Transcendència de valors de la funció exponencial

STNB 2011

$$2011 = 157+163+167+173+179+181+191+193+197+199+211$$

Burger, Edward B.; Tubbs, Robert: *Making transcendence transparent. An intuitive approach to classical transcendental number theory.* Springer-Verlag, New York, 2004.

Transcendència de e

Teorema (Hermite, 1873). *El nombre e és transcendent.*

Demostració. Suposem que e és algebraic. Aleshores existeixen enters $r_0, r_1, \ldots, r_d$ tals que

$$r_0 + r_1 e + \cdots + r_d e^d = 0,$$

amb $r_d \neq 0, r_0 \neq 0$. La idea és construir un polinomi $P_p(z)$ tal que $P_p(t)$ sigui una bona aproximació racional de e^t, $t = 1, 2, \ldots, d$. Considerem

$$f(z) = z^{p-1}(z-1)^p(z-2)^p \ldots (z-d)^p$$

i posem $f(z) = \sum_{n=p-1}^{(d+1)p-1} c_n z^n$. Tenim

$$\sum_{n=1}^{p-1} f^{(n)}(t) = 0, \text{ per a } t = 1, 2, \ldots, d,$$

i

$$\sum_{N=1}^{p-1} f^{(n)}(z) = \sum_{n=p-1}^{(d+1)p-1} \left(N! c_N \sum_{n=N-p+1}^{N-1} \frac{z^n}{n!} \right). \tag{1}$$

Tenint en compte (1), posem

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} N! c_N e^z \;=\; & \textstyle\sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} \left(N! c_N \sum_{n=0}^{N-p} \frac{z^n}{n!} \right) \\ & + \textstyle\sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} \left(N! c_N \sum_{n=N-p+1}^{N-1} \frac{z^n}{n!} \right) \\ & + \textstyle\sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} \left(N! c_N \sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right).\end{aligned}$$

Per a $t = 1, 2, \ldots, d$, el sumatori del mig s'anul·la i per tant tenim

$$e^t \sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} N! c_N \qquad =$$

$$\underbrace{\sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} \left(N! c_N \sum_{n=0}^{N-p} \frac{t^n}{n!} \right)}_{\substack{\| \\ P_p(t)}} + \underbrace{\sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} \left(N! c_N \sum_{n=N}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right)}_{\substack{\| \\ T_p(t)}}$$

Posant $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = t^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(n+N)!}$ i tenint en compte $\frac{N!}{(n+N)!} \leq \frac{1}{n!}$, podem afitar la "cua".

$$|T_p(t)| \leq e^t t^{(d+1)p-1} \sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} |c_N|. \tag{2}$$

Volem ara afitar c_n. Tenim

$$(z-t)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} (-t)^{p-n} z^n,$$

$$\max_{n=0,1,\ldots,p} \left\{ \left| \binom{p}{n} (-t)^{p-n} \right| \right\} \leq t^p \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} = (2t)^p.$$

Com $z^{p-1}(z-1)^p(z-2)^p \ldots (z-d)^p = \sum_{n=p-1}^{(d+1)p-1} c_n z^n$,

$$|c_n| \leq \prod_{t=1}^{d} (2t)^p \leq (2d)^{dp}.$$

Substituint aquesta acotació a (2), obtenim

$$|T_p(t)| \leq e^t t^{(d+1)p-1} (dp+1)(2d)^{dp} \leq e^t t^{(d+1)p-1} d^p (2d)^{dp},$$

que, per a $1 \leq t \leq d$, implica

$$|T_p(t)| \leq e^d d^{(d+2)p-1}(2d)^{dp} = K_1(K_2)^p$$

on $K_1 = e^d/d$, $K_2 = d^2(2d^2)^d$ són constants.

