

Unes paraules

Sigui K un cos local no-arquimedià (pensem donat v discreta).

- Anell associat: $\mathcal{O}_K$
- Ideal maximal: $\mathfrak{p}_K$
- Cos residual: k

Tors sobre un cos local

Definició

Un *tor* sobre K és un esquema en grups afí i llis T sobre K complint

$$T_{\overline{K}} \simeq \mathbb{G}_m^r$$

per algun natural $r \geq 1$.

La xarxa associada a T

El grup de caràcters

$$X^*(T) := \operatorname{Hom}_{\overline{K}}(T_{\overline{K}}, \mathbb{G}_m)$$

és un $\mathbb{Z}$ -mòdul lliure de rang finit amb una acció continua del grup $\operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$.

Restricció de Weil

Sigui L/K una extensió finita i separable.

Restricció de Weil

La restricció de Weil $R_{L/K}(\mathbb{G}_m)$ és l'esquema en K -grups definit per

$$R_{L/K}(\mathbb{G}_m)(A) = (L \otimes_K A)^\times$$

per a qualsevol K -àlgebra A .

- $R_{L/K}(\mathbb{G}_m)$ és un tor sobre K de dimensió $[L : K]$.
- Hi ha un morfisme norma canònic:

$$N_{L/K} : R_{L/K}(\mathbb{G}_m) \longrightarrow \mathbb{G}_m.$$

Norm-One Tor

Definició

El *tor nòrmic* associat a L/K és

$$T := R_{L/K}^1(\mathbb{G}_m) := \ker(N_{L/K} : R_{L/K}(\mathbb{G}_m) \rightarrow \mathbb{G}_m).$$

$$T(K) = \{x \in L^\times \mid N_{L/K}(x) = 1\}.$$

- T és un tor sobre K de dimensió $[L : K] - 1$.
- Pels K -punts:

$$T(K) = \{x \in L^\times \mid N_{L/K}(x) = 1\}.$$

Néron Models: Definició

Sigui $S = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_K)$ i $\eta = \operatorname{Spec}(K)$.

Definició

Sigui G un esquema en grups i llis ... sobre K . Un *model de Néron* de G és un esquema en grups llis ... $\mathcal{G} \rightarrow S$ amb fibra genèrica $\mathcal{G}_\eta \simeq G$ complint:

propietat de model de Néron

Per qualsevol X esquema llis ... sobre S i per tot K -morfisme

$$f_\eta : X_\eta \rightarrow G,$$

existeix un únic S -morfisme

$$f : X \rightarrow \mathcal{G}$$

estenen f_η . En particular, $\mathcal{G}(\mathcal{O}_K)$ s'identifica amb $G(K)$.

Fent explícit el model de Néron pel Tor nòrmic

Recordem tot tor sobre un cos local admet model de Néron. Sigui $T = R_{K/\mathbb{Q}_p}^1(\mathbb{G}_m)$, amb $[K : \mathbb{Q}_p] = p$, totalment ramificada, $t \in K$ uniformitzant:

- $p_K(t) := t^p - s_1 t^{p-1} + s_2 t^{p-2} + \dots + (-1)^p s_p = 0$
amb $v_p(s_i) \geq 1$ i $v_p(s_p) = 1$ (polinomi d'Eisenstein)
- $F_K(x_0, \dots, x_{p-1}) := N_{K/\mathbb{Q}_p}((1 + x_0) + x_1 t + \dots + x_{p-1} t^{p-1}) - 1 \in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_{p-1}]$ equació del Tor normic $R_{K/\mathbb{Q}_p}^1(\mathbb{G}_m)$,
- Exemple concret $[K : \mathbb{Q}_3] = 3$:

$$\begin{aligned} F_K(x_0, x_1, x_2) := & x_0^3 - s_1 x_0^2 x_1 - 2s_2 x_0^2 x_2 + s_1^2 x_0^2 x_2 + s_2 x_0 x_1^2 - s_1 s_2 x_0 x_1 x_2 + \\ & 3s_3 x_0 x_1 x_2 + s_2^2 x_0 x_2^2 - 2s_3 s_1 x_0 x_2^2 - s_3 x_1^3 + s_1 s_3 x_1^2 x_2 - s_2 s_3 x_1 x_2^2 + s_3^2 x_2^3 + \\ & 3x_0^2 - 2s_1 x_0 x_1 - 4s_2 x_0 x_2 + 2s_1^2 x_0 x_2 + s_2 x_1^2 + 3s_3 x_1 x_2 - \\ & s_1 s_2 x_1 x_2 - 2s_1 s_3 x_2^2 + s_2^2 x_2^2 + 3x_0 - s_1 x_1 - 2s_2 x_2 + s_1^3 x_2. \end{aligned}$$

- F_K no dóna model de Néron pel tor.

