta_\Gamma$ prou gran, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{cl}(z_1) \arrow[r, hook] & \mathbb{P}(T) \arrow[d, "{[\gamma]}"] \\ Z \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & \mathrm{cl}(z_2) \arrow[r, hook] & \mathbb{P}(\gamma(T)) \end{tikzcd}$$

commuta. Avaluant en el punt genèric, s'obté $\gamma(z_1) = z_2$.

$\square$

Exhaustivitat de π

Teorema

Si A és regular, aleshores π és exhaustiva.

Exhaustivitat de π

Teorema

Si A és regular, aleshores π és exhaustiva.

Sketch de la prova: sigui $z \in P_\Gamma(K)$ i $\mathrm{cl}(z)'$ la normalització de $\mathrm{cl}(z)$.

1) Per a qualsevol subgrup $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ d'índex finit, $P_{\Gamma_1} \to P_\Gamma$ és un recobridor étale finit, $P_{\Gamma_1}(K) \to P_\Gamma(K)$ és exhaustiva i $f : \mathrm{cl}(z)' \to P_\Gamma$ admet un aixecament

$$\begin{tikzcd} & P_{\Gamma_1} \arrow[d] \\ \mathrm{cl}(z)' \arrow[ur, dashed, "f_1"] \arrow[r, "f"] & P_\Gamma \end{tikzcd}$$

2) Passant a la completació formal, existeix un aixecament

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{P}(\Delta_\Gamma) \arrow[d] \\
 & \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma_1 \arrow[d] \\
\widehat{\mathrm{cl}(z)'} \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "f_1"] \arrow[uur, dashed, "\widehat{g}"] & \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma
\end{tikzcd}$$

2) Passant a la completació formal, existeix un aixecament

$$\begin{tikzcd}
& \mathscr{P}(\Delta_\Gamma) \arrow[d] \\
& \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma_1 \arrow[d] \\
\widehat{\mathrm{cl}(z)'} \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "f_1"] \arrow[uur, dashed, "\widehat{g}"] & \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)/\Gamma
\end{tikzcd}$$

3) $\widehat{g}(\mathrm{cl}(z)'_0)$ és propi sobre k, d'on se segueix que

$$\widehat{g}(\mathrm{cl}(z)'_0) \subset \mathscr{P}(T)' \subset \mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$$

per algun subarbre finit $T \subset \Delta_\Gamma$. Llavors $\widehat{g}$ prové d'un morfisme algebraic $g : \mathrm{cl}(z)' \longrightarrow \mathbb{P}(T)$, i la imatge per g del punt genèric és un punt $z' \in \mathbb{P}^1(K)$ que està a Ω_Γ i tal que $\pi(z') = z$.

Remarques en el cas $\dim(A) = 1$

Quan $\dim(A) = 1$, $\Delta^{(0)}$ també és el conjunt de vèrtexos d'un arbre Δ, l'arbre de Bruhat-Tits associat a $\mathrm{PGL}_2(K)$. Es pot reemplaçar l'arbre Δ_Γ per l'arbre Δ'_Γ que té per vèrtexos:

(i) els vèrtexos de Δ_Γ,

(ii) els vèrtexos de Δ entre dos vèrtexos de Δ_Γ.

Remarques en el cas $\dim(A) = 1$

Quan $\dim(A) = 1$, $\Delta^{(0)}$ també és el conjunt de vèrtexos d'un arbre Δ, l'arbre de Bruhat-Tits associat a $\mathrm{PGL}_2(K)$. Es pot reemplaçar l'arbre Δ_Γ per l'arbre Δ'_Γ que té per vèrtexos:

(i) els vèrtexos de Δ_Γ,

(ii) els vèrtexos de Δ entre dos vèrtexos de Δ_Γ.

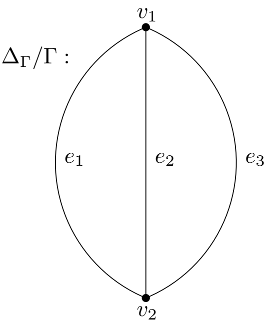
S'obté un subarbre $\Delta'_\Gamma \subset \Delta$, per tant $\mathscr{P}(\Delta'_\Gamma)$ és regular. De fet:

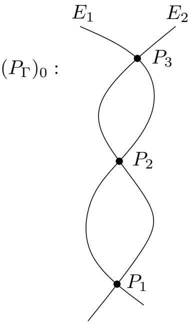
- $\mathscr{P}(\Delta'_\Gamma)$ és la resolució minimal de $\mathscr{P}(\Delta_\Gamma)$;
- Si $\widehat{P'_\Gamma} = \mathscr{P}(\Delta'_\Gamma)/\Gamma$, P'_Γ és regular i és la resolució minimal de P_Γ;
- P_Γ i P'_Γ coincideixen en la fibra genèrica, però ara P'_Γ és només *semi-estable*.
- P'_Γ és el *model minimal* de $(P_\Gamma)_\eta$ sobre A, i $(P'_\Gamma)_0$ té per graf dual Δ'_Γ/Γ.