Multiplicant la igualtat $\sum_{t=0}^{d} r_t e^t = 0$ per $P_p(0) = \sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} N! c_N$ i tenint en compte

$$e^t \sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} N! c_N = P_p(t) + T_p(t),$$

per a $t = 1, 2, \ldots, d$, obtenim

$$\begin{aligned} r_0 P_p(0) + r_1 P_p(1) + r_2 P_p(2) + \cdots + r_d P_p(d) \\ = -r_1 T_p(1) - r_2 T_p(2) - \cdots - r_d T_p(d). \end{aligned}$$

Dividint aquesta igualtat per $(p-1)!$ i aplicant l'acotació de $T_p(t)$, obtenim

$$\left|\frac{r_0}{(p-1)!}P_p(0)+\textstyle\sum_{t=1}^{d}\frac{r_t}{(p-1)!}P_p(t)\right|$$

$$=\left|\textstyle\sum_{t=1}^{d}\frac{r_t}{(p-1)!}T_p(t)\right|\leq K_1\left(\textstyle\sum_{t=1}^{d}|r_t|\right)\frac{(K_2)^p}{(p-1)!}.$$

Per a p suficientment gran, tenim doncs

$$\left|\frac{r_0}{(p-1)!}P_p(0)+\sum_{t=1}^{d}\frac{r_t}{(p-1)!}P_p(t)\right|<1.$$

Queda veure que és un enter no nul.
Com

$$P_p(t)=\sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1}\left(N!c_N\sum_{n=0}^{N-p}\frac{t^n}{n!}\right),$$

$\dfrac{N!}{(p-1)!(N-p)!} = p\,\dfrac{N!}{p!(N-p)!}$, per a $N \geq p$, i el sumand de $P_p(t)$ per a $N = p-1$ és nul, obtenim que $\dfrac{P_p(t)}{(p-1)!}$ és enter i múltiple de p. Ara

$$\begin{aligned}
\frac{r_0}{(p-1)!}P_p(0) &= \frac{r_0}{(p-1)!}\textstyle\sum_{N=p-1}^{(d+1)p-1} N!c_N \\
&= \frac{r_0}{(p-1)!}\left((p-1)!c_{p-1} + p!c_p + \dots\right) \\
&\equiv r_0 c_{p-1} \pmod p
\end{aligned}$$

Com c_{p-1} és el valor en $z=0$ de $(z-1)^p \dots (z-d)^p$, és $c_{p-1} = (-1)^d d! \neq 0$; i per a p suficientment gran, $\dfrac{r_0}{(p-1)!}P_p(0) \not\equiv 0 \pmod p$.

Per tant hem obtingut un enter estríctament comprès entre 0 i 1.$\square$

El teorema d'Hermite-Lindemann. Transcendència de $e^{\sqrt{2}}$ i transcendència de π

Teorema (Hermite-Lindemann, 1882) *El nombre* e^{α} *és transcendent per a tot nombre algebraic* α *no nul.*

Corol·lari 1. *El nombre* π *és transcendent.*

Demostració. π algebraic $\Rightarrow$ $i\pi$ algebraic $\Rightarrow$ $e^{i\pi}$ transcendent. Però $e^{i\pi} = -1$, contradicció.

Corol·lari 2. *Si* α *és un nombre real algebraic, diferent de* 0 *i* 1*, aleshores* $\log \alpha$ *és transcendent.*

Demostració. Si $\beta = \log \alpha$ fos algebraic, pel teorema tindriem $\alpha = e^{\beta}$ transcendent.

El teorema de Lindemann-Weierstrass

Una formulació equivalent de la tesi del teorema d'Hermite-Lindemann és

$$1 = e^0 \textit{ i } e^\alpha \textit{ són linealment independents sobre } \overline{\mathbb{Q}}.$$

Teorema (Lindemann-Weierstrass, 1885) *Si $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M$ són $M+1$ nombres algebraics diferents, aleshores*

$$e^{\alpha_0}, e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_M}$$

són linealment independents sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Corol·lari 1. *Si α és un nombre real algebraic no nul, aleshores $\sin\alpha$ és transcendent.*

Demostració. Com $\sin\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$, si fos algebraic, tindriem una relació de dependència lineal sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ de les exponencials del nombres algebraics, $0, i\alpha, -i\alpha$, que són diferents si $\alpha \neq 0$.

Corol·lari 2. *Si* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M$ *són* $M+1$ *nombres algebraics diferents no nuls, aleshores, per a nombres algebraics no nuls* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_M$*, el nombre*

$$\beta_0 e^{\alpha_0} + \beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_M e^{\alpha_M}$$

és transcendent.

Per a provar el teorema de Lindemann-Weierstrass, provem primer el cas particular següent.