Fent explícit el model de Néron pel Tor nòrmic II

Fent explícit el model de Néron (Xarles)

- 1 Denotem per $F_0(x_0, \dots, x_{p-1}) := p^{-1}F_K(px_0, \dots, x_{p-1})$ es comprova $\in \mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_{q-1}]$
- 2 F_0 és un model llis per $R_{L/\mathbb{Q}_p}^1(\mathbb{G}_m)$ si $\min_{1 \leq i \leq q-1} v_p(is_i) = 1$, i els $\mathbb{Q}_p$ -punts són $\mathbb{Z}_p$ -punts.
- 3 (Liu-Lorenzini) si tenim un model llis on fibra especial tingui el nombre de components connexes inferiors al nombre que en té el model de Néron, llavors aquest model llis és realment el model de Néron.
- 4 $\text{Spec}(\mathbb{Z}_p[x_0, \dots, x_{p-1}]/(F_0))$ és model de Néron del tor nòrmic per a $R_{K/\mathbb{Q}_p}^1(\mathbb{G}_m)$.
- 5 I si $\min_{1 \leq i \leq q-1} v_p(is_i) > 1$, iterem el procediment $F_1(x_0, \dots, x_{p-1}) := p^{-1}F_0(x_0, px_1, \dots, x_{p-1})$ donarà el model de Néron del Tor nòrmic si $\nu(F_1) = 0$, on $\nu(G) := \min_{0 \leq j \leq p-1} \{v_p(\frac{\delta G}{\delta x_j}(0, \dots, 0))\}$

Xarles i el Seminari STNB

- STNB04: 1989-90, Estructures Galoisianes Hodge-Tate, amb grups p -divisibles.
- STNB05: 1990-91, Corbes modulars: models singulars i Hauptmodul
- STNB06: 1991-1992, Superfícies aritmètiques
- STNB07: 1992-1993, Moties de Chow: motius de corbes i varietats abelianes.
- STNB13: 1998-1999(EADA), Problemes immersió cossos grans (geometria rígida analítica), org.:comunicacions (amb Carlos Infante)
- STNB14: 1999-2000(EADA), Org: Una breu introducció cohomologia cristal.lina. Xerrada: punts torsió superfícies. (amb Carlos Infante)

Any rere any amb el STNB

- STNB15: 2000-2001 (Nàutica): Mètodes geomètrics en criptografia i teoria de codis
Corbes de Shimura.
- STNB16: 2001-2002 (Nàutica): Org: Mòduls de Drinfeld.(amb Carlos Infante)
- STNB17: 2002-2003 (Nàutica): Org: Càlcul explícit de punts racionals corbes algebraiques (Chabauty-Coleman)+xerrada
- STNB18: 2003-2004 (Nàutica): Org: Dibuixos d'infants (no falti mai Grothendieck!)
- STNB19: 2004-2005 (Nàutica): Mètodes de Garbell (també teoria de nombres analítica!)
- STNB20: 2005-2006 (Nàutica): Successions d'Sloane
- STNB21: 2006-2007: (Nàutica): Models de corbes de gènere 1 i 2

Xarles i el STNB

- STNB22: 2007-2008: (Vilanova): org STNB, Monografic treballs de Don Zagier.
- STNB23: 2008-2009: (UB): org Superfícies $K3$ i formes modulars.
- STNB24: 2009-2010: (CRM) coorg: Advanced Course on Arithmetic Geometry for Function Fields of Positive Characteristic. Workshop on Iwasawa Theory over Functions Fields of Characteristic $p > 0$, Workshop and Advanced Course on Drinfeld modules and L -functions.
- STNB25: 2010-2011 ((UB): Coorg: Corbes de gènere alt.
- STNB27: 2012-2013 Uniformització p -àdica de corbes de gènere $g \geq 2$ +comunicació. (amb Iago Giné)
- STNB30: 2015-2016: Corbes modulars de nivell infinit (amb Iago Giné)
- STNB32: 2017-2018: Comunicació: PREVALUATIONS
- STNB33: 2018-2019: org: Mordel-Faltings a la Chabauty-Kim.

Semi-anells tropicals

Definició

Un semianell (commutatiu) semiring és un conjunt A amb dos operacions binàries $+$ i $\cdot$ complint que ambdues $(A, +)$ i $(A, \cdot)$ són monoïds commutatius amb identitat (0_A i 1_A respectivament), satisfent la propietat distributiva del producte amb respecte l'adició, i la propietat $a \cdot 0_A = 0_A$ per a tot $a \in A$. Un semianell A s'anomena idempotent si $a + a = a$ per a tot $a \in A$.

A més, si A és un semianell idempotent, porta associat un ordre parcial definit per $a \leq b$ sempre que $a + b = b$.

El *semianell tropical* es defineix com el conjunt $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, equipat amb les operacions: $a \oplus b := \min(a, b)$, $a \otimes b := a + b$.

Amb aquestes operacions, $(\mathbb{T}, \oplus, \otimes)$ és un semiring commutatiu idempotent.

Prepublicació d'aquest 2026 (Gualdi,Kuhrs,Mayo-García,Xarles)

In this survey, we describe two different approaches to constructing affine schemes for commutative semirings: one based on prime ideals, and another based on prime kernels (also called subtractive ideals). We then explain how these two approaches are related through the theory of universal valuations.

En Xavier també ...

A part d'aquest món més matemàtic, també [▶ Veure el vídeo](#)

I una resposta de'n Xavier Xarles és:

Jocs de l'Eco

Per molt que m'hi esforci
no puc treure més d'un sis,
als daus.

L'atzar té les seves regles!
Faig la viu-viu
i no em cal dir-te'n
el corol·lari.

Ni deduir que cendra i plàstic
són el coixí dels somnis
fets de llautó.

Jocs de l'Eco

Així que em concentro en el tauler
amb totes les fitxes clavades
i espero treure almenys un cinc;
sortir amb la bola disparada
del cau de serps que m'han arrapat la cama,
i no sentir més els meus gemecs
de criatura empresonada
en la conjectura perpètua.
I mentrestant em fas l'ullet
palplantada
a la casella de l'oca de la sort
i jo m'entesto a anar tirant
un dau que s'ha tornat tot blanc.

Moltes gràcies Xavier