Un diagrama-resum

$$
\begin{tikzcd}
\Omega_\Gamma \arrow[rr, two heads, "z\mapsto \mathrm{cl}(z)_0"] \arrow[dd, "\simeq"'] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & \{\text{pts. } k\text{-racionals n.s. de } \mathscr{P}(\Delta'_\Gamma)_0\} \arrow[dd, "\simeq"'] \arrow[dr, two heads] & \\
& P_\Gamma(K) \arrow[rr, two heads, "z\mapsto \mathrm{cl}(z)_0"] \arrow[dd, "\simeq"'] & & \{\text{pts. } k\text{-racionals n.s. de } (P'_\Gamma)_0\} \arrow[dd, "\simeq"'] \\
\partial\Delta - \partial\Delta'_\Gamma \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, two heads] & & \{\text{arestes de } \Delta - \Delta'_\Gamma \text{ tallant } \Delta'_\Gamma\} \arrow[dr, two heads] & \\
& \partial(\Delta/\Gamma) \arrow[rr, two heads] & & \{\text{arestes de } \Delta/\Gamma - \Delta'_\Gamma/\Gamma \text{ tallant } \Delta'_\Gamma/\Gamma\}
\end{tikzcd}
$$

Exemple 1

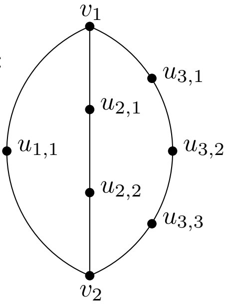




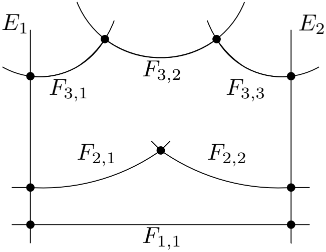
$$v_i \leftrightarrow E_i, \quad e_j \leftrightarrow P_j.$$

Exemple 1

Δ'_Γ/Γ :



$(P'_\Gamma)_0$:



$$v_i \leftrightarrow E_i, \quad u_{i,j} \leftrightarrow F_{i,j}.$$

Exemple 2: les corbes de Shimura

- $X_D/\mathbb{Q}$ corba de Shimura associada a un ordre maximal $\mathcal{O}_D \subseteq B_D$ en una àlgebra de quaternions de divisió racional i indefinida de discriminant D. $\mathcal{X}_D/\mathbb{Z}$ el model enter de Morita.

Exemple 2: les corbes de Shimura

- $X_D/\mathbb{Q}$ corba de Shimura associada a un ordre maximal $\mathcal{O}_D \subseteq B_D$ en una àlgebra de quaternions de divisió racional i indefinida de discriminant D. $\mathcal{X}_D/\mathbb{Z}$ el model enter de Morita.
- $B_{D/p}$ àlgebra de quaternions *definida*, $\mathcal{O}_{D/p} \subseteq B_{D/p}$ ordre maximal.
- $\Gamma_+ := \{\gamma \in (\mathcal{O}_{D/p} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p])^\times : \mathrm{ord}_p(\mathrm{n}(\gamma)) \in 2\mathbb{Z}\}/\mathbb{Z}[1/p]^\times$,

$$\Gamma_+ \hookrightarrow B_{D/p,p}^\times/\mathbb{Q}_p^\times \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p).$$

  Escollim $\omega_p \in (\mathcal{O}_{D/p} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p])^\times$ un element de norma p.

Exemple 2: les corbes de Shimura

- $X_D/\mathbb{Q}$ corba de Shimura associada a un ordre maximal $\mathcal{O}_D \subseteq B_D$ en una àlgebra de quaternions de divisió racional i indefinida de discriminant D. $\mathcal{X}_D/\mathbb{Z}$ el model enter de Morita.
- $B_{D/p}$ àlgebra de quaternions *definida*, $\mathcal{O}_{D/p} \subseteq B_{D/p}$ ordre maximal.
- $\Gamma_+ := \{\gamma \in (\mathcal{O}_{D/p} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p])^\times : \mathrm{ord}_p(\mathrm{n}(\gamma)) \in 2\mathbb{Z}\}/\mathbb{Z}[1/p]^\times$,
$$\Gamma_+ \hookrightarrow B_{D/p,p}^\times/\mathbb{Q}_p^\times \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p).$$
Escollim $\omega_p \in (\mathcal{O}_{D/p} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p])^\times$ un element de norma p.
- Existeix $\Gamma_+^0 \subseteq \Gamma_+$ normal, d'índex finit i lliure. En particular, Γ_+^0 és un subgrup de Schottky $\rightsquigarrow P_{\Gamma_+^0}$ l'esquema sobre $\mathbb{Z}_p$ associat.