Teorema. (Cas particular de Lindemann-Weierstrass.) *Siguin* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M$ *nombres algebraics diferents no nuls amb la propietat que, si* $\alpha_m \in \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$*, tot conjugat de* α_m *també hi pertany. Suposem a més que* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_M$ *són nombres enters no nuls tals que, si* α_i *i* α_j *són conjugats,* $\beta_i = \beta_j$*. Aleshores*

$$\beta_0 + \beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \cdots + \beta_M e^{\alpha_M} \neq 0.$$

Demostració. Suposem que existeixen enters no nuls $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_M$ complint les hipòtesis del teorema, tals que

$$\beta_0 + \beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \cdots + \beta_M e^{\alpha_M} = 0. \tag{3}$$

Ordenem i renumerem els α's de forma que $\{\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \ldots, \alpha_{lM_l}\}, l = 1, \ldots, L$ sigui un sistema complet de conjugats i posem β_l el coeficient comú dels α_{lm}. Reescrivim (3) en la forma

$$\beta_0 + \sum_{l=1}^{L} \beta_l \left(\sum_{m=1}^{M_l} e^{\alpha_{lm}} \right) = 0.$$

Posem $f_l(z) = (z - \alpha_{l1})(z - \alpha_{l2}) \ldots (z - \alpha_{lM_l})$. És un polinomi amb coeficients racionals i per tant existeix un enter positiu d_l tal que $d_l f_l$ té coeficients enters.

Definim $f(z)$ per

$$f(z) = (d_1 d_2 \dots d_L)^p z^{p-1} f_1(z)^p f_2(z)^p \dots f_L(z)^p,$$

i posem

$$f(z) = \sum_{n=p-1}^{(M+1)p-1} c_n z^n.$$

Tenim $c_{p-1} = \pm(d_1 d_2 \dots d_L \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_M)^p \neq 0$.
Com abans, es compleix

$$\sum_{n=1}^{p-1} f^{(n)}(z) = \sum_{N=p-1}^{(M+1)P-1} \left(N! c_N \sum_{n=N-p+1}^{N-1} \frac{z^n}{n!} \right),$$

i $\sum_{n=1}^{p-1} f^{(n)}(\alpha) = 0$, per a $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$.

Trenquem en tres trossos $e^\alpha \sum_{N=p-1}^{(M+1)p-1} N!c_N$, amb el sumand del mig nul per a $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_M\}$, el primer sumand, el polinomi $P_p(\alpha)$ i el tercer la “cua” $T_p(\alpha)$. Tenint en compte (3), queda la igualtat

$$\begin{aligned} \beta_0 \sum_{N=p-1}^{(M+1)p-1} \frac{N!c_N}{(p-1)!} + \sum_{l=1}^{L} \beta_l \left(\sum_{m=1}^{M_l} \frac{P_p(\alpha_{lm})}{(p-1)!}\right) \\ = -\sum_{l=1}^{L} \beta_l \left(\sum_{m=1}^{M_l} \frac{T_p(\alpha_{lm})}{(p-1)!}\right) \end{aligned} . \tag{4}$$

Com el terme de $P_p(\alpha)$ corresponent a $N = p-1$ és nul, tenim $\dfrac{1}{p!}P_p(\alpha) \in \mathbb{Z}[z]$, i del fet que els α_{lm} són un sistema complet de conjugats, obtenim que, per a cada l, existeix un enter a_l, divisible per p tal que

$$\sum_{m=1}^{M_l} \frac{P_p(\alpha_{lm})}{(p-1)!} = \frac{a_l}{d_l^{Mp-1}}.$$

Multiplicant (4) a les dues bandes per D^{Mp} on $D = d_1 d_2 \ldots d_l$, obtenim per a l'enter no nul

$$\mathcal{N} = \beta_0 D^{Mp} \sum_{N=p-1}^{(M+1)p-1} \frac{N! c_N}{(p-1)!} + \sum_{l=1}^{L} a_l \beta_l d_l (D/d_l)^{Mp},$$

l'igualtat

$$\mathcal{N} = -\sum_{l=1}^{L} \beta_l D^{Mp} \left(\sum_{m=1}^{M_l} \frac{T_p(\alpha_{lm})}{(p-1)!} \right).$$

Afitant el terme de la dreta, obtenim $|\mathcal{N}| < 1$ per a p suficientment gran. $\square$

Ara provem el teorema en general a partir d'aquest pas particular. Suposem que existeixen nombres algebraics $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_M$, no tots nuls, tals que

$$\sum_{m=0}^{M} \beta_m e^{\alpha_m} = 0,$$

per a $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_M$ nombres algebraics diferents. Fem el producte

$$\prod_{\substack{\rho_m \text{ conjugat de } \alpha_m \\ m=0,1,\ldots M}} \left(\sum_{m=0}^{M} \beta_m e^{\rho_m} \right)$$

Efectuant el producte i associant els termes amb el mateix coeficient, ens queda una expressió del tipus

$$\kappa_0 E_0 + \kappa_1 E_1 + \cdots + \kappa_L E_L = 0, \tag{5}$$

on les κ_l's són combinacions lineals a coeficients enters de productes de les β_m's i les $E'_m s$ són sumes d'exponencials de sistemes complets de conjugats. Observem que el coeficient del producte de les exponencials de les ρ's més grans de cada factor és no nul. (Definim $\rho_1 \leq \rho_2$ si $\mathrm{Re}\,\rho_1 < \mathrm{Re}\,\rho_2$ o bé $\mathrm{Re}\,\rho_1 = \mathrm{Re}\,\rho_2$ i $\mathrm{Im}\,\rho_1 \leq \mathrm{Im}\,\rho_2$.) Per tant (5) és una relació de dependència no trivial. Ara volem passar a una relació de dependència amb coeficients enters. Fem el producte

$$\prod_{\substack{\gamma_l \text{ conjugat de } \kappa_l \\ l=0,1,\dots L}} \left(\sum_{l=0}^{L} \gamma_l E_l \right).$$

Obtenim una expressió

$$\eta_0 F_0 + \eta_1 F_1 + \cdots + \eta_K F_K = 0$$

on els η_k's són racionals i no tots nuls, i els F_k's són suma d'exponencials d'un sistema complet de conjugats. Treient els termes nuls i multiplicant per un denominador comú obtenim una combinació lineal a coeficients enters, tots no nuls. Si $F_k \neq 1$ per a tot $k = 1, \ldots, K$, i $F_0 = e^{\nu_1} + \cdots + e^{\nu_J}$, multiplicant per $e^{-\nu_1} + \cdots + e^{-\nu_J}$, obtenim una relació de dependència com en el cas particular i per tant hem arribat a contradicció. $\square$

Corol·lari 3. *Sigui α un nombre algebraic no real. Aleshores* $\mathrm{Re}(e^\alpha)$ *i* $\mathrm{Im}(e^\alpha)$ *són tots dos nombres transcendents.*

Demostració. Tenim $\alpha = a + bi$, amb a, b reals algebraics i $b \neq 0$. Suposem que $\beta := \mathrm{Re}(e^\alpha) = e^a \cos b$ és algebraic. Tenim $\beta \neq 0$ i

$$2\beta = e^{a+bi} + e^{a-bi}$$

que dóna una relació de dependència sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ de les exponencials de $0, a + bi, a - bi$, nombres algebraics diferents, contradicció. Anàlogament es prova $\mathrm{Im}(e^\alpha)$ transcendent.

Corol·lari 4. *Sigui* α *un nombre algebraic no nul. Aleshores* $\tan\alpha$ *és transcendent.*

Demostració. Com

$$\tan\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})},$$

si fos algebraic tindriem una relació de dependència lineal sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ de $e^{i\alpha}$ i $e^{-i\alpha}$.

El lema de Siegel. Transcendència de e^{π}

Definim l'*altura* $h(X)$ d'un vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{Z}^N$ per

$$h(X) = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}.$$

Lema de Siegel. Sigui $\mathfrak{C} = (c_{mn})$ una matriu $M \times N$ no nul·la amb coeficients enters i sigui

$$C = \max\{|c_{mn}| : 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N\}.$$

Si $M < N$, existeix un vector no nul $X \in \mathbb{Z}^N$ que compleix

$$\mathfrak{C}X = 0 \text{ and } \ h(X) \leq (CN)^{\frac{M}{N-M}}.$$

Teorema. *El nombre e^π és transcendent.*

Idea de la demostració. Suposem que $\alpha = e^\pi$ és algebraic amb polinomi mínim

$$\sum_{j=0}^{d} c_j x^j \in \mathbb{Z}[x].$$

La primera idea és construir un polinomi P que s'anul·li en e^π i definir una funció entera $f(z) = P(e^z)$. Per poder afitar, necessitem un ordre d'anul·lació de f en π gran i per això fem servir un polinomi en 2 variables. Busquem un polinomi

$$P(x, y) = \sum_{m=0}^{D-1} \sum_{n=0}^{D-1} a_{mn} x^m y^n \in \mathbb{Z}[x, y],$$

amb coeficients petits, tal que $f(z) = P(e^z, e^{iz})$ compleixi

$$f^{(t)}(k\pi) = 0, \text{ per a } \ k = 1, 2, \ldots K \text{ i } \ t = 0, 1, \ldots T-1.$$

Com $f(z) = \sum_{m=0}^{D-1} \sum_{n=0}^{D-1} a_{mn} e^{(m+ni)z}$, tenim

$$f^{(t)}(z) = \sum_{m=0}^{D-1} \sum_{n=0}^{D-1} a_{mn}(m+ni)^t e^{(m+ni)z}$$

i, com $e^{\pi} = \alpha, e^{i\pi} = -1$,

$$f^{(t)}(k\pi) = \sum_{m=0}^{D-1} \sum_{n=0}^{D-1} a_{mn}(m+ni)^t \alpha^{km}(-1)^{kn}. \tag{6}$$

Els a_{mn} satisfan el sistema lineal de KT equacions

$$\sum_{m=0}^{D-1} \sum_{n=0}^{D-1} (m+ni)^t \alpha^{km}(-1)^{kn} a_{mn} = 0.$$

Per obtenir un sistema d'equacions amb coeficients enters, expressem les potències de α en la base $1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1}$, separem part real i part imaginària, i treiem denominadors.
Podem acotar aquests coeficients en termes de

$$h(\alpha) := \max\{|c_j| : j = 0, \ldots, d\}$$

i, aplicant el lema de Siegel, obtenim a_{mn} acotats en termes de D, K, T i $h(\alpha)$.

Considerem ara M tal que $f^{(m)}(k\pi) = 0$ per a tot $m < M$ i tot $k \leq K$, i existeix k_0 tal que $f^{(M)}(k_0\pi) \neq 0$. Aleshores

$$\mathcal{A} = f^{(M)}(k_0\pi)$$

és un nombre algebraic no nul. De fet, per (6), $\mathcal{A} \in \mathbb{Q}(i, \alpha)$.

La seva norma és un nombre racional, amb denominador una potència de c_d. L'enter $\mathcal{N}$ obtingut treient el denominador a $N_{\mathbb{Q}(i,\alpha)|\mathbb{Q}}(\mathcal{A})$ és no nul.
Agafant T suficientment gran, obtenim

$$|\mathcal{N}| < 1.$$

Per acotar el mòdul de $\mathcal{A}$, s'aplica el Principi del Mòdul Màxim a la funció entera

$$G(z) = \frac{f(z)}{(z-\pi)^M(z-2\pi)^M \dots (z-K\pi)^M}.$$

El problema 7 de Hilbert. Teorema de Gelfond-Schneider

Hilbert (1900): "Hermite's arithmetical theorems on the exponential function and their extension by Lindemann are certain of the admiration of all generations of mathematicians. Thus the task at once presents itself to penetrate further along the path here entered. ...I should like, therefore, to sketch a class of problems which, in my opinion, should be attacked as here next in order... I consider very difficult the [not yet obtained] proof that

The expression α^β*, for an algebraic base* α *and an irrational algebraic exponent* β*, e. g., the number* $2^{\sqrt{2}}$ *or* $e^\pi = i^{-2i}$*, always represents a transcendental or at least an irrational number.*

It is certain that the solution of these and similar problems must lead us to entirely new methods and to a new insight into the nature of special irrational and transcendental numbers."

Teorema (Gelfond-Schneider, 1934) *Siguin α i β nombres algebraics, amb $\alpha \neq 0, 1$, i β irracional. Aleshores α^β és transcendent.*

Com a conseqüència, $2^{\sqrt{2}}, e^\pi = i^{-2i} = (-1)^{-i}$ són nombres transcendents.

Un enunciat equivalent del teorema de Gelfond-Schneider degut a Michel Waldschmidt és

Teorema *Donats dos nombres complexos β i ζ no nuls, amb β irracional,al menys un dels nombres*

$$\beta, e^\zeta, e^{\beta\zeta}$$

és transcendent.

Per veure l'equivalència, posem $\zeta = \log \alpha$.

Corol·lari 1. *Sigui α un nombre algebraic, $\alpha \neq 0, 1$, i sigui β un nombre algebraic tal que $i\beta$ és irracional. Aleshores $\cos(\beta \log \alpha)$ i $\sin(\beta \log \alpha)$ són tots dos nombres transcendents.*

Demostració. Tenim les identitats

$$\cos(\beta \log \alpha) = \frac{e^{i\beta \log \alpha} + e^{-i\beta \log \alpha}}{2}, \sin(\beta \log \alpha) = \frac{e^{i\beta \log \alpha} - e^{-i\beta \log \alpha}}{2}.$$

$\cos(\beta \log \alpha)$ algebraic $\Rightarrow e^{i\beta \log \alpha} = \alpha^{i\beta}$ algebraic, que contradiu el teorema.

Corol·lari 2. *Siguin α_1 i α_2 nombres algebraics no nuls tals que $\log \alpha_1$ i $\log \alpha_2$ són $\mathbb{Q}$-linealment independents. Aleshores, el nombre*

$$\log \alpha_1 / \log \alpha_2$$

és transcendent.

Demostració. Posem $\beta = \log \alpha_1 / \log \alpha_2$. Com $\log \alpha_1$ i $\log \alpha_2$ són $\mathbb{Q}$-linealment independents, el nombre β és irracional. Posant $\zeta = \log \alpha_2$, el teorema implica la transcendencia d'al menys un dels nombres

$$\frac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2},\ e^{\log \alpha_2} = \alpha_2,\ e^{\frac{\log \alpha_1}{\log \alpha_2} \log \alpha_2} = \alpha_1.$$

$\square$

La tesi d'aquest corol·lari és equivalent a

$$\beta_1 \log \alpha_1 + \beta_2 \log \alpha_2 \neq 0$$

per a β_1, β_2 nombres algebraics no nuls qualssevol.

Idea de la prova del teorema de Gelfond-Schneider.

Volem provar
$\beta, \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \beta, e^{\zeta}$ *o* $e^{\beta\zeta}$ *és transcendent.*

Suposem que $\alpha_1 = \beta, \alpha_2 = e^{\zeta}, \alpha_3 = e^{\beta\zeta}$ són tots tres algebraics. Observem que per a tot polinomi $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, la funció $F(z) = P(z, e^{\zeta z})$ compleix que

$$F(k_1 + k_2\beta) = P(k_1 + k_2\beta, e^{\zeta(k_1+k_2\beta)}) = P(k_1 + k_2\alpha_1, \alpha_2^{k_1}\alpha_3^{k_2})$$

és un nombre algebraic per a tot parell d'enters positius (k_1, k_2). A partir del lema de Siegel, construirem un polinomi $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ amb coeficients petits tal que la funció associada $F(z) = P(z, e^{\zeta z})$ compleixi les dues propietats

- $F(z)$ no idènticament zero.
- Per a cada parell (k_1, k_2) amb $0 \leq k_1, k_2 \leq K$, $F(k_1 + k_2\beta) = 0$.

El fet que $F(z)$ no sigui idènticament zero ve de l'independència algebraica de z i $e^{\zeta z}$. Per obtenir un sistema d'equacions lineals a coeficients enters a partir de

$$P(k_1 + k_2\alpha_1, \alpha_2^{k_1}\alpha_3^{k_2}) = 0,\ 0 \le k_1, k_2 \le K,$$

considerem un element primitiu θ de l'extensió $\mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Observem que, com β és irracional, els zeros $k_1 + k_2\beta$ de F són tots diferents.

A més, existeix $M > K$ tal que

$$F(k_1 + k_2\beta) = 0,\ \text{ per a }\ 0 \le k_1, k_2 < M,$$

i existeix un parell (k_1^*, k_2^*) amb $0 \le k_1^*, k_2^* \le M$, k_1^* o bé k_2^* igual a M, tal que

$$F(k_1^* + k_2^*\beta) \neq 0.$$

Ara, el nombre algebraic no nul $\mathcal{A} = F(k_1^* + k_2^*\beta)$ és a $\mathbb{Q}(\theta)$ i la seva norma proporciona un enter estríctament comprès entre 0 i 1.

Si δ és un denominador comú dels coeficients de les expressions de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en la base de potències de θ, $N_{\mathbb{Q}(\theta)|\mathbb{Q}}(\mathcal{A})$ té denominador potència de δ.

Per l'existència de (k_1^*, k_2^*), usem el teorema següent.

Teorema. *Sigui $F(z)$ una funció entera i suposem que existeix un nombre real κ tal que, per a R suficientment gran,*

$$|F|_R := \max\{|F(z)| : |z| \leq R\} \leq e^{R^\kappa}.$$

Si existeix $\varepsilon > 0$ i una successió creixent no acotada de nombres reals $R_1, R_2, \ldots$ tal que

$$R_n^{\kappa+\varepsilon} < card\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \ i \ \ F(z) = 0\},$$

per a tot $n = 1, 2, \ldots,$ aleshores $f(z)$ és idènticament zero.

El teorema de les sis exponencials

Una reformulació del teorema d'Hermite-Lindemann és
Per a qualsevol nombre complex β no nul, al menys un dels nombres β, e^{β} és transcendent.

A partir de l'últim corol·lari del teorema de Gelfond-Schneider, podem provar un resultat semblant.

Teorema. *Donat un nombre irracional $\beta \in \mathbb{C}$, per a x_1, x_2 nombres complexos $\mathbb{Q}$-linealment independents, al menys un dels nombres*

$$x_1, x_2, e^{\beta x_1}, e^{\beta x_2}$$

és transcendent.

Demostració. Si tots quatre nombres fossin algebraics, el nombre x_1/x_2 seria algebraic i els dos nombres βx_1 i βx_2 serien logaritmes de nombres algebraics. A més, βx_1 i βx_2 són $\mathbb{Q}$-linealment independents. Pel corol·lari, el quocient $\beta x_1/\beta x_2 = x_1/x_2$ és transcendent, contradicció.

Teorema (de les sis exponencials). *Siguin* $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2, y_3\}$ *dos conjunts de nombres complexos* $\mathbb{Q}$*-linealment independents. Aleshores, al menys un dels sis nombres*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_1 y_3}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}, e^{x_2 y_3}$$

és transcendent.

Idea de la demostració. Podem enunciar el teorema en la forma

Les dues funcions exponencials algebraicament independents $e^{x_1 z}, e^{x_2 z}$ *no poden ser simultaneament algebraiques en tres valors* $\mathbb{Q}$*-linealment independents.*

Els passos de la prova són

Pas 1. Suposem que tots els nombres $e^{x_i y_j}$ són algebraics. Aleshores, per a tot $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, si posem $F(z) = P(e^{x_1 z}, e^{x_2 z})$, per a enters k_1, k_2, k_3 qualssevol, $F(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3)$ és un nombre algebraic.

Pas 2. Trobem un polinomi no zero $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ amb coeficients petits tal que, si posem $F(z) = P(e^{x_1 z}, e^{x_2 z})$, aleshores

$$F(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3) = 0,\ 0 \le k_1, k_2, k_3 < K$$

(Usem un element primitiu θ de l'extensió $\mathbb{Q}(e^{x_i y_j})$.)

Pas 3. Existeix un enter positiu M tal que

$$F(k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3) = 0,\ 0 \le k_1, k_2, k_3 < M$$

i existeix (k_1^*, k_2^*, k_3^*) amb $0 \le k_1^*, k_2^*, k_3^* \le M$ i

$$F(k_1^* y_1 + k_2^* y_2 + k_3^* y_3) \neq 0.$$

Pas 4. La norma del nombre algebraic no nul

$$\mathcal{A} = F(k_1^* y_1 + k_2^* y_2 + k_3^* y_3),$$

tret el denominador, és un enter $\mathcal{N}$ tal que

$$0 < \mathcal{N} < 1.$$

Per acotar $\mathcal{A}$, fem servir el principi del mòdul màxim.