Grups de Schottky sobre $\mathbb{C}$ i uniformitzacions ∞-àdiques

Dionís Remón

Universitat de Barcelona

30 de gener de 2013

Mumford: *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*

Per què?

Mumford: *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*

Per què?

(pàg. 130-131) ... si $\Gamma \subseteq \mathbf{PGL}(2, \mathbb{C})$ és un grup discret el qual actua discontínuament i al menys un punt de $\mathbb{CP}^1$ (un grup Kleinià) i el qual a més, és lliure amb n generadors i no té elements unipotents, aleshores d'acord un teorema de Maskit, Γ s'anomena grup de Schottky, i.e., si $\Omega =$ el conjunt de punts on Γ actua discontínuament, aleshores Ω és connex i llevat homeomorfismes aconseguim la uniformització

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{H}^3 \cup \Omega_\Gamma) & \to & (\mathcal{H}^3 \cup \Omega_\Gamma)/\Gamma & \simeq & \text{torus sòlid amb } n \text{ anses} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \Omega_\Gamma & \xrightarrow{\pi} & \Omega_\Gamma/\Gamma & \simeq & \{\text{vora, una superfície de gènere } n\} \end{array}$$

Mumford: *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*

En particular Ω_Γ/Γ és una superfície de Riemann de gènere n i per a una base adequada $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ de $\pi_1(\Omega/\Gamma)$, π és el recobriment parcial del subgrup

$$N \subseteq \pi_1(\Omega_\Gamma/\Gamma)$$
$$N = \text{mínim subgrup normal contenint } a_1, \ldots, a_n$$

La uniformització π és el que s'anomena en la literatura clàssica la uniformització de Schottky.

Mumford: *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings*

En particular Ω_Γ/Γ és una superfície de Riemann de gènere n i per a una base adequada $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ de $\pi_1(\Omega/\Gamma)$, π és el recobriment parcial del subgrup

$$\begin{aligned} N &\subseteq \pi_1(\Omega_\Gamma/\Gamma) \\ N &= \text{mínim subgrup normal contenint } a_1, \dots, a_n \end{aligned}$$

La uniformització π és el que s'anomena en la literatura clàssica la uniformització de Schottky. **És la que té un anàlog a p-àdic.**

p-adic case!

Schottky p-àdic

Sigui Γ un grup de Schottky lliure generat per g elements. Sigui

$$\Omega = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p} \setminus \bar{\Sigma},$$

amb $\bar{\Sigma}$ el conjunt de punts límits of Γ. Aleshores Ω/Γ és una corba algebraica de gènere g (corba de Mumford).

p-adic case!

Schottky p-àdic

Sigui Γ un grup de Schottky lliure generat per g elements. Sigui

$$\Omega = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p} \setminus \bar{\Sigma},$$

amb $\bar{\Sigma}$ el conjunt de punts límits of Γ. Aleshores Ω/Γ és una corba algebraica de gènere g (corba de Mumford).

Cita literal:

“Then I claim that there is a curve C of genus n and a holomorphic isomorphism:

$$\pi : \Omega/\Gamma \to C.''$$

Transformacions de Möbius

Transformacions de Möbius

Definition

Una transformació de Möbius és una funció $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$T(z) := \frac{az+b}{cz+d},$$

amb

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Transformacions de Möbius

Definition

Una transformació de Möbius és una funció $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forma

$$T(z) := \frac{az+b}{cz+d},$$

amb

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Definition

Les transformacions de Möbius juntament amb $J(z) = \overline{z}$, són les transformacions *esteses* de Möbius.

$\mathbf{PSL}(2,\mathbb{C})$

Recordem la classificació dels elements del grup $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Classificació

Sigui $g \in \mathbf{PSL}(2,\mathbb{C})$, diferent de la identitat aleshores

- si $\operatorname{tr} g \in (-2,2)$ aleshores g és parabòlic.
- si $\operatorname{tr} g = \pm 2$ aleshores g és el·líptic.
- si $\operatorname{tr} g \in \mathbb{C} \setminus [-2,2]$ aleshores g és loxodròmic.

Mètrica hiperbòlica

Cas real:

Mètrica hiperbòlica

Cas real:

En el grup $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{R})$ actua isomètricament, és a dir actua via isometries, i transitivament en el semiplà $\mathcal{H}$ i la vora es pot identificar amb $\mathbb{CP}^1$, és a dir l'eix real $\mathbb{R}$ i més ∞. Aquest semiplà el dotem de la mesura

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2),$$

i les aplicacions de la forma

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}.$$

Cas complex:

En el grup $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{C})$ actua isomètricament i transitivament sobre el semiespai $\mathcal{H}^3 := \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$ i la vora la podem identificar amb $\mathbb{CP}^1$. Aquest espai el podem de la mètrica

$$ds^2 = \frac{1}{t^2}(|dz|^2 + dt^2),$$

i les accions transitives de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$ venen donades per:

$$(z,t) \to \left(\frac{(\overline{cz+d})(az+b) + a\bar{c}t^2}{|cz+d|^2 + |c|^2 t^2}, \frac{t}{|cz+d|^2 + |c|^2 t^2} \right),$$

amb $z \in \mathcal{C}$ i $t \in \mathbb{R}^+$.

Esfera de Riemann, $\mathbb{CP}^1$

L'esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1$ és la varietat complexa de dimensió complexa 1 obtinguda per la compactificació del pla complex $\mathbb{C}$, això és $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Esfera de Riemann, $\mathbb{CP}^1$

L'esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1$ és la varietat complexa de dimensió complexa 1 obtinguda per la compactificació del pla complex $\mathbb{C}$, això és $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Mètrica per a l'esfera

El conjunt

$$B^3 = \{(u, v, w \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 < 1\},$$

te la mètrica

$$ds = \frac{2(du^2 + dv^2 + dw^2)}{1 - (u^2 + v^2 + w^2)}.$$

Definition

Un grup fuchsià és un subgrup discret de **PSL**$(2, \mathbb{R})$.

Definition

Un grup fuchsià és un subgrup discret de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Definition

Un grup kleinià és un subgrup discret de $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Grups discontinuus

Donat un subgrup de $G \subseteq \overline{M}$ tenim les definicions següents:

- Un punt $p \in \mathbb{CP}^1$ és un punt de discontinuïtat de G si, l'*estabilitzador*, G_p, és finit i per a tot U tal que $p \in U$ i $g(U) \cap U = \emptyset$ per a tot $g \in G \setminus G_p$.
- Un punt que no és de discontinutat de G s'anomena un punt límit de G.
- El conjunt de punts de disconituitat de G s'anomena la regió de discontinuïtat de G, Ω_G.
- El conjunt de punts límit de G s'anomena el conjunt límit de G, $\bar{\Sigma}$.

Propietats

grups Kleinians

Un grup G que actua discontinuament en algun punt de l'esfera de Riemann s'anomena grup kleinià planar, és a dir, si el grup G compleix $\Omega_G \neq \emptyset$.

Propietats

grups Kleinians

Un grup G que actua discontinuament en algun punt de l'esfera de Riemann s'anomena grup kleinià planar, és a dir, si el grup G compleix $\Omega_G \neq \emptyset$.

Propietats

- Ω_G és un obert i $\bar{G}$ és un compacte.
- $\Omega_G \cap \bar{\Sigma} = \emptyset$.
- $\Omega_G \cup \bar{\Sigma} = \mathbb{CP}^1$.

Propietats

grups Kleinians

Un grup G que actua discontinuament en algun punt de l'esfera de Riemann s'anomena grup kleinià planar, és a dir, si el grup G compleix $\Omega_G \neq \emptyset$.

Propietats

- Ω_G és un obert i $\bar{G}$ és un compacte.
- $\Omega_G \cap \bar{\Sigma} = \emptyset$.
- $\Omega_G \cup \bar{\Sigma} = \mathbb{CP}^1$.
- Per a tot $g \in G$ es té que $g(\Omega_G) = \Omega_G$ i $g(\bar{\Sigma}) = \bar{\Sigma}$.
- Si G és subgrup Kleininà planar de M, $p \in \Omega$, aleshores G_p és cíclic finit.

Propietats de $\bar{\Sigma}$

Sigui G un grup kleinià planar. Aleshores les possibilitats per a $\bar{\Sigma}$ són:

- $\emptyset$
- un punt
- dos punts
- infinits punts.

Propietats de $\bar{\Sigma}$

Sigui G un grup kleinià planar. Aleshores les possibilitats per a $\bar{\Sigma}$ són:

- $\emptyset$
- un punt
- dos punts
- infinits punts.

Respecte els grups kleinians i la mètrica, es poden generalitzar les coses que sabem del cas fuchsià. Geodèsiques, esferes d'isometria,...

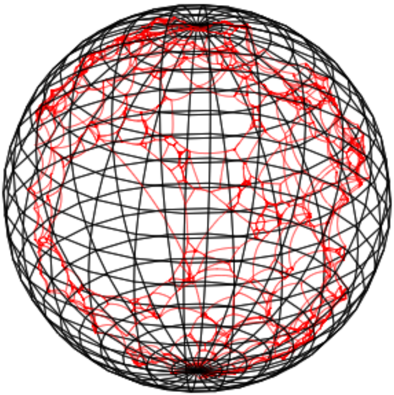
Dominis fonamentals per a grups Kleinians

Sigui G un grup kleinià planar (és a dir, $\Omega_G \neq \emptyset$). Un subconjunt obert $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}^3$ (o bé sobre $\mathbb{CP}^1$, amb les modificacions pertinents) s'anomena domini fonamental per a G si:

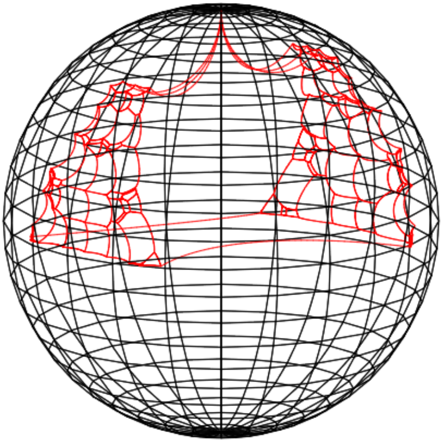
Dominis fonamentals

- $\bigcup_{g \in G} g(\bar{\mathcal{F}}) = \mathcal{H}^3$
- per a tot $g \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$, aleshores $\mathcal{F} \cap g(\mathcal{F}) = \emptyset$.
- $\mathrm{Vol}(\partial \mathcal{F}) = 0$.

Dominis fonamentals per a grups Kleinians



Dominis fonamentals per a grups Kleinians



Classificació de punts fixes de Ω

Si G grup kleinià, $G^+ = G \cap M$. Aleshores $G^+ \lhd G$ és subgrup d'índex 2.

Tipus 1

$G_p = \{\mathrm{Id}\}$.

Tipus 2

$G_p \neq \{\mathrm{Id}\}$. Aleshores tenim dos casos més:

- $G_p^+ = \{\mathrm{Id}\}$. En aquest cas, el grup esta generat per una transformació del grup $\tau \in \overline{M} \setminus M$, necessariament una reflexió. Per tant hi ha un arc de punts fixes.
- $G_p^+ \neq \{\mathrm{Id}\}$. Ha de ser un grup cíclic suposem $(p = 0)$ generat per $E(z) = e^{2\pi i/m} z$. Per tant queda

$$G_p = \langle E, \tau \ : \ E^m = \tau^2 = 1, \tau E \tau = E^{-1} \rangle$$

Tipus de grups kleinians

Grups fuchsians

Deixen invariants el disc euclidià. El conjunt límit $\bar{\Sigma}$ esta contingut en la vora d'aquest. Si tot cercle de la vora és el límit són els grups cíclics de primera espècie. En cas contrari, de segona especie.

Grups de Bianchi

Sigui $K \subseteq \mathbb{C}$ un cos quadràtic imaginari i $\mathcal{O}_K$ és l'anell d'enters del cos K. Aleshores el grup $\mathbf{PSL}(2, \mathcal{O}_K)$ és un grup kleinià.

B-Grups

Grups que tenen una component invariant.

Grups de Schottky

....

Theorem

Sigui G un grup kleinià planar M. Llavors Ω_G/G té de manera natural una estructura de superfície de Riemann.

Theorem

Sigui G un grup kleinià planar M. Llavors Ω_G/G té de manera natural una estructura de superfície de Riemann.

Estudiarem aquest cas, en el cas que G sigui un grup de Schottky.

Friederich Schottky (1851-1935)

Friederich Schottky (1851-1935)

Figura: Friederich Schottky

Definition

Per a $g \geq 1$, prenem $C_k, C'_k, k = 1, ..., g$, $2g$ corves de Jordan sobre l'esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tal que són disjuntes dos a dos i lligat a un domini $2g$-cònnex que direm $\mathcal{D}$. Suposem que per a cada k existeix una transformación lineal γ_k amb les propietats:

- $\gamma_k(C_k) = C'_k$.

Definition

Per a $g \geq 1$, prenem $C_k, C'_k, k = 1, \ldots, g$, $2g$ corves de Jordan sobre l'esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tal que són disjuntes dos a dos i lligat a un domini $2g$-cònnex que direm $\mathcal{D}$. Suposem que per a cada k existeix una transformación lineal γ_k amb les propietats:

- $\gamma_k(C_k) = C'_k$.
- γ_k apliquen l'exterior de C_k a l'interior C'_k.

Definition

Per a $g \geq 1$, prenem $C_k, C'_k, k = 1, ..., g$, $2g$ corves de Jordan sobre l'esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tal que són disjuntes dos a dos i lligat a un domini $2g$-cònnex que direm $\mathcal{D}$. Suposem que per a cada k existeix una transformación lineal γ_k amb les propietats:

- $\gamma_k(C_k) = C'_k$.
- γ_k apliquen l'exterior de C_k a l'interior C'_k.

Les transformacions $\{\gamma_i : i = 1, ..., g\}$ generen un subgrup Γ de les transformacions de Möbius, necessàriament kleinians planars. Aquest grup s'anomena un *grup de Schottky de gènere g*.

Caracteritzacions del grups de Schottky. Maskit

Teorema

Sigui Γ un grup Kleinià. Aleshores Γ un grup de Schottky si i només si Γ és purament loxodròmic, finitament generat i lliure.

Teorema

Tot grup kleinià planar lliure és un grup Schottky.

Clàssics

Un grup de Schottky s'anomena clàssic si totes les corves de Jordan disjuntes corresponents al conjunt de cercles.

Marden va probar que no tenien que ser cercles necessàriament. Yamamoto va construir-ne un.

Clàssics

Un grup de Schottky s'anomena clàssic si totes les corves de Jordan disjuntes corresponents al conjunt de cercles.

Marden va probar que no tenien que ser cercles necessàriament. Yamamoto va construir-ne un.

Fuchsians

Un grup de Schottky s'anomena fuchsià si és de Schottky i fuchsià a l'hora.

Propietat

Tots els grups fuchsian de tipus Schottky són grups de Schottky clàssics.

Grups marcats de Schottky

def.

Sigui Γ un grup marcat de Schottky i $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ un conjunt de generadors del grup, direm que $\Gamma = \langle\gamma_1, \ldots, \gamma_g\rangle$ es un grup marcat de Schottky i, el conjunt de transformacions $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ és la marca del grup Γ.

Grups marcats de Schottky

def.

Sigui Γ un grup marcat de Schottky i $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ un conjunt de generadors del grup, direm que $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$ es un grup marcat de Schottky i, el conjunt de transformacions $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ és la marca del grup Γ.

Direm que dos grups de Schottky marcats són equivalents si existeix $\beta \in M$ tal que $\beta\gamma_i\beta^{-1}$ per a $i \in \{1, \ldots, g\}$.

Grups marcats de Schottky

def.

Sigui Γ un grup marcat de Schottky i $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ un conjunt de generadors del grup, direm que $\Gamma = \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$ es un grup marcat de Schottky i, el conjunt de transformacions $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ és la marca del grup Γ.

Direm que dos grups de Schottky marcats són equivalents si existeix $\beta \in M$ tal que $\beta \gamma_i \beta^{-1}$ per a $i \in \{1, \ldots, g\}$.

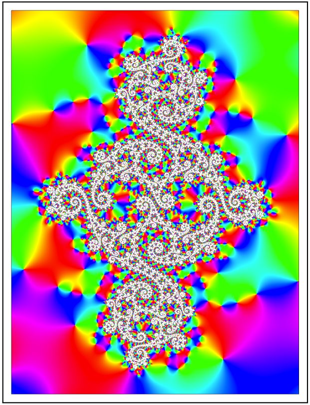
espai de Schottky

L'espai generat per aquests grups és de dimensió $3g - 3$. El seu recobriment universal pot ser identificat amb l'espai de Teichmüller de superficies de Riemann compactes de gènere g.

Conjunt limit

Limit Set

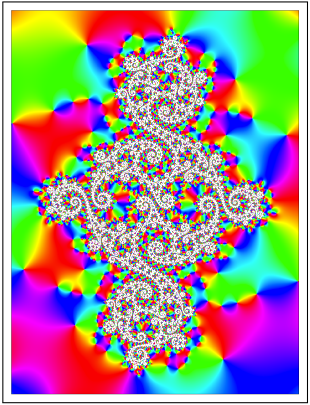
- El conjunt $\bar{\Sigma} \subseteq \mathbb{CP}^1$.



Conjunt limit

Limit Set

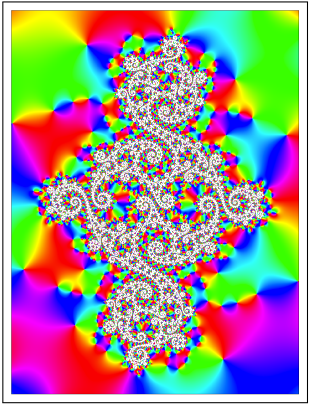
- El conjunt $\bar{\Sigma} \subseteq \mathbb{CP}^1$.
- Aquest conjunt pot ser descrit com el conjunt d'elements atractius i repulsors dels elements loxodròmics.



Conjunt limit

Limit Set

- El conjunt $\bar{\Sigma} \subseteq \mathbb{CP}^1$.
- Aquest conjunt pot ser descrit com el conjunt d'elements atractius i repulsors dels elements loxodròmics.
- Per a *gen* $= 1$ té dimensió de Hausdorff $0 \leq \delta = \dim_H(\bar{\Sigma}) < 2$.



... igual que abans!

Sigui Γ un grup de Schottky de gènere g, aleshores Ω_G/Γ és una superfície de Riemann tancada de gènere g.

En aquest cas, si $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ formen un conjunt de generadors lliures de G i l'esfera amb $2g$ forats és un domini fonamental per a aquest generadors amb les corbes C_k, C'_k, aleshores aquests cercles projecten a un conjunt de g cercles simples homològicament independents disjunts sobre S.

En el cas dels grups de Schottky tenim que el recíproc també es cert.

En el cas dels grups de Schottky tenim que el recíproc també es cert.

Teorema de retrosecció de Koebe

Sigui S una superfície de Riemann tancada de gènere $g \geq 1$. Aleshores existeix un grup de Schottky Γ de gènere g tal que $\Omega_\Gamma \setminus \Gamma$ pot ser representada per Ω_Γ/Γ on Ω_Γ és la corresponent regió de discontinuïtat.

En el cas dels grups de Schottky tenim que el recíproc també es cert.

Teorema de retrosecció de Koebe

Sigui S una superfície de Riemann tancada de gènere $g \geq 1$. Aleshores existeix un grup de Schottky Γ de gènere g tal que $\Omega_\Gamma \setminus \Gamma$ pot ser representada per Ω_Γ/Γ on Ω_Γ és la corresponent regió de discontinuïtat.

Klein (1883) amb errors i Koebe.

Idea de la prova del teorema de retrosecció

Sigui S la superfície de Riemann en qüestió ...

- Considerem $\alpha_1, ... \alpha_g$ de corbes tancades simples homològicament independents, és a dir $S \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$ és una esfera amb $2g$ costats.

Idea de la prova del teorema de retrosecció

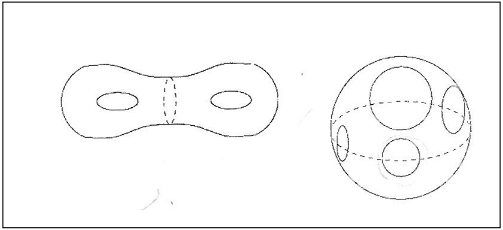
Sigui S la superfície de Riemann en qüestió ...

- Considerem $\alpha_1, ...\alpha_g$ de corbes tancades simples homològicament independents, és a dir $S \setminus \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$ és una esfera amb $2g$ costats.

Idea de la prova del teorema de retrosecció

Sigui S la superfície de Riemann en qüestió ...

- Considerem $\alpha_1, \ldots \alpha_g$ de corbes tancades simples homològicament independents, és a dir $S \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_g\}$ és una esfera amb $2g$ costats.



Uniformització

- Tenim que

$$\pi_1(S) = \langle a_1, ...a_g, b_1, ..., b_g \ : \ \prod_{j=1} [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

amb $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Uniformització

- Tenim que

$$\pi_1(S) = \langle a_1, ...a_g, b_1, ..., b_g \ : \prod_{j=1} [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

amb $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

- Considerem el subgrup normal més petit que contingui $b_1, ..., b_g$ i li direm N.

Uniformització

- Tenim que

$$\pi_1(S) = \langle a_1, ...a_g, b_1, ..., b_g \; : \; \prod_{j=1} [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

  amb $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

- Considerem el subgrup normal més petit que contingui $b_1, ..., b_g$ i li direm N.
- Aleshores N uniformitza la regió de discontinuïtat d'un grup de Schottky (Teorema de planaritat de Maskit) de gènere g.

Uniformització

- Tenim que

$$\pi_1(S) = \langle a_1, ...a_g, b_1, ..., b_g \ : \ \prod_{j=1} [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

amb $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

- Considerem el subgrup normal més petit que contingui $b_1, ..., b_g$ i li direm N.
- Aleshores N uniformitza la regió de discontinuïtat d'un grup de Schottky (Teorema de planaritat de Maskit) de gènere g.
- Aleshores $\pi_1(S)/N$ és un grup de Schottky que uniformitza la superfície S.

Uniformització

- Tenim que

$$\pi_1(S) = \langle a_1, ...a_g, b_1, ..., b_g \ : \ \prod_{j=1} [a_j, b_j] = 1 \rangle$$

  amb $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.
- Considerem el subgrup normal més petit que contingui $b_1, ..., b_g$ i li direm N.
- Aleshores N uniformitza la regió de discontinuïtat d'un grup de Schottky (Teorema de planaritat de Maskit) de gènere g.
- Aleshores $\pi_1(S)/N$ és un grup de Schottky que uniformitza la superfície S.

Hi ha altres proves emprant idees sobre aplicacions quasiconformes.

...

Sigui S una superfície de Riemann de genere $g \geq 1$. Direm que la terna $(\Omega_\Gamma, \Gamma, \pi : \Omega_\Gamma \to S)$

Considerem una transformació loxodròmica $T(z) = \lambda z$, amb $\lambda \in \mathbb{C}^*$ i $|\lambda| \neq 1$.

...

Sigui S una superfície de Riemann de genere $g \geq 1$. Direm que la terna $(\Omega_\Gamma, \Gamma, \pi : \Omega_\Gamma \to S)$

Considerem una transformació loxodròmica $T(z) = \lambda z$, amb $\lambda \in \mathbb{C}^*$ i $|\lambda| \neq 1$.Aleshores el grup cíclic $\Gamma_\lambda = \langle T \rangle$ és un grup de Schottky de gènere 1.

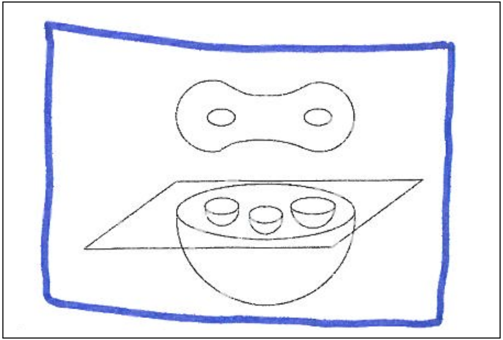
...

Sigui S una superfície de Riemann de genere $g \geq 1$. Direm que la terna $(\Omega_\Gamma, \Gamma, \pi : \Omega_\Gamma \to S)$

Considerem una transformació loxodròmica $T(z) = \lambda z$, amb $\lambda \in \mathbb{C}^*$ i $|\lambda| \neq 1$.Aleshores el grup cíclic $\Gamma_\lambda = \langle T \rangle$ és un grup de Schottky de gènere 1. Per tant $\pi_1(X) = \mathbb{Z}^2$ actua en el pla $\mathbb{C}$. Per tant $X = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)$.

L'acció d'un grup de Schottky de gènere g Γ en l'esfera de Riemann es pot estendre a $\mathcal{H}^3$. Per a grups de Schottky clàssics, un domini fonamental en $\mathcal{H}^3$ és donat per la regio externa a $2g$ semiesferes sobre els circles $C_k \subseteq \mathbb{CP}^1$.

Tor de gènere g



Uniformització de Schottky

Prop.

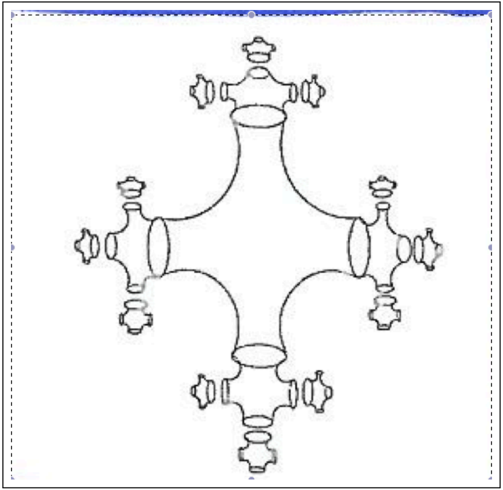
El quocient

$$\mathcal{X}_\Gamma := \mathcal{H}^3/\Gamma$$

és topològicament un cos amb anses de gènere g que omple la superfície de Riemann

$$X(\mathbb{C}) := \Omega_\Gamma/\Gamma$$

Cos amb anses de gènere g



Mètricament, $\mathcal{X}_\Gamma$ és una varietat de dimensió 3 real hiperbòlica que té $X(\mathbb{C})$ com la seva vora conforme a l'infinit $X(\mathbb{C}) = \partial\mathcal{X}_\Gamma$.

Definició de grup de Schottky

La definició "clàssica" de grups de Schottky complexos es la mateixa que per al cas p-àdic.

Definició

Si Γ és un grup de Schottky, aleshores existeixen $B_1, \ldots B_g, C_1, \ldots, C_g$ entorns circulars oberts i un conjunt de generadors $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ per a Γ tal que

$$\gamma_i(\mathbb{P} \setminus B_i) = \overline{C_i}, \quad \gamma(\mathbb{P} \setminus \overline{B_i}) = C_i.$$

Superficies de gènere g

Most Important!

En ambdós casos considerant el conjunt límits de Γ es té el següent

$$\Omega/\Gamma$$

és una varietat (d'algun tipus) de genere g.

Superficies de gènere g

Most Important!

En ambdós casos considerant el conjunt límits de Γ es té el següent

$$\Omega/\Gamma$$

és una varietat (d'algun tipus) de genere g. En el cas complex tenim que és una superfície de Riemann compacta de gènere g. En el cas p-àdic és una corba algebraica llisa de gènere g.