Exemple 2: les corbes de Shimura

- $X_D/\mathbb{Q}$ corba de Shimura associada a un ordre maximal $\mathcal{O}_D \subseteq B_D$ en una àlgebra de quaternions de divisió racional i indefinida de discriminant D. $\mathcal{X}_D/\mathbb{Z}$ el model enter de Morita.
- $B_{D/p}$ àlgebra de quaternions *definida*, $\mathcal{O}_{D/p} \subseteq B_{D/p}$ ordre maximal.
- $\Gamma_+ := \{\gamma \in (\mathcal{O}_{D/p} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p])^\times : \mathrm{ord}_p(\mathrm{n}(\gamma)) \in 2\mathbb{Z}\}/\mathbb{Z}[1/p]^\times$,
$$\Gamma_+ \hookrightarrow B_{D/p,p}^\times/\mathbb{Q}_p^\times \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p).$$
Escollim $\omega_p \in (\mathcal{O}_{D/p} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p])^\times$ un element de norma p.
- Existeix $\Gamma_+^0 \subseteq \Gamma_+$ normal, d'índex finit i lliure. En particular, Γ_+^0 és un subgrup de Schottky $\rightsquigarrow P_{\Gamma_+^0}$ l'esquema sobre $\mathbb{Z}_p$ associat.
- Podem considerar $P_{\Gamma_+} := P_{\Gamma_+^0}/(\Gamma_+/\Gamma_+^0)$.

Exemple 2: les corbes de Shimura

Sigui $\mathbb{Z}_{p^2}$ l'anell d'enters de l'única extensió quadràtica no ramificada $\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p$.

Teorema (Čerednik-Drinfeld)

Sigui $\chi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{Z}_{p^2}/\mathbb{Z}_p), \mathrm{Aut}(P_{\Gamma_+} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^2}))$ *la classe de* $Fr \mapsto \omega_p \times id$. *Aleshores*

$$\mathcal{X}_D \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq (P_{\Gamma_+})^{\chi}.$$

Exemple 2: les corbes de Shimura

Sigui $\mathbb{Z}_{p^2}$ l'anell d'enters de l'única extensió quadràtica no ramificada $\mathbb{Q}_{p^2}/\mathbb{Q}_p$.

Teorema (Čerednik-Drinfeld)

Sigui $\chi \in \mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{Z}_{p^2}/\mathbb{Z}_p), \mathrm{Aut}(P_{\Gamma_+} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^2}))$ *la classe de* $Fr \mapsto \omega_p \times id$*. Aleshores*

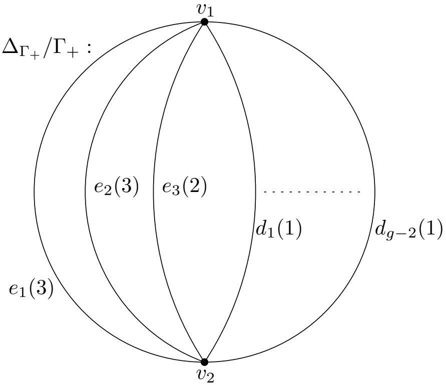
$$\mathcal{X}_D \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \simeq (P_{\Gamma_+})^{\chi}.$$

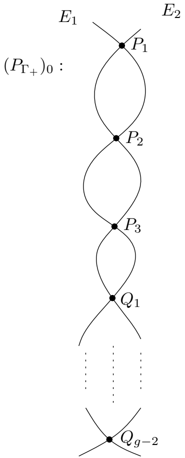
- $\rightsquigarrow$ $\mathcal{X}_D \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^2} \simeq P_{\Gamma_+} \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_{p^2}$.
- $\rightsquigarrow$ Podem estudiar punts $\mathbb{F}_p$-racionals (resp. $\mathbb{Q}_p$-racionals) de $(\mathcal{X}_D \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)_0$ (resp. $X_D \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$) via el graf $\Delta_{\Gamma_+}/\Gamma_+$.

  (Kurihara, Ogg, Jordan-Livné...)

Exemple 2: les corbes de Shimura

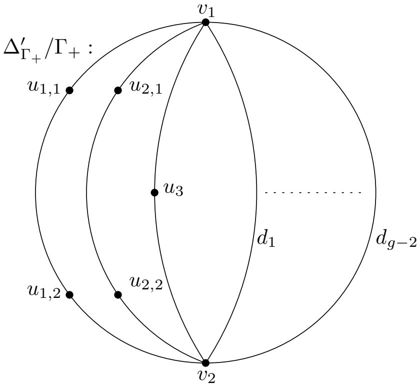
El cas de X_{2p}, $p \equiv 1 \mod 12$:

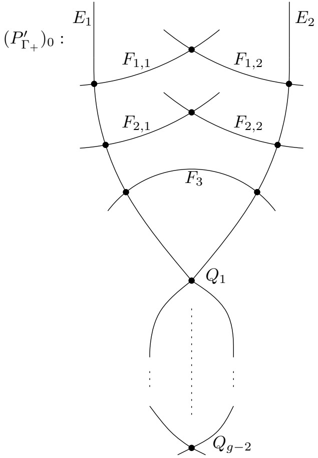




Exemple 2: les corbes de Shimura

Resolució minimal:





Corba de Mumford associada a un grup de Schottky

Carlos de Vera Piquero

Departament de Matemàtica Aplicada 2, UPC

27è STNB - Uniformització p-àdica de corbes de gènere ≥ 2
30 de gener de 